

内 容 简 介

本书是教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果,是面向 21 世纪课程教材、普通高等教育“九五”国家级重点教材和教育部高等学校工科物理课程教学指导委员会“九五”规划教材。本书是在原第三版的基础上修订而成的,在修订过程中注意保持了原书体系结构合理、深广度适当、注意教法、分量适中、适应面宽等特点,同时吸取了近年来国内外出版的物理教材的优点,以现代的观点来处理经典物理的体系结构及其内容选取,精选并加强近代物理部分的内容,适当介绍当代物理的成就以及对工程技术的深远影响。全书共分三册,上册包括力学和热物理学;中册包括电磁学;下册包括波动过程、近代物理学和物理学与新技术等内容。

本书可作为高等学校工科各专业的教科书,也可供文理科有关专业选用和社会读者阅读。

力学和热学的量和单位

量		单 位		换算关系
名 称	符 号	名 称	符 号	
长度	l, L	米	m	
质量	m	千克	kg	
时间	t	秒	s	
速度	v	米每秒	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	
加速度	a	米每二次方秒	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	
角	$\theta, \alpha, \beta, \gamma$	弧度	rad	$1^\circ = (\pi/180) \text{ rad}$
		度	($^\circ$)	
角速度	ω	弧度每秒	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}, \text{s}^{-1}$	
角加速度	α	弧度每二次方秒	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}, \text{s}^{-2}$	$1 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1} = 60 \text{ r} \cdot \text{s}^{-1}$
(旋)转速(度)	n	转每秒	$\text{r} \cdot \text{s}^{-1}$	
		转每分	$\text{r} \cdot \text{min}^{-1}$	
频率	ν	赫兹	Hz, s^{-1}	$\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$
力	F	牛顿	N	
摩擦因数	μ	—	1	
动量	p	千克米每秒	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$
冲量	I	牛顿秒	$\text{N} \cdot \text{s}$	
功	W	焦耳	J	
能量、热量	E, E_k, E_p, Q	焦耳	J	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$
功率	P	瓦特	$\text{W}(\text{J} \cdot \text{s}^{-1})$	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3}$
力矩	M	牛顿米	$\text{N} \cdot \text{m}$	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$
转动惯量	J	千克二次方米	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	$1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$
角动量	L	千克二次方米每秒	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	
劲度系数	k	牛顿每米	$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$	
压强	p	帕斯卡	Pa	$t = T - 273.15 \text{ K}$
体积	V	立方米	m^3	
		升	L(l)	
热力学温度	T	开尔文	K	
摄氏温度	t	摄氏度	$^\circ\text{C}$	
物质的量	ν, n	摩尔	mol	
摩尔质量	M	千克每摩尔	$\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$	
分子自由程	λ	米	m	
分子碰撞频率	Z	次每秒	s^{-1}	
粘度	η	千克每米秒	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$	
热导率	κ	瓦每米开	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
扩散系数	D	平方米每秒	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	
比热容	c	焦耳每千克开	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
摩尔热容	$C_m, C_{V,m}, C_{p,m}$	焦耳每摩尔开	$\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
摩尔热容比	$\gamma = C_{p,m}/C_{V,m}$			
热机效率	η			
致冷系数	ϵ			
熵	S	焦耳每开	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$	

在一般计算时所取常用物理常量的值

物理量	符号	数值 ^①	单位
真空中光速	c	3.00×10^8	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
真空磁导率	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	$\text{N} \cdot \text{A}^{-2}$
真空电容率	ϵ_0	8.85×10^{-12}	$\text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
引力常量	G	6.67×10^{-11}	$\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
普朗克常量	h	6.63×10^{-34}	$\text{J} \cdot \text{s}$
元电荷	e	1.60×10^{-19}	C
里德伯常量	R_∞	10 973 731	m^{-1}
电子质量	m_e	9.11×10^{-31}	kg
康普顿波长	λ_C	2.43×10^{-12}	m
质子质量	m_p	1.67×10^{-27}	kg
中子质量	m_n	1.67×10^{-27}	kg
阿伏伽德罗常数	N_A	6.02×10^{23}	mol^{-1}
摩尔气体常量	R	8.31	$\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
玻耳兹曼常量	k	1.38×10^{-23}	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$
斯特藩 - 玻耳兹曼常量	σ	5.67×10^{-8}	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
维恩位移定律常量	b	2.90×10^{-3}	$\text{m} \cdot \text{K}$
标准重力加速度	g	9.81	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

① 本表各物理常量取国际科技数据委员会(CODATA)1986年推荐值的三位有效数字。

希腊字母

小写	大写	英文名称	小写	大写	英文名称
α	A	Alpha	ν	N	Nu
β	B	Beta	ξ	Ξ	Xi
γ	Γ	Gamma	\omicron	O	Omicron
δ	Δ	Delta	π	Π	Pi
ϵ	E	Epsilon	ρ	P	Rho
ζ	Z	Zeta	σ	Σ	Sigma
η	H	Eta	τ	T	Tau
θ	Θ	Theta	υ	Υ	Upsilon
ι	I	Iota	$\varphi(\phi)$	Φ	Phi
κ	K	Kappa	χ	X	Chi
λ	Λ	Lambda	ψ	Ψ	Psi
μ	M	Mu	ω	Ω	Omega

第四版前言

《物理学》一书,至今已经两次修订出版,备蒙广大师生的厚爱,编者深受鼓舞.本书第二版曾于1980年获首届国家教委优秀教材二等奖,第三版又于1995年获第三届全国国家教委优秀教材一等奖.

时值世纪之交,工科大学物理教学如何面向21世纪,我们的教材又如何适应这一教学改革的需要,这些问题都值得深思与研究.两年多来,我们按照“九五”国家级重点教材及教育部面向21世纪课程教材规划的要求和立项目标,确定了《物理学》(第四版)的修订指导思想是:在保持本书原有特色的基础上,立足于革新,力求在稳定中求革新,在革新中求发展.为此,我们参照1995年国家教委颁布的高等工科院校《大学物理课程教学基本要求》,适当更新了教学体系和内容,在经典物理中增强了现代观点和信息;加强了近代物理方面的内容,适度介绍了当代物理的成就和物理学与新技术方面的课题;加强了工程观念,尽力注意处理好理论与实际的联系;删去了一些与科学进展和教学要求不相适应的内容,改写或重写了部分章节和段落,更新了部分插图和照片,力求使图文配合得更好;更新了部分例题、问题和习题.我们期望《物理学》(第四版)较之前一版更趋于完善,以适应21世纪我国多数工科院校大学物理课程的教学需要,为培养基础扎实并具有创新能力的工程技术人才献上自己的一份心意.

为适应不同教学对象和不同专业类别的教学需要,本书在满足《教学基本要求》必学内容的基础上,还编入了一些供选学的内容.为方便读者,选学内容均冠以“*”号,并用小字排印.这些选学内容可拓展读者的知识面,使读者能更广泛地了解物理学的新成就和新技术等,它们大到章,如万有引力场和物理学与新技术,小到节与段,如自组织现象、非线性光学现象、混沌现象、光的多普勒效应、广义相对论简介等.所有选学内容均自成体系,可选讲或指导学生自学,跳过不读也不影响全书的系统性.

理论联系实际是工科大学物理教学中的一个非常重要而又难以恰当处理的问题.我们认为,关键是选材要符合教学要求,分量要适当、内容应不涉及过多技术细节,且要有利于创新能力的培养.基于以上考虑,在本书中,除在正文、例题、习题中选择了一些联系实际的问题外,还以附注形式引导学生自学与本书相配套的教学参考书——《物理学原理在工程技术中的应用》(第二版)中的37个专题.

此次修订,还按 1996 年全国自然科学名词审定委员会公布的《物理学名词》和 1994 年实施的《量和单位》的国家标准,对全书的物理学名词及量和单位进行了校核;按汉语拼音字母的次序重新编排了索引。

编者衷心感谢西北工业大学徐绪笃教授(主审)、中国纺织大学汤毓骏教授和东南大学叶善专教授,他们细致地审阅了修订稿,提出了许多中肯的修改意见,使本书增色不少。

本书第四版的上册和中册由马文蔚改编;下册第十八章和第十九章由马文蔚改编,第十七章由解希顺改编,第二十章由解希顺编写,第十四章、第十五章和第十六章由谈淑梅改编。由于编者水平有限,书中仍会存在不妥之处,敬请老师和同学提出宝贵意见。

改编者

1999 年 3 月于东南大学

第一版编者的话摘录

在本书的编写过程中,我们努力运用辩证唯物主义观点来阐明物理学的基本规律;按照理论与实践相统一的原则,从学生易于理解的实际问题中提出问题,引出概念和规律,并指出应用这些概念和规律去解决问题的途径,同时注意培养学生抽象思维的能力;在经典物理与近代物理的关系方面,本书在系统地阐述经典物理的基本规律的同时,指出经典概念的局限性和近代物理的发展.

参加本书编写工作的院校和人员有:南京工学院^①(柯景凤、马文蔚、曹恕、宋玉亭、李士澂)、南京航空学院^②(兰信梯、桂永蕃)、华东工程学院^③(张汾)、华东水利学院^④(蒋澄华)、南京林产工业学院^⑤(王明馨)、无锡轻工业学院^⑥(葛元欣)、镇江农机学院^⑦(周遥生),并由张汾、马文蔚、王明馨负责定稿.

① 现改名为东南大学.

② 现改名为南京航空航天大学.

③ 现改名为南京理工大学.

④ 现改名为河海大学.

⑤ 现改名为南京林业大学.

⑥ 现改名为无锡轻工业大学.

⑦ 现改名为江苏理工大学.

第二版前言摘录

南京工学院(现为东南大学)等七所工科院校编写的《物理学》(简称第一版),自1977年出版以来,已有四年多的时间了.在这段时间里,许多教师和读者通过各种方式对第一版的体系、内容、深广度以及文字表达等方面,提出了很多宝贵的意见和建议.我们谨向他们表示衷心感谢.

根据高等学校工科物理教材编审委员会1980年哈尔滨会议制定的教材规划,《物理学》第二版是在第一版的基础上,参照1980年颁布的高等工业学校普通物理学教学大纲进行修订的.本书可作为讲课时数为130学时的一般工科专业普通物理课程的教材.

按照教学大纲的要求,本书是以微积分和矢量代数为基础的.矢量以附录形式放在上册,教师可结合物理概念分散讲授,也可集中讲授.

本书由北方交通大学余守宪主审,余守宪以及西北工业大学徐绪笃、北京工业学院陈广汉、上海铁道学院朱培豫、哈尔滨工业大学田恩瑞审阅了修订稿,并提出了较详细的具体修改意见和建议.

第三版前言摘录

本书第二版自 1982 年发行以来,已经过了 10 年.在这期间,国家教委颁布了《高等工业学校大学物理课程教学基本要求》.为适应该《教学基本要求》,本书修订时,在内容上作了一些调整和补充,提高了部分内容的起点,适当增加了一些近代物理内容,添加了理论联系实际例子,以培养学生运用物理知识分析问题和解决问题的能力.

我们按照全国自然科学名词审定委员会于 1989 年公布的《物理学名词》校核了全书的物理学名词.

本书第三版由北方交通大学余守宪教授主审.余先生提出了许多详细、中肯的修改意见.编者借此表示衷心的感谢.

本书上册和中册由马文蔚改编,下册由马文蔚、柯景凤改编.

目 录

第一章 质点运动学	1
1-1 质点运动的描述	1
一 参考系 质点	1
二 位置矢量 运动方程 位移	2
三 速度	5
四 加速度	8
1-2 加速度为恒矢量时的质点运动.....	10
一 \boldsymbol{a} 为恒矢量时质点的运动方程	10
二 斜抛运动	12
1-3 圆周运动.....	14
一 平面极坐标	14
二 圆周运动的角速度	14
三 圆周运动的切向加速度和法向加速度 角加速度	15
四 匀速率圆周运动和匀变速率圆周运动	18
1-4 相对运动.....	20
一 时间与空间	20
二 相对运动	21
问题.....	24
习题.....	25
第二章 牛顿定律	30
2-1 牛顿定律.....	30
一 牛顿第一定律	30
二 牛顿第二定律	31
三 牛顿第三定律	33
2-2 物理量的单位和量纲.....	33
2-3 几种常见的力.....	34
一 万有引力	34
二 弹性力	36
三 摩擦力	38
2-4 惯性参考系 力学相对性原理.....	41
一 惯性参考系	41
二 力学相对性原理	42

2 目 录

2-5 牛顿定律的应用举例	43
2-6 非惯性系 惯性力	50
问题	53
习题	54
第三章 动量守恒定律和能量守恒定律	58
3-1 质点和质点系的动量定理	58
一 冲量 质点的动量定理	58
二 质点系的动量定理	59
3-2 动量守恒定律	63
3-3 系统内质量移动问题	65
3-4 动能定理	69
一 功	69
二 质点的动能定理	72
3-5 保守力与非保守力 势能	74
一 万有引力、重力、弹性力作功的特点	74
二 保守力与非保守力 保守力作功的数学表达式	77
三 势能	79
四 势能曲线	80
3-6 功能原理 机械能守恒定律	81
一 质点系的动能定理	81
二 质点系的功能原理	82
三 机械能守恒定律	83
四 宇宙速度	86
3-7 完全弹性碰撞 完全非弹性碰撞	91
3-8 能量守恒定律	94
3-9 质心 质心运动定律	95
一 质心	95
二 质心运动定律	98
问题	100
习题	102
第四章 刚体的转动	108
4-1 刚体的定轴转动	108
一 刚体转动的角速度和角加速度	109
二 匀变速转动公式	111
三 角量与线量的关系	112
4-2 力矩 转动定律 转动惯量	114
一 力矩	114
二 转动定律	118

三 转动惯量	119
四 平行轴定理	122
4-3 角动量 角动量守恒定律	125
一 质点的角动量定理和角动量守恒定律	126
二 刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律	131
4-4 力矩做功 刚体绕定轴转动的动能定理	135
一 力矩做功	135
二 力矩的功率	136
三 转动动能	136
四 刚体绕定轴转动的动能定理	137
4-5 刚体的平面平行运动	139
4-6 经典力学的成就和局限性	142
一 经典力学只适用于处理物体的低速运动问题,而不能用于处理高速运动问题	142
二 确定性与随机性	146
三 能量的连续性与能量量子化	147
问题	148
习题	149
* 第五章 万有引力场	156
5-1 开普勒定律	157
5-2 万有引力定律	158
5-3 引力场 引力势能	161
一 引力场	161
二 引力场强度	161
三 引力势能 引力势	162
四 引力与引力势能的关系	163
5-4 物体间的引力势能和引力	164
一 匀质球壳与质点间的引力	164
二 匀质球体间的引力	166
三 匀质球体对球内质点的引力和引力势能	167
四 质点在地球表面附近的重力势能	168
5-5 行星的椭圆轨道和面积定律的论证	170
一 椭圆轨道的论证	170
二 面积定律的论证	172
问题	173
习题	174
第六章 热力学基础	177
6-1 气体物态参量 平衡态 理想气体物态方程	177
一 气体的物态参量	177

4 目 录

二 p, V, T 的单位	178
三 平衡态	178
四 理想气体物态方程	179
6-2 准静态过程 功 热量	180
一 准静态过程	180
二 功	181
三 热量	182
6-3 内能 热力学第一定律	183
一 内能	183
二 热力学第一定律	184
6-4 理想气体的等体过程和等压过程 摩尔热容	185
一 等体过程 定体摩尔热容	185
二 等压过程 定压摩尔热容	187
三 比热容	188
6-5 理想气体的等温过程和绝热过程	189
一 等温过程	189
二 绝热过程	190
三 绝热线和等温线	192
四 多方过程	195
6-6 循环过程 卡诺循环	196
一 循环过程	196
二 热机和致冷机	198
三 卡诺循环	200
6-7 热力学第二定律的表述 卡诺定理	204
一 热力学第二定律的两种表述	204
二 可逆过程与不可逆过程	206
三 卡诺定理	208
四 能量品质	210
6-8 熵 熵增加原理	210
一 熵	210
二 熵变的计算	213
三 熵增加原理	215
四 熵增加原理与热力学第二定律	216
问题	218
习题	219
第七章 气体动理论	226
7-1 物质的微观模型 统计规律性	226
一 分子的数密度和线度	226

二 分子力	227
三 分子热运动的无序性及统计规律性	227
7-2 理想气体的压强公式	229
一 理想气体的微观模型	229
二 理想气体的压强公式	230
7-3 理想气体分子的平均平动动能与温度的关系	232
7-4 能量均分定理 理想气体内能	234
一 自由度	234
二 能量均分定理	237
三 理想气体的内能和摩尔热容	237
四 固体热容	240
7-5 麦克斯韦气体分子速率分布律	241
一 测定气体分子速率分布的实验	242
二 麦克斯韦气体分子速率分布定律	244
三 三种统计速率	245
7-6 玻耳兹曼能量分布律 等温气压公式	248
一 玻耳兹曼能量分布律	248
二 重力场中等温气压公式	251
7-7 分子平均碰撞次数和平均自由程	251
7-8 气体的迁移现象	254
一 粘滞现象	254
二 热传导现象	256
三 扩散现象	257
四 三种迁移系数	258
7-9 实际气体的范德瓦耳斯方程	259
7-10 热力学第二定律的统计意义	262
一 熵与无序	262
二 无序度与微观状态数	263
三 熵与热力学概率 玻耳兹曼关系式	264
四 自组织现象	266
问题	267
习题	268
附录一 矢量	271
附录二 一些基本物理常量	283
附录三 我国法定计量单位和国际单位制(SI)单位	284
附录四 空气、水、地球、太阳系的一些常用数据	287
习题答案	288
索引	295

第一章 质点运动学

物理学是研究物质运动中最普遍、最基本运动形式的基本规律的一门学科,这些运动形式包括机械运动、分子热运动、电磁运动、原子和原子核运动以及其它微观粒子运动等.机械运动是这些运动中最简单、最常见的运动形式,其基本形式有平动和转动.物体在平动过程中,若物体各点的位置没有相对变化,那么各点所移动的路径完全相同,可用物体上任一点的运动来代表整个物体的运动,从而可研究物体的位置随时间而改变的情况.在力学中,这部分内容称之为质点运动学.

本章主要内容为:位置矢量、位移、速度和加速度、质点的运动方程、切向加速度和法向加速度、相对运动等.

1-1 质点运动的描述

一 参考系 质点

1 参考系

在自然界中所有的物体都在不停地运动,绝对静止不动的物体是没有的.在观察一个物体的位置及位置的变化时,总要选取其他物体作为标准,选取的标准物不同,对物体运动情况的描述也就不同.这就是运动描述的相对性.

为描述物体的运动而选的标准物叫做参考系.不同的参考系对同一物体运动情况的描述是不同的.因此,在讲述物体运动情况时,必须指明是对什么参考系而言的.参考系的选择是任意的.在讨论地面上物体的运动时,通常选地球作为参考系.

2 质点

物体都有大小和形状,运动方式又都各不相同.例如,在太阳系中,行星除绕自身的轴线自转外,还绕太阳公转;从枪口射出的子弹,它在空中向前飞行的同时,还绕自身的轴转动;有些双原子分子,除了分子的平动、转动外,分子内各个原子还在振动.这些事实都说明,物体的运动情况是十分复杂的.物体的大小、形状、质量也都是千差万别的,下面列出了某些物体质量和长度的数量级:

	质量 m/kg		长度 l/m
电子质量	10^{-30}	质子核的半径	10^{-15}
质子质量	10^{-27}	原子的半径	10^{-10}
血红蛋白质量	10^{-22}	病毒的线度	10^{-7}
流感病毒质量	10^{-19}	阿米巴变形虫的线度	10^{-4}
阿米巴变形虫质量	10^{-8}	人的身长	10^0
雨滴质量	10^{-6}	珠穆朗玛峰的高度	10^4
人的质量	10^2	地球半径	10^7
土星 5 号火箭质量	10^6	太阳半径	10^9
金字塔质量	10^{10}	太阳系半径	10^{13}
地球质量	10^{24}	地球与最近恒星的距离	10^{16}
太阳质量	10^{30}	银河系的尺度	10^{21}
银河系质量	10^{41}		

但是,如果我们研究某一物体的运动,而可以忽略其大小和形状,或者可以只考虑其平动,那么,我们就可把物体当作是一个有一定质量的点,这样的点通常叫做质点。

质点是经过科学抽象而形成的物理模型.把物体当作质点是有条件的、相对的,而不是无条件的、绝对的,因而对具体情况要作具体分析.例如研究地球绕太阳公转时,由于地球至太阳的平均距离约为地球半径的 10^4 倍,故地球上各点相对于太阳的运动可以看作是相同的,所以在研究地球公转时可以把地球当作质点.但是,在研究地球上物体的运动情况时,就不能再把地球当作质点处理了。

应当指出,把物体视为质点这种抽象的研究方法,在实践上和理论上都是有重要意义的.当我们所研究的运动物体不能视为质点时,可把整个物体看成是由许多质点所组成,弄清这些质点的运动,就可以弄清楚整个物体的运动.所以,研究质点的运动是研究物体运动的基础。

在本书有关力学的各章中,除刚体一章外,都是把物体当作质点来处理的。

二 位置矢量 运动方程 位移

1 位置矢量

上面已经指出,描述物体的运动必须选定参考系.在参考系选定以后,为定量地描述质点的位置和位置随时间的变化,须在参考系上选择一个坐标系.坐标

系有直角坐标系、极坐标系和自然坐标系^①等.在如图 1-1 所示的直角坐标系中,在时刻 t ,质点 P 在坐标系里的位置可用位置矢量 $\mathbf{r}(t)$ 来表示.位置矢量简称位矢,它是一个有向线段,其始端位于坐标系的原点 O ,末端则与质点 P 在时刻 t 的位置相重合.从图 1-1 中可以看出,位矢 \mathbf{r} 在 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴上的投影(即质点的坐标)分别为 x 、 y 和 z .所以,质点 P 在 $Oxyz$ 的直角坐标系中的位置,既可用位矢 \mathbf{r} 来表示,也可用坐标 x 、 y 和 z 来表示.如取 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 和 \mathbf{k} 分别为沿 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴的单位矢量,那么位矢 \mathbf{r} 亦可写成

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1-1)$$

其值为

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

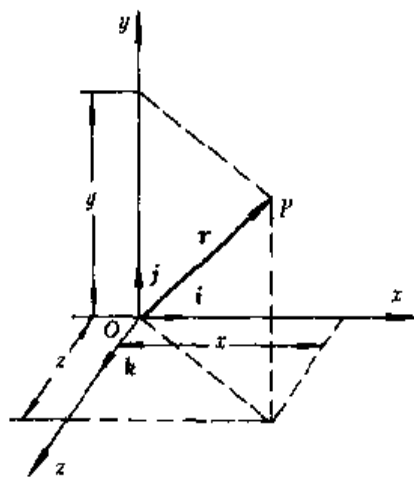


图 1-1 位置矢量

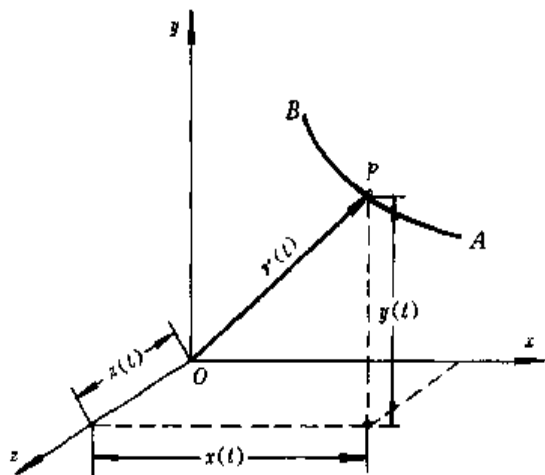


图 1-2 运动方程

位矢 \mathbf{r} 的方向余弦由下式确定:

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\mathbf{r}|} \quad \cos \beta = \frac{y}{|\mathbf{r}|} \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\mathbf{r}|}$$

式中 α 、 β 、 γ 分别是 \mathbf{r} 与 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴之间的夹角.

2 运动方程

当质点运动时,它相对坐标原点 O 的位矢 \mathbf{r} 是随时间而变化的(图 1-2),因此, \mathbf{r} 是时间的函数,即

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (1-2)$$

式(1-2)叫做质点的运动方程;而 $x(t)$ 、 $y(t)$ 和 $z(t)$ 则是运动方程的分量式,从中消去参数 t 便得到了质点运动的轨迹方程,所以它们也是轨迹的参数方程.

^① 有关平面极坐标和自然坐标的知识将在本章第 1-3 节介绍.

应当指出,运动学的重要任务之一就是找出各种具体运动所遵循的运动方程.关于这一点我们将在后面作较详细的论述.

3 位移

在如图 1-3(a)所示的 Oxy 平面直角坐标系中,有一质点沿曲线从时刻 t_1 的点 A 运动到时刻 t_2 的点 B ,质点相对原点 O 的位矢由 r_A 变化到 r_B .显然,在时间间隔 $\Delta t (= t_2 - t_1)$ 内,位矢的长度和方向都发生了变化.我们将由始点 A

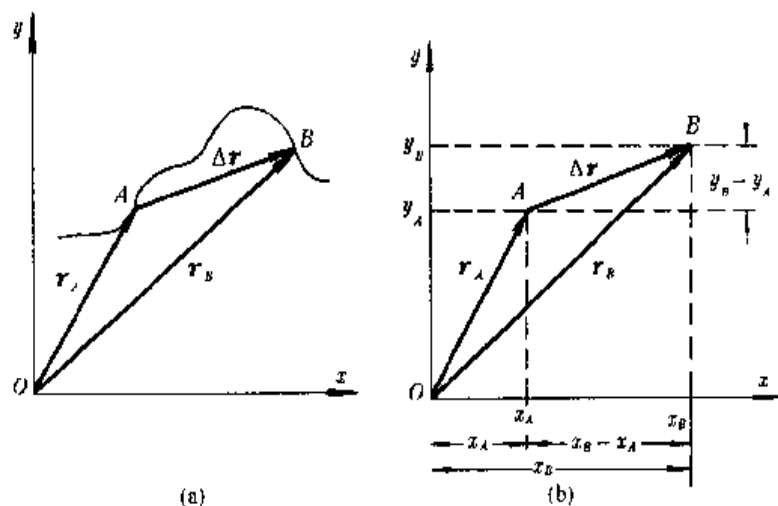


图 1-3 位移矢量

指向终点 B 的有向线段 \overrightarrow{AB} 称为点 A 到点 B 的位移矢量,简称位移.位移 \overrightarrow{AB} 反映了质点位矢的变化.如把 \overrightarrow{AB} 写作 Δr ,则由图 1-3(a)可以看出,点 B 的位矢 r_B 应等于点 A 的位矢 r_A 与 Δr 的矢量和,即

$$r_B = r_A + \Delta r$$

由上式可得,质点从点 A 到点 B 的位移为

$$\Delta r = r_B - r_A \quad (1-3a)$$

由式(1-2),可将 A 、 B 两点的位矢 r_A 与 r_B 分别写成

$$r_A = x_A i + y_A j$$

$$r_B = x_B i + y_B j$$

于是,位移 Δr 亦可写成

$$\Delta r = r_B - r_A = (x_B - x_A)i + (y_B - y_A)j \quad (1-3b)$$

上式表明,当质点在平面上运动时,它的位移等于在 x 轴和 y 轴上的位移的矢量和[图 1-3(b)].

若质点在三维空间中运动,则在直角坐标系 $Oxyz$ 中其位移为

$$\Delta r = (x_B - x_A)i + (y_B - y_A)j + (z_B - z_A)k$$

应当注意,位移是描述质点位置变化的物理量,它只表示位置变化的实际效

果,并非质点所经历的路程.如在图1-3(a)中,曲线所示的路径是质点实际运动的轨迹,轨迹的长度为质点所经历的路程,而位移则是 Δr .当质点经一闭合路径回到原来的起始位置时,其位移为零,而路程则不为零.所以,质点的位移和路程是两个完全不同的概念.只有在 Δt 取得很小的极限情况下,位移的大小 $|\Delta r|$ 才可视为与路程 AB 没有区别.

三 速度

在力学中,若仅知道质点在某时刻的位矢,而不能同时知道该质点是静还是动,是动又动到什么程度,这还不能确定质点的运动状态.只有当质点的位矢和速度同时被确定时,其运动状态才被确知.所以,位矢和速度是描述质点运动状态的两个物理量.

如图1-4所示,一质点在平面上沿轨迹 $CABD$ 作曲线运动.在时刻 t ,它处于点 A ,其位矢为 $r_1(t)$;在时刻 $t + \Delta t$,它处于点 B ,其位矢为 $r_2(t + \Delta t)$.在 Δt 时间内,质点的位移为 $\Delta r = r_2 - r_1$,在时间间隔 Δt 内的平均速度 \bar{v} 为

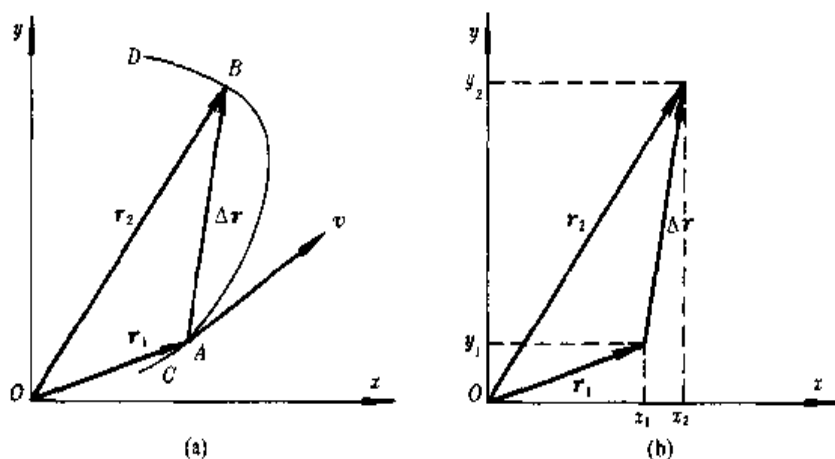


图1-4 平均速度

$$\bar{v} = \frac{r_2 - r_1}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

由于 Δr 是矢量,而 $1/\Delta t$ 是标量,故平均速度 \bar{v} 是矢量,且与 Δr 的方向相同.

考虑到 $\Delta r = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j = \Delta x i + \Delta y j$

平均速度可以写成

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} i + \frac{\Delta y}{\Delta t} j = \bar{v}_x i + \bar{v}_y j$$

其中 \bar{v}_x 和 \bar{v}_y 是平均速度 \bar{v} 在 Ox 轴和 Oy 轴上的分量.当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,平均速度的极限值叫做瞬时速度(简称速度),用 v 表示,有

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} \quad (1-4a)$$

或
$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \boldsymbol{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \boldsymbol{j} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} \quad (1-4b)$$

其中
$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

v_x 和 v_y 是速度 \boldsymbol{v} 在 Ox 轴和 Oy 轴上的分量, 又称速度分量. 显然, 如以 \boldsymbol{v}_x 和 \boldsymbol{v}_y 分别表示速度 \boldsymbol{v} 在 Ox 和 Oy 轴上的分速度 (注意: 它们是分矢量!), 那么有 $\boldsymbol{v}_x = v_x \boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{v}_y = v_y \boldsymbol{j}$, 上式亦可写成

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_x + \boldsymbol{v}_y \quad (1-4c)$$

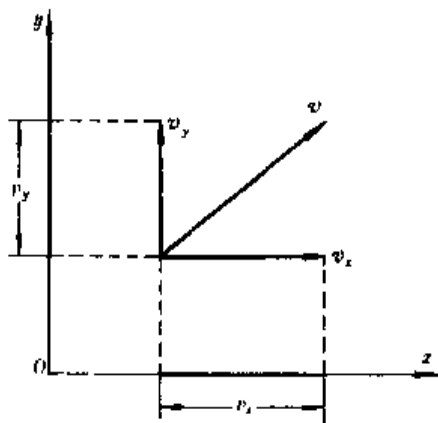


图 1-5 速度 分速度 速度分量

关于速度、分速度和速度分量之间的关系^①, 可用图 1-5 表示出来.

通常把速度 \boldsymbol{v} 的值, 即 $|\boldsymbol{v}|$ 或 v 称为速率^②. 由式 (1-4a) 可见, 速度 \boldsymbol{v} 的方向与 $\Delta \boldsymbol{r}$ 在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限方向一致. 从图 1-4(a) 可见, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta \boldsymbol{r}$ 趋于和轨道相切, 即与点 A 的切线重合, 所以当质点作曲线运动时, 质点在某一点的速度方向就是沿该点曲线的切线方向. 这在日常生活中是经常可以观察到的. 拴在绳子上作圆周运动的小球, 如果绳子突然断开, 小球就会沿切线方向飞出去.

显然, 上述有关速度的讨论很容易推广到质点在三维直角坐标系 $Oxyz$ 中运动的情形, 质点在三维直角坐标系中的速度为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_x + \boldsymbol{v}_y + \boldsymbol{v}_z = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k} \quad (1-5)$$

前面说过, 位矢 \boldsymbol{r} 和速度 \boldsymbol{v} 是描述质点运动状态的两个物理量, 这两个物理量可从运动方程求出, 所以知道了运动方程就能确定质点在任意时刻的运动状态. 因此, 概括说来, 运动学问题有两类: 一是由已知运动方程求运动状态, 另一是由已知运动状态求运动方程. 读者在阅读例题和求解习题的过程中对此应予

① 关于矢量、分矢量和分量 (投影) 的区别, 请阅附录一中“矢量在直角坐标轴上的分矢量和分量”.

② 在不被混淆的情况下, 有时速率也被称作速度.

以注意.

例 1 设质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$, 其中 $x(t) = (1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})t + 2 \text{ m}$, $y(t) = \left(\frac{1}{4} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\right)t^2 + 2 \text{ m}$. (1) 求 $t = 3 \text{ s}$ 时的速度. (2) 作出质点的运动轨迹图.

解 (1) 由题意可得速度分量分别为

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \quad v_y = \left(\frac{1}{2} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\right)t$$

故 $t = 3 \text{ s}$ 时的速度分量为 $v_x = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 和 $v_y = 1.5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. 于是 $t = 3 \text{ s}$ 时, 质点的速度为

$$\boldsymbol{v} = (1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})\boldsymbol{i} + (1.5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})\boldsymbol{j}$$

速度的值为 $v = 1.8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, 速度 \boldsymbol{v} 与 x 轴之间的夹角为

$$\theta = \arctg \frac{1.5}{1} = 56.3^\circ$$

(2) 由已知运动方程 $x = (1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})t + 2 \text{ m}$, $y = \left(\frac{1}{4} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\right)t^2 + 2 \text{ m}$, 消去 t 可得轨迹方程

$$y = \left(\frac{1}{4} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\right)x^2 - x + 3 \text{ m}$$

并可作如图 1-6 所示的质点运动轨迹图.

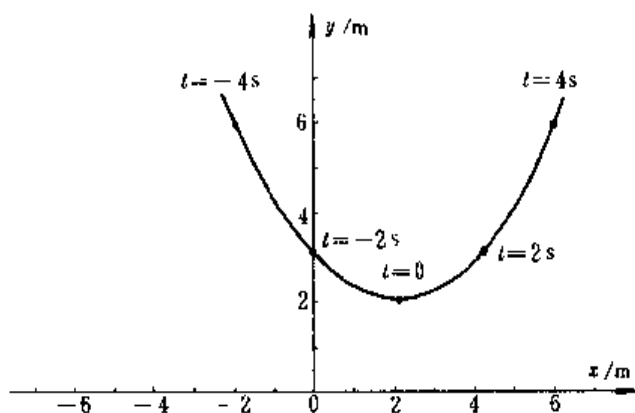


图 1-6

例 2 如图 1-7 所示, A 、 B 两物体由一长为 l 的刚性细杆相连, A 、 B 两物体可在光滑轨道上滑行. 如物体 A 以恒定的速率 v 向左滑行. 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, 物体 B 的速度为多少?

解 按如图 1-7 所选的坐标轴, 物体 A 的速度为

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_x = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} = -v\boldsymbol{i} \quad (1)$$

式中“-”号表示 A 沿 Ox 轴负方向运动, 而物体 B 的速度则为

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_y = \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} \quad (2)$$

由于 $\triangle OAB$ 为一直角三角形, 故有 $x^2 + y^2 = l^2$. 考虑到细杆是刚性的, 其长度 l 为一常量, 但 x 、 y 是时间的函数, 故有

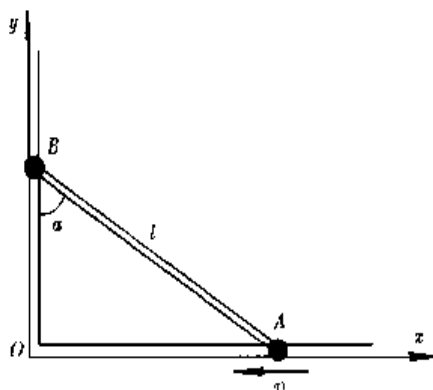


图 1-7

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

可得

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt}$$

于是由式(2), 物体 B 的速度为

$$\mathbf{v}_B = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt} \mathbf{j}$$

因为

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \lg \alpha = \frac{x}{y}$$

所以上式为

$$\mathbf{v}_B = v \lg \alpha \mathbf{j}$$

\mathbf{v}_B 的方向沿 y 轴正向, 因此物体 B 的速度值为

$$v_B = v \lg \alpha$$

当 $\alpha = 60^\circ$ 时,

$$v_B = 1.73 v$$

四 加速度

上面已经指出, 作为描述质点运动状态的一个物理量, 速度是一个矢量, 所以, 无论是速度的数值发生改变, 还是其方向发生改变, 都表示速度发生了变化. 为衡量速度的变化, 我们将从曲线运动出发引出加速度概念.

如图 1-8 所示, 质点在 Oxy 平面内的运动轨迹为一曲线. 设在时刻 t , 质点位于点 A, 其速度为 \mathbf{v}_1 , 在时刻 $t + \Delta t$, 质点位于点 B, 其速度为 \mathbf{v}_2 , 则在时间间隔 Δt 内, 质点的速度增量为 $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, 它在单位时间内的速度增量即平均加速度为

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 平均加速度的极限值叫做瞬时加速度, 用 \mathbf{a} 表示, 有

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1-6a)$$

a 的方向是 $\Delta t \rightarrow 0$ 时 $\Delta \mathbf{v}$ 的极限方向, 而 a 的数值是 $|\Delta \mathbf{v} / \Delta t|$ 的极限值, 即

$$|a| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right|$$

应当注意, 加速度 a 既反映了速度方向的变化, 又反映了速度数值的变化. 所以质点作曲线运动时, 任一时刻质点的加速度方向并不与速度方向相同, 即加速度方向不沿曲线的切线方向. 由图 1-8 中可以看出, 在曲线运动中, 加速度的方向指向曲线的凹侧.

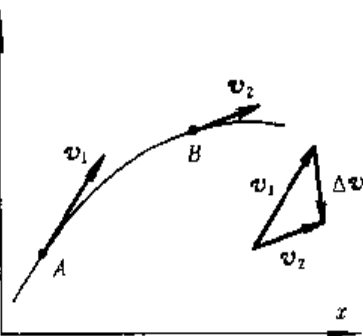


图 1-8 曲线运动的加速度

利用式(1-4b), 式(1-6a)可写成

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt} (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j})$$

即

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} = a_x + a_y \quad (1-6b)$$

其中

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

显然, 上述有关加速度的讨论很容易推广到三维运动的情况. 质点在三维直角坐标系中的加速度为

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (1-7)$$

例 3 有一个球体在某液体中竖直下落, 球体的初速为 $\mathbf{v}_0 = (10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \mathbf{j}$, 它在液体中的加速度为 $\mathbf{a} = (-1.0 \text{ s}^{-1}) v \mathbf{j}$. 问: (1) 经多少时间后可以认为小球已停止运动, (2) 此球体在停止前经历的路程有多长?

解 由题意知, 球体作变加速直线运动, 加速度 \mathbf{a} 的方向与球体的速度 \mathbf{v} 的方向相反. 由加速度的定义, 有

$$a = \frac{dv}{dt} = (-1.0 \text{ s}^{-1}) v$$

得

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = (-1.0 \text{ s}^{-1}) \int_0^t dt$$

有

$$v = v_0 e^{(-1.0 \text{ s}^{-1})t} \quad (1)$$

上式表明, 球体的速率 v 随时间 t 的增长而减小.

又由速度的定义, 有

$$v = \frac{dy}{dt} = v_0 e^{(-1.0 \text{ s}^{-1})t}$$

得

$$\int_0^y dy = v_0 \int_0^t e^{(-1.0 \text{ s}^{-1})t} dt$$

有

$$y = 10 \left[-\frac{1}{1.0} [e^{(-1.0 \text{ s}^{-1})t} - 1] \right] \text{ m} = 10 [1 - e^{(-1.0 \text{ s}^{-1})t}] \text{ m} \quad (2)$$

从题意知道,质点停下来时其速度应当为零,而从式(1)可以看出,要使质点的速度为零,即 $v=0$, 时间 t 需无限长. 从式(2)可知在 $t=\infty$ 时, $y=10\text{ m}$. 这似乎有些不切实际. 为了得出合适的结果, 我们不妨利用式(1), 先试求质点的速率 v 分别达到 $\frac{1}{10}v_0$, $\frac{1}{100}v_0$, $\frac{1}{1000}v_0$ 和 $\frac{1}{10000}v_0$ 时所经历的时间, 然后再利用式(2)求出质点所经历的路程. 我们把依照这个想法所得计算结果列表如下:

v	$v_0/10$	$v_0/100$	$v_0/1000$	$v_0/10000$
t/s	2.3	4.6	6.9	9.2
y/m	8.997 4	9.899 5	9.989 9	9.999 0

从上表可以看出,事实上,在 $t=6.9\text{ s}$ 或 $t=9.2\text{ s}$ 时,球体已几乎不再运动,而所经历的路程已显示出其极限值为 10 m 了. 故本题的答案完全可以写成:小球在运动几乎停止前的 9.2 s 时间内经历了 $y\approx 10\text{ m}$ 的路程. 这种近似处理的方法是很重要的,也是足够准确的.

1-2 加速度为恒矢量时的质点运动

一般说来,质点运动时其加速度常随时间而改变,但在有些情况下,质点的加速度可以视为是恒定的,即其值和方向都不随时间而变. 如质点在地球表面附近运动、电荷在均匀电场中的运动等,都属这种情况.

一 a 为恒矢量时质点的运动方程

有一个具有恒定加速度(a = 恒矢量)的质点,在平面上作曲线运动. 此恒定加速度 a 在 Ox 轴和 Oy 轴上的分矢量 a_x 和 a_y 是一定的. 这就是说, a 在 Ox 轴和 Oy 轴上的分量也是一定的.

设 $t=0$ 时,质点的初速度为 \boldsymbol{v}_0 , 它在坐标轴上的分量为 v_{0x} 和 v_{0y} . 于是,由加速度定义式(1-6a),可得

$$\int_{v_0}^v d\boldsymbol{v} = \int_0^t \boldsymbol{a} dt$$

$$\text{解得} \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t \quad (1-8)$$

由式(1-4b)和式(1-6b)可得 \boldsymbol{v} 在 Ox 轴和 Oy 轴上的分量式:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t \\ v_y &= v_{0y} + a_y t \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

式(1-8)是在加速度恒定的情况下,速度方程的矢量式,式(1-9)是其分量式.

下面我们讨论在加速度恒定的情况下,质点的运动方程.

设在 $t=0$ 时,质点的位矢为 \boldsymbol{r}_0 , 它在坐标轴上的分量为 x_0 和 y_0 . 于是由速

度定义式(1-4a),可得

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$$

再利用式(1-8),有

$$\int_{r_0}^r d\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 \int_0^t dt + \mathbf{a} \int_0^t t dt$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2 \quad (1-10)$$

式(1-10)就是在加速度恒定的情况下,质点作曲线运动时运动方程的矢量式.

利用式(1-3b)、式(1-4b)和式(1-6b)可将上式写成

$$\left[(x - x_0) - \left(v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \right) \right] \mathbf{i} + \left[(y - y_0) - \left(v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \right) \right] \mathbf{j} = 0$$

显然,由于 \mathbf{i} 和 \mathbf{j} 均为单位矢量,故上式成立的条件必须是

$$\begin{cases} x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y - y_0 = v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{cases} \quad (1-11)$$

式(1-11)是在加速度恒定的情况下,质点在平面上作曲线运动时的运动方程的分量式.它与运动方程的矢量式(1-10)是等效的,由图1-9可以看出它们的等效性.不过应当指出,运动方程的矢量式较分量式简明、概括.如约去式(1-11)

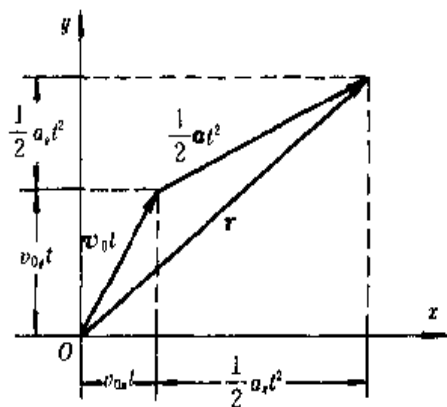
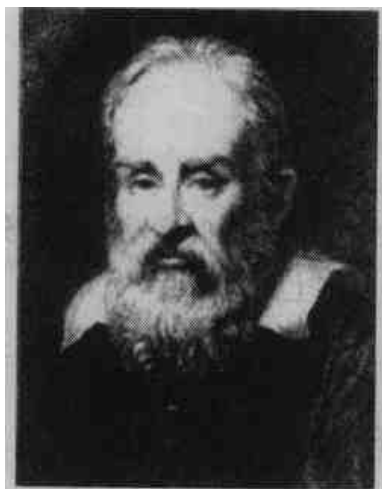


图 1-9 在 \mathbf{a} 为恒矢量时,运动方程的矢量式和分量式是等效的,图中 $\mathbf{r}_0 = 0$

中的 t ,可得 $y(x)$ 函数,这就是质点在平面上运动时的轨迹方程.应当指出,从已知质点的起始运动状态 \mathbf{r}_0 和 \mathbf{v}_0 以及质点的加速度 \mathbf{a} 来求质点的曲线运动方程,是属于前面提到的运动学的第二类问题——即已知运动状态求运动方程的问题.

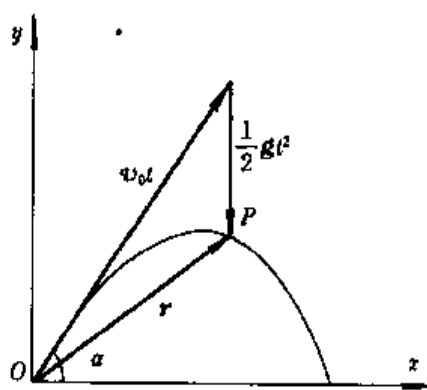
二 斜抛运动

设有一抛体在地球表面附近,以初速 v_0 沿与水平面上 Ox 轴的正向成 α 角



伽利略(Galileo Galilei, 1564—1642),杰出的意大利物理学家和天文学家,实验物理学的先驱者,提出著名的相对性原理、惯性原理、抛体的运动定律、摆振动的等时性等等.伽利略捍卫哥白尼日心学说,《关于两门新科学的对话和数学证明对话集》一书,总结了他最成熟的科学思想以及在物理学和天文学方面的研究成果.

抛出,取如图 1-10 所示的平面直角坐标 Oxy ,则其加速度 $\mathbf{a} = \mathbf{a}_y = \mathbf{g} = -g\mathbf{j}$,



即 $a_x = 0$. 由于略去空气的阻力,则抛体将以恒定加速度 $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ 作斜抛运动. 设在 $t=0$ 时,抛体位于原点 O ,其位矢 $\mathbf{r}_0 = 0$. 于是由曲线运动方程式(1-10),有

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 \quad (1-12a)$$

上式的物理意义可以这样来理解:从图 1-10 可以看出,在时间 t 内,抛体从原点 O 到点 P 的位

移 \mathbf{r} 是 $\mathbf{v}_0 t$ 与 $\frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$ 这两个位移矢量之和. 显

然,我们是把斜抛运动看成由沿着与 Ox 轴成 α 角的匀速直线运动和沿 Oy 轴的匀加速直线运动这两个运动叠加而成,而且这两个运动又是互不影响的. 这就是通常所说的运动叠加原理(或运动独立性原理)的一个例子.

下面我们简略讨论一下斜抛运动的轨迹方程和最大射程.

按图 1-10 所选定的坐标轴,以及所设条件,在 $t=0$ 时,有

$$\begin{cases} x_0 = 0, & v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ y_0 = 0, & v_{0y} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

面抛体的加速度为

$$a_x = 0, \quad a_y = -g$$

于是,有

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \\ y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad (1-12b)$$

消去方程中的 t , 可得

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad (1-12c)$$

这就是斜抛物体的轨迹方程. 它表明在略去空气阻力的情况下, 抛体在空间所经历的路径为一抛物线(如图 1-11).

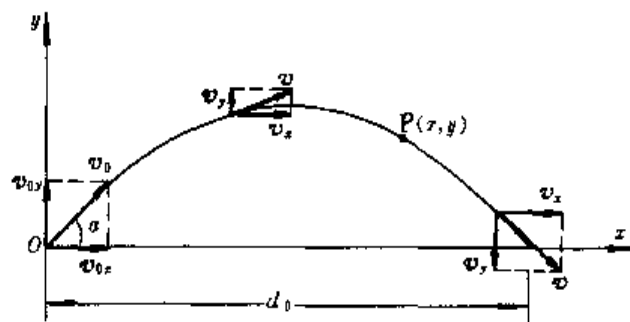


图 1-11 斜抛运动的轨迹

从图 1-11 可以看出, 当抛体落回水平面上时, $y=0$. 若把抛体落地点与原点 O 间的距离 d_0 称之为射程, 那么由式(1-12b)可得

$$d_0 = \frac{2 v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

从上式可看出, 在给定初速 v_0 的情况下, 射程 d_0 是抛射角 α 的函数. 由最大射程的条件, 有

$$\frac{dd_0}{d\alpha} = \frac{2 v_0^2}{g} \cos 2\alpha = 0$$

得 $2\alpha = \pi/2$ 或 $\alpha = \pi/4$

这就是说, 当 $\alpha = \pi/4$ 时, 抛体的射程最大^①, 其值为

$$d_{0m} = \frac{v_0^2}{g}$$

在上述的讨论中, 忽略了空气阻力. 若空气阻力较大, 则物体经过的路径为一不对称的曲线^②, 实际射程 d 往往比真空中射程 d_0 小很多(图 1-12). 表 1-1 给出了弹丸在真空中和在空气中射程的情况.

① 伽利略最早对斜抛运动作了论述, 指出: 在略去空气阻力的情况下, 当抛射角为 45° 时, 抛体抛得最远.

② 关于空气阻力对抛体运动轨迹的影响将在第二章第 2-5 节的例 4 中讨论.

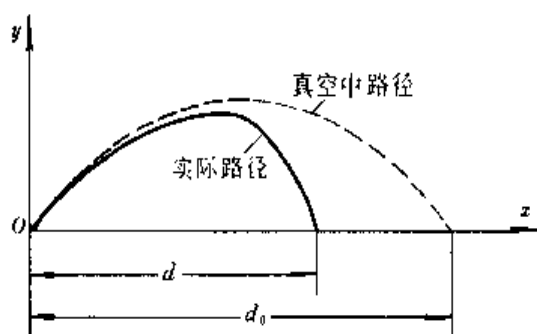


图 1-12 斜抛运动的实际路径

表 1-1 在真空和空气中弹丸射程的比较

	初速 $v_0/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	射角 α	真空射程 d_0/m	实际射程 d/m
7.6 mm 枪弹	800	15°	32 700	3 970
85 mm 炮弹	700	45°	50 000	16 000
82 mm 迫击炮弹	60	45°	367	350

利用斜抛物体的运动方程式(1-12b),经适当修正,可粗略估算出洲际导弹的射程^①.

1-3 圆周运动

前面以抛体运动为例讨论了恒定加速度下的质点运动.这一节讨论另一种曲线运动——圆周运动.

一 平面极坐标

设有一质点在如图 1-13 所示的 Oxy 平面内运动,某时刻它位于点 A .由坐标原点 O 到点 A 的有向线段 r 称为径矢, r 与 Ox 轴之间的夹角为 θ .于是,质点在点 A 的位置可由 (r, θ) 来确定.这种以 (r, θ) 为坐标的参考系称为平面极坐标系.而在平面直角坐标系内,点 A 的坐标则为 (x, y) .这两个坐标系的坐标之间的变换关系即为 $x = r \cos \theta$ 和 $y = r \sin \theta$.

二 圆周运动的角速度

如图 1-14 所示,一质点在 Oxy 平面上作半径为 r 的圆周运动,某时刻它

^① 参阅马文蔚等主编的《物理学原理在工程技术中的应用》之“洲际导弹的射程”(高等教育出版社出版).

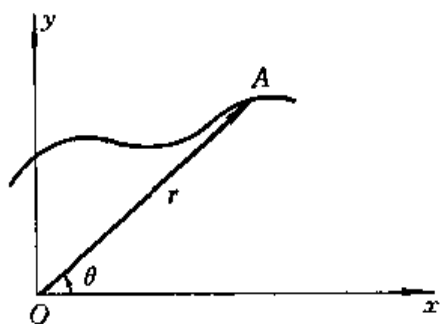


图 1-13 平面极坐标

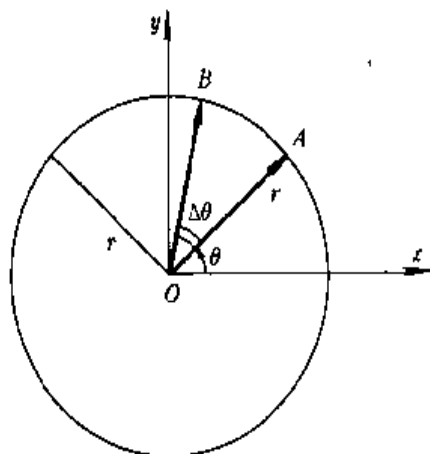


图 1-14 质点在平面上作圆周运动

位于点 A, 且在平面极坐标系中的径矢为 r . 当质点在圆周上运动时, 径矢 r 与 Ox 轴之间的夹角 θ 随时间而改变, 即 θ 是时间的函数 $\theta(t)$.

我们定义: 角坐标 $\theta(t)$ 随时间的变化率即 $d\theta/dt$, 叫做角速度, 用符号 ω 表示, 则有

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (1-13)$$

通常用弧度(rad)来量度 θ , 所以角速度 ω 的单位名称为弧度每秒, 符号为 $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

如果在时间 Δt 内, 质点由图上的点 A 运动到点 B, 所经过的圆弧则为 $\Delta s = r\Delta\theta$, $\Delta\theta$ 为时间 Δt 内径矢 r 所转过的角度. 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta s/\Delta t$ 的极限值为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

即

$$\frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$

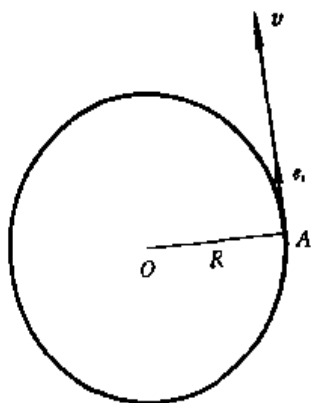
而 ds/dt 为质点在点 A 的速率, 用 v 表示, $d\theta/dt$ 则为质点在点 A 的角速度 ω , 故有

$$v = r\omega \quad (1-14)$$

式(1-14)是质点作圆周运动时速率和角速度之间的瞬时关系.

三 圆周运动的切向加速度和法向加速度 角加速度

如图 1-15 所示, 质点在圆周上点 A 的速度为 \mathbf{v} , 它的数值为 $|\mathbf{v}| = v$, 方向与点 A 处圆的切线方向相同. 为了便于表示速度 \mathbf{v} 的方向, 我们在点 A 处圆的切线方向上取一单位矢量 \mathbf{e}_t (如图 1-15), \mathbf{e}_t 叫做切向单位矢量, 于是点 A 的速度 \mathbf{v} 可写为

图 1-15 切向单位矢量 e_t

$$\boldsymbol{v} = v e_t \quad (1-15)$$

式中 v 为速度 \boldsymbol{v} 的值, e_t 则代表速度 \boldsymbol{v} 的方向.

一般来说, 质点作圆周运动时, 不仅速度的方向要改变, 而且速度的值也会改变, 即质点作变速率圆周运动. 由式 (1-15) 可得质点作变速率圆周运动时, 它在圆周上任意点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} e_t + v \frac{de_t}{dt} \quad (1-16)$$

从上式可以看出, 加速度 \boldsymbol{a} 具有两个分矢量, 式中

第一项 $\frac{dv}{dt} e_t$, 是由于速度大小变化而引起的, 其方向为 e_t 的方向, 即与速度 \boldsymbol{v} 的方向相同. 因此, 此项加速度分矢量称为切向加速度, 用 a_t 表示, 有

$$a_t = \frac{dv}{dt} e_t, \quad |a_t| = \frac{dv}{dt} \quad (1-17)$$

另外, 由式 (1-14), 可得

$$\frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$$

式中 $d\omega/dt$ 为角速度随时间的变化率, 叫做角加速度, 用符号 α 表示, 有

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1-18)$$

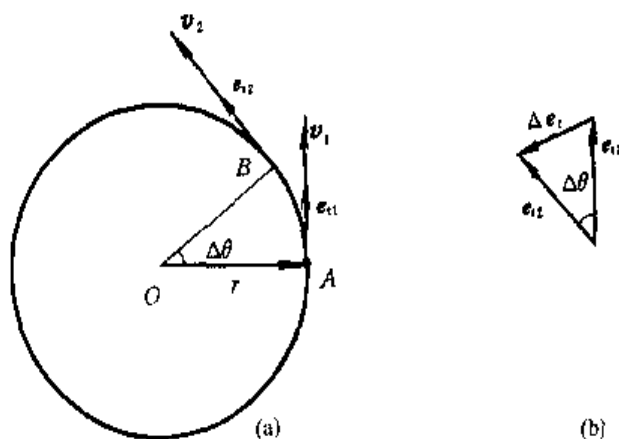
角加速度 α 的单位名称是弧度每二次方秒, 符号为 $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$. 把上面两式代入式 (1-17), 可得

$$a_t = r \alpha e_t \quad (1-19)$$

上式是质点作变速率圆周运动时, 切向加速度与角加速度之间的瞬时关系.

至于式 (1-16) 中的第二项 de_t/dt , 则表示切向单位矢量随时间的变化. 这一点从图 1-16(a) 中可以看出. 设在时刻 t , 质点位于圆周上点 A, 其速度为 \boldsymbol{v}_1 , 切向单位矢量为 e_{t1} ; 在时刻 $t + \Delta t$, 质点位于点 B, 速度为 \boldsymbol{v}_2 , 切向单位矢量为 e_{t2} . 在时间间隔 Δt 内, 径矢 r 转过的角度为 $\Delta\theta$, 速度增量为 $\Delta\boldsymbol{v}$. 切向单位矢量的增量则为 $\Delta e_t = e_{t2} - e_{t1}$. 由于切向单位矢量的值为 1, 即 $|e_{t1}| = |e_{t2}| = 1$, 因而, 从图 1-16(b) 可以知道 $|\Delta e_t| = \Delta\theta \times 1 = \Delta\theta$. 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta\theta$ 亦趋于零, 这时 Δe_t 的方向趋于与 e_{t1} 垂直, 即趋于与 \boldsymbol{v}_1 垂直, 并且趋于指向圆心. 如果我们在沿径矢而指向圆心的法线方向上取单位矢量为 e_n , 这个单位矢量又称法向单位矢量 e_n (如图 1-17), 那么, 在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta e_t/\Delta t$ 的极限值为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta e_t}{\Delta t} = \frac{de_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt} e_n$$

图 1-16 切向单位矢量随时间的变化率 de_t/dt

这样,式(1-16)中第二项可以写成

$$v \frac{de_t}{dt} = v \frac{d\theta}{dt} e_n$$

由于这个加速度的方向是垂直于切向的,故叫做法向加速度,用 a_n 表示,有

$$a_n = v \frac{d\theta}{dt} e_n \quad (1-20a)$$

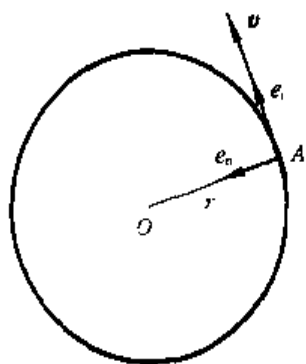


图 1-17 法向单位矢量 e_n
与切向单位矢量 e_t 相垂直

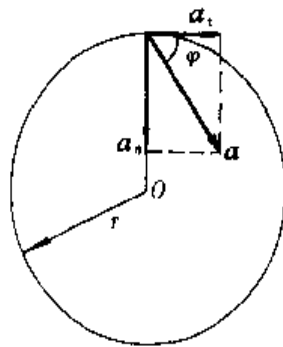


图 1-18 变速圆周运动的加速度

考虑到 $\omega = d\theta/dt$, $v = r\omega$, 故上式为

$$a_n = r\omega^2 e_n = \frac{v^2}{r} e_n, \quad |a_n| = \frac{v^2}{r} \quad (1-20b)$$

由式(1-17)和式(1-20),可将质点作变速圆周运动时的加速度 a 的表示式(1-16)写成

$$a = a_t + a_n = \frac{dv}{dt} e_t + \frac{v^2}{r} e_n \quad (1-21a)$$

或

$$a = rae_t + r\omega^2 e_n \quad (1-21b)$$

其中切向加速度 a_t 是由于速度数值的变化而引起的,法向加速度 a_n 则是由于速度方向的变化而引起的.

在变速圆周运动中,由于速度的方向和大小都在变化,所以加速度 a 的方向不再指向圆心(图 1-18),其值和方向为

$$a = (a_n^2 + a_t^2)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{a_n}{a_t}$$

上述结果虽然是从变速圆周运动中得出的,但对于一般的曲线运动,式(1-17)、(1-20)仍然适用.此时可以把一段足够小的曲线看成是一段圆弧.这样包含这段圆弧的圆周就被称为曲线在给定点的曲率圆,从而可用曲率半径 ρ 来替代圆的半径 r .

还必须指出一点,在图 1-17 中,这种以动点 A 为原点,以切向单位矢量 e_t 和法向单位矢量 e_n 为垂直轴的二维坐标系亦称为自然坐标系.在讨论圆运动及曲线运动时,我们经常采用这种坐标系.可参见第二章第 2-5 节例 3 和例 4.

四 匀速率圆周运动和匀变速率圆周运动

1 匀速率圆周运动

质点作匀速率圆周运动时,其速率 v 和角速度 ω 都为常量,故角加速度 $\alpha = 0$,切向加速度 $a_t = 0$,而法向加速度的值 $a_n = r\omega^2 = v^2/r$ 亦为常量.于是匀速率圆周运动的加速度为

$$a = a_n = r\omega^2 e_n$$

由式(1-13)可得

$$d\theta = \omega dt$$

如取 $t = 0$ 时, $\theta = \theta_0$, 则有

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

2 匀变速率圆周运动

质点作匀变速率圆周运动时,其角加速度 $\alpha = \text{常量}$,故圆周上某点的切向加速度的值为 $a_t = r\alpha = \text{常量}$,而法向加速度的值仍为 $a_n = r\omega^2 = v^2/r$,但不为常量.于是匀变速率圆周运动的加速度为

$$a = a_t + a_n = r\alpha e_t + r\omega^2 e_n \quad (1-22)$$

由于匀变速率圆周运动的角加速度 $\alpha = \text{常量}$,如 $t = 0$ 时, $\theta = \theta_0$, $\omega = \omega_0$, 那么由式(1-18)和式(1-13)可得

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$

这三个公式与在中学物理里已学过的匀变速直线运动的公式在形式上是相似的.

例 如图 1-19 所示,一超音速歼击机在高空点 A 时的水平速率为 $1\,940\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$,沿近

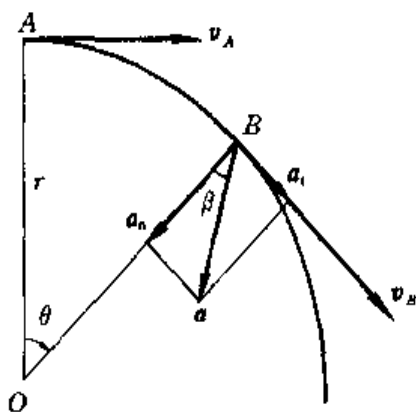


图 1-19

似于圆弧的曲线俯冲到点 B,其速率为 $2\,192\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$,所经历的时间为 3 s.设圆弧 \widehat{AB} 的半径约为 3.5 km,且飞机从 A 到 B 的俯冲过程可视为匀变速率圆周运动.若不计重力加速度的影响,求:(1) 飞机在点 B 的加速度;(2) 飞机由点 A 到达点 B 所经历的路程.

解 (1) 由于飞机在 AB 之间作匀变速率圆周运动,所以 dv/dt 和角加速度 α 均为常量.而切向加速度 a_t 的值为

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

$$\text{有} \quad \int_{v_A}^{v_B} dv = \int_0^t a_t dt = a_t \int_0^t dt$$

$$\text{得} \quad a_t = \frac{v_B - v_A}{t}$$

由题意知, $v_A = 1\,940\text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = 539\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $v_B = 2\,192\text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = 609\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $t = 3\text{ s}$.代入上式,得飞机在点 B 的切向加速度为

$$a_t = 23.3\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

而在点 B 时的法向加速度为

$$a_n = \frac{v_B^2}{r} = \frac{609^2}{3\,500}\text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = 106\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

故飞机在点 B 时的加速度的值为

$$a = (a_t^2 + a_n^2)^{1/2} = 109\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

而 a 与 a_n 之间夹角 β 为

$$\beta = \arctg \frac{a_t}{a_n} = 12.4^\circ$$

(2) 在时间 t 内,径矢 r 所转过的角度 θ 为

$$\theta = \omega_A t + \frac{1}{2} a t^2$$

其中 ω_A 是飞机在点 A 的角速度. 故在此时间内, 飞机经过的路程为

$$s = r\theta = r\omega_A t + \frac{1}{2} r a t^2 = v_A t + \frac{1}{2} a t^2$$

代入已知数据, 有

$$s = (539 \times 3 + \frac{1}{2} \times 23.3 \times 3^2) \text{ m} = 1\,722 \text{ m}$$

1-4 相对运动

一 时间与空间

在图 1-20 中, 小车以较低的速度 v 沿水平轨道先后通过点 A 和点 B. 如站

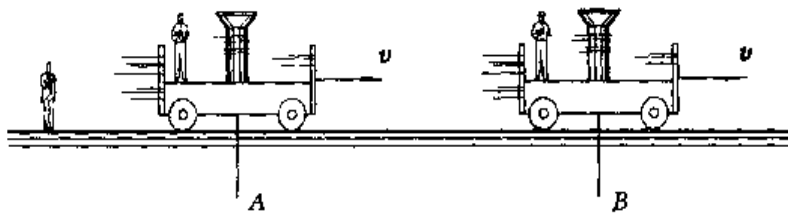


图 1-20 在低速运动时, 时间和空间的测量是绝对的

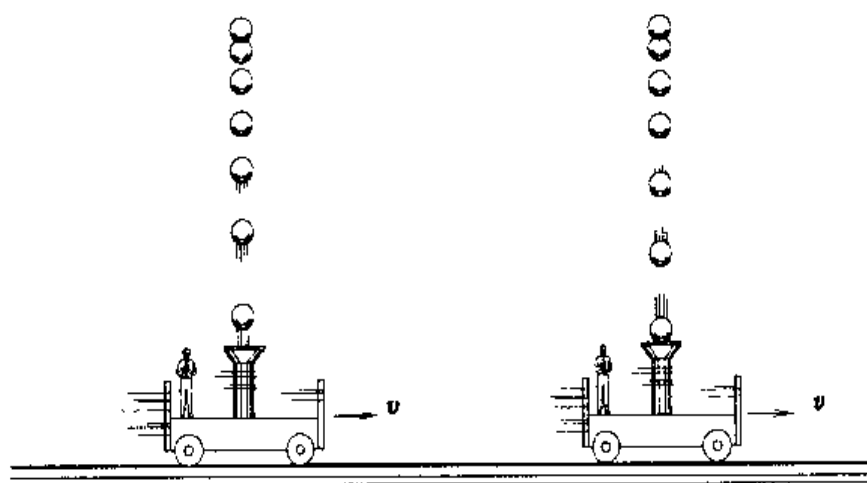
在地面的人测得通过点 A 和点 B 的时间为 $\Delta t = t_B - t_A$; 而站在车上的人测得通过 A、B 两点的时间为 $\Delta t' = t'_B - t'_A$, 且两者是相等的, 即 $\Delta t = \Delta t'$. 也就是说, 在两个作相对直线运动的参考系 (地面和小车) 中, 时间的测量是绝对的, 与参考系无关.

同样, 在地面上的人和车上的人测得 A、B 两点之间的距离相等, 都等于 \overline{AB} . 这也就是说, 两个作相对运动的参考系中, 长度的测量也是绝对的, 与参考系无关. 在人们的日常生活和一般科技活动中, 上述关于时间和空间量度的结论是毋庸置疑的. 时间和长度的绝对性是经典力学或牛顿力学的基础. 以后我们将介绍, 当相对运动的速度接近于光速时, 时间和空间的测量将依赖于相对运动的速度^①. 只是由于牛顿力学所涉及物体的运动速度远小于光速, 即 $v \ll c$, 所以在牛顿力学范围内, 时间与空间的测量才可以视为与参考系的选取无关. 然而, 在牛顿力学范围内, 运动质点的位移、速度和运动轨迹则与参考系的选择有关. 本节将着重讨论这方面的问题.

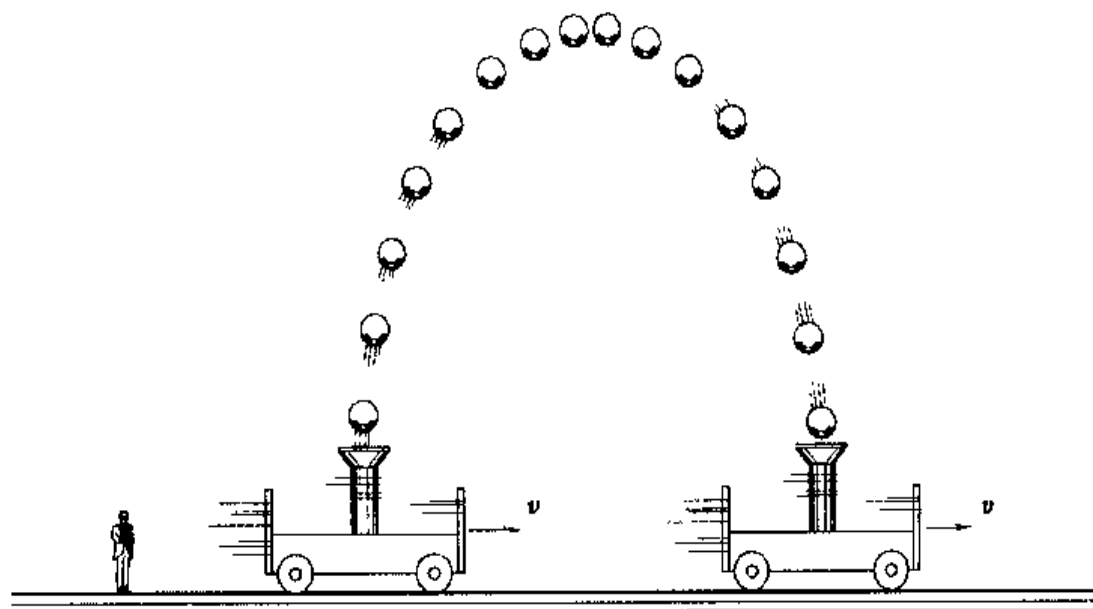
^① 详见本书第十八章第 18-4 节时间延缓和长度收缩.

二 相对运动

质点的运动轨迹依赖于观察者(即参考系)的例子是很多的.例如一个人站在作匀速直线运动的车上,竖直向上抛出一块石子,车上的观察者看到石子竖直上升并竖直下落[图 1-21(a)],但是,站在地面上的另一人却看到石子的运动



(a) 车作匀速直线运动时,车上的人观察到石子作直线运动



(b) 车作匀速直线运动时,地面上的人观察到石子作抛物线运动

图 1-21 物体运动的轨迹依赖于观察者所处的参考系

轨迹为一抛物线[图 1-21(b)].从这个例子可以看出,石子的运动情况依赖于参考系.这个例子也就是第 1-1 节中所述的运动描述的相对性.

设有两个参考系,一个为S系(即 Oxy 坐标系),另一个为S'系(即 $O'x'y'$ 坐标系).开始时(即 $t=0$),这两个参考系相重合.有一个质点在S系中的位置以 P 表示,而在S'系中的位置以 P' 表示.显然,在 $t=0$ 时,点 P 与点 P' 共居于一点[图 1-22(a)].

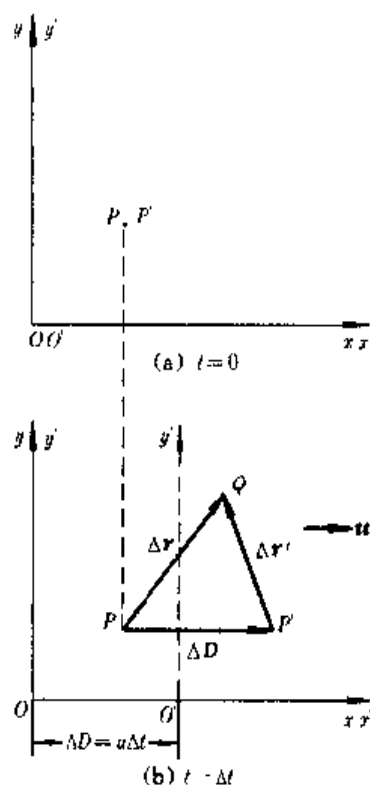


图 1-22 质点在相对作匀速直线运动的两个坐标系中的位移

如果在 Δt 时间内, S'系沿 x 轴以恒定的速度 u 相对 S 系运动的同时, 质点运动到点 Q . 在这段时间内, S'系沿 x 轴相对 S 系的位移为 $\Delta D = u\Delta t$. 在同样的时间里, 在 S 系中, 质点从点 P 运动到点 Q , 其位移为 Δr ; 而在 S'系中, 质点则由点 P' 运动到点 Q , 其位移为 $\Delta r'$ [图 1-22(b)]. 在相等的时间内, 显然 Δr 和 $\Delta r'$ 是不相等的. 因为在图 1-22(b) 中可以看出, 从 S 系看来, 质点犹如同时参与两种运动: 质点除随 S'系以速度 u 沿 x 轴运动外, 还要从点 P' 运动到点 Q . 质点在 S 系中的位移矢量 Δr 应等于 S'系相对 S 系的位移矢量 ΔD 与质点在 S'系中的位移矢量 $\Delta r'$ 之和, 即

$$\Delta r = \Delta r' + \Delta D$$

或

$$\Delta r = \Delta r' + u\Delta t \quad (1-24)$$

上式表明, 质点的位移矢量取决于参考系的选择. 若 S'系相对 S 系处于静止状态(即 $u=0$), 那么, 质点在两参考系中的位移矢量应相等, 即 $\Delta r = \Delta r'$.

由位移的相对性可得出速度的相对性. 用时间 Δt 除以式(1-24), 有

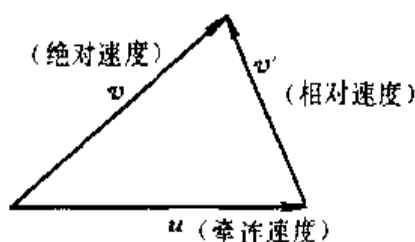


图 1-23 速度的相对性

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}'}{\Delta t} + \mathbf{u}$$

取 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限值,得

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \mathbf{u}$$

即

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u} \quad (1-25)$$

式中 \mathbf{u} 为 S' 系相对 S 系的速度, \mathbf{v}' 为质点相对 S' 系的速度, \mathbf{v} 为质点相对 S 系的速度. 上式的物理意义是: 质点相对 S 系的速度等于它相对 S' 系的速度与 S' 系相对 S 系的速度之矢量和(图 1-23).

习惯上,常把视为静止的参考系 S 作为基本参考系,把相对 S 系运动的参考系 S' 作为运动参考系. 这样,质点相对基本参考系 S 的速度 \mathbf{v} 就叫做绝对速度,质点相对运动参考系 S' 的速度 \mathbf{v}' 叫做相对速度,而运动参考系 S' 相对基本参考系 S 的速度 \mathbf{u} 叫做牵连速度. 于是式(1-24)可理解为: 质点相对基本参考系的绝对速度 \mathbf{v} , 等于运动参考系相对基本参考系的牵连速度 \mathbf{u} 与质点相对运动参考系的相对速度 \mathbf{v}' 之和. 例如,在匀速前进的平板车上,一人在车上行走. 取地面为基本参考系,车为运动参考系,若车相对地的速度(即牵连速度)为 \mathbf{v}_{RG} , 人对车的速度(即相对速度)为 \mathbf{v}_{MT} , 那么人对地的速度(即绝对速度) \mathbf{v}_{MG} 为

$$\mathbf{v}_{MG} = \mathbf{v}_{MT} + \mathbf{v}_{RG}$$

式中 M, G 和 T 分别代表人、地和车.

式(1-24)给出了质点在两个以恒定的速度作相对运动的参考系中速度与参考系间的关系,即质点的速度变换关系式. 这个式子叫做伽利略速度变换式,需要指出的是,当质点的速度接近光速时,伽利略速度变换式就不适用了. 此时速度的变换应当遵循洛伦兹变换公式^①.

例 如图 1-24 所示,一实验者 A 在以 $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率沿水平轨道前进的平板车上控制一台弹射器. 此弹射器以与车前进的反方向呈 60° 角斜向上射出一弹丸. 此时站在地面上

^① 洛伦兹速度变换式将在第十八章第 18-3 节中讨论.

的另一实验者 B 看到弹丸铅直向上运动,求弹丸上升的高度.

解 设地面参考系为 S 系,其坐标系为 Oxy ,平板车参考系为 S' 系,其坐标系为 $O'x'y'$,且 S' 系以速率 $u = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 沿 Ox 轴正向相对 S 系运动.由图中所选定的坐标可知,在 S' 系中的实验者 A 射出的弹丸,其速度 \boldsymbol{v}' 在 x' 、 y' 轴上的分量分别为 v'_x 和 v'_y .它们与抛出角 α 的关系为

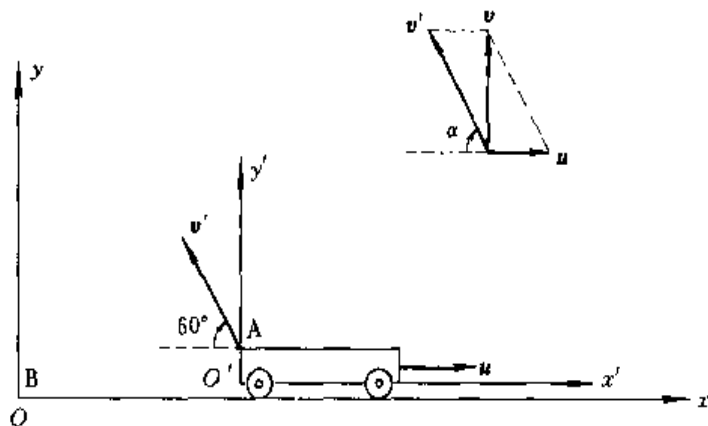


图 1-24

$$\tan \alpha = \frac{v'_y}{v'_x} \quad (1)$$

若以 \boldsymbol{v} 代表弹丸相对 S 系的速度,那么它在 x 、 y 轴上的分量则为 v_x 和 v_y .由速度变换式(1-24)及题意可得

$$v_x = u + v'_x \quad (2)$$

$$v_y = v'_y \quad (3)$$

由于 S 系(地面)的实验者 B 看到弹丸是铅直向上运动的,故 $v_x = 0$.于是由式(2),有

$$v'_x = -u = -10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

另由式(3)和式(1)可得

$$|v_y| = |v'_y| = |v'_x| \tan \alpha = 10 \tan 60^\circ = 17.3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

由匀变速直线运动公式可得弹丸上升的高度为

$$y = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{(17.3)^2}{2 \times 9.80} \text{ m} = 15.3 \text{ m}$$

问 题

1-1 在一艘内河轮船中,两个旅客有这样的对话:

甲:我静静地坐在这里好半天了,我一点也没有运动.

乙:不对,你看看窗外,河岸上的物体都飞快地向后掠去,船在飞快前进,你也在很快地运动.

试把他们讲话的含意阐述得确切一些.究竟旅客甲是运动,还是静止?你如何理解运动和静止这两个概念的.

1-2 有人说:“分子很小,可将其当作质点;地球很大,不能当作质点”.对吗?

1-3 已知质点的运动方程为 $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$,有人说其速度和加速度分别为

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.你说对吗?

1-4 在习题 1-3 中,有人认为:船速为 $v' = v \cos \theta$,由此得出的答案是错的.你知道错在哪里吗?

1-5 如果一质点的加速度与时间的关系是线性的,那么,该质点的速度和位矢与时间的关系是否也是线性的呢?

1-6 一人站在地面上用枪瞄准悬挂在树上的木偶.当击发枪机,子弹从枪口射出时,木偶正好从树上由静止自由下落.试说明为什么子弹总可以射中木偶?

1-7 一质点作匀速率圆周运动,取其圆心为坐标原点.试问:质点的位矢与速度、位矢与加速度、速度与加速度的方向之间有何关系?

1-8 在《关于两门新科学的对话》一书中,伽利略写道:“仰角(即抛射角)比 45° 增大或减小一个相等角度的抛体,其射程是相等的.”你能证明吗?

1-9 下列说法是否正确:

- (1) 质点作圆周运动时的加速度指向圆心;
- (2) 匀速圆周运动的加速度为恒量;
- (3) 只有法向加速度的运动一定是圆周运动;
- (4) 只有切向加速度的运动一定是直线运动.

1-10 在地球的赤道上,有一质点随地球自转的加速度为 a_F ;而此质点随地球绕太阳公转的加速度为 a_s .设想地球绕太阳的轨道可视为圆形.你知道这两个加速度之比是多少?

1-11 一只鸟在水平面上沿直线以恒定速率相对地面飞行,有一汽车在公路上行驶,在什么情况下,汽车上的观察者观察到鸟是静止不动的?在什么情况下,他观察到小鸟似乎往回飞.

1-12 一人在以恒定速度运动的火车上竖直向上抛出一块石子,此石子是否能落回人的手中?如果石子抛出后,火车以恒定的加速度前进,情况又如何?

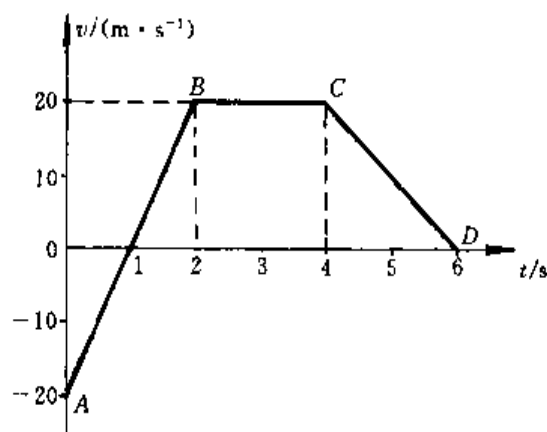
1-13 如果有两个质点分别以初速 \mathbf{v}_{10} 和 \mathbf{v}_{20} 抛出, \mathbf{v}_{10} 和 \mathbf{v}_{20} 在同一平面内且与水平面的夹角分别为 θ_1 和 θ_2 .有人说,在任意时刻,两质点的相对速度是一常量.你说对吗?

习 题

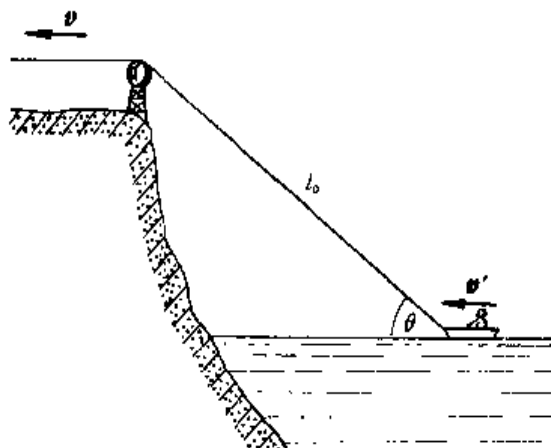
1-1 已知质点沿 x 轴作直线运动,其运动方程为 $x = 2 \text{ m} + (6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})t^2 - (2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-3})t^3$,求(1)质点在运动开始后 4.0 s 内的位移的大小;(2)质点在该时间内所通过的路程.

1-2 一质点沿 x 轴方向作直线运动,其速度与时间的关系如图 1-2 所示.设 $t=0$ 时, $x=0$.试根据已知的 $v-t$ 图,画出 $a-t$ 图以及 $x-t$ 图.

1-3 如图 1-3 所示,湖中有一小船.岸上有人用绳跨过定滑轮拉船靠岸.设滑轮距水面高度为 h ,滑轮到原船位置的绳长为 l_0 .试求:当人以匀速 v 拉绳,船运动的速度 v' 为多少?



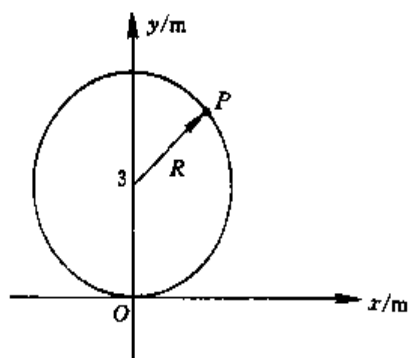
习题 1-2 图



习题 1-3 图

1-4 一升降机以加速度 $1.22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 上升, 当上升速度为 $2.44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时, 有一螺丝自升降机的天花板上松脱, 天花板与升降机的底面相距 2.74 m . 计算: (1) 螺丝从天花板落到底面所需要的时间; (2) 螺丝相对升降机外固定柱子的下降距离.

1-5 一质点 P 沿半径 $R = 3.00 \text{ m}$ 的圆周作匀速率运动, 运动一周所需时间为 20.0 s ,



习题 1-5 图

设 $t = 0$ 时, 质点位于 O 点. 按图中所示 Oxy 坐标系, 求: (1) 质点 P 在任意时刻的位矢; (2)

5 s 时的速度和加速度.

1-6 一质点自原点开始沿抛物线 $2y = x^2$ 运动,它在 Ox 轴上的分速度为一恒量,其值为 $v_x = 4.0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$,求质点位于 $x = 2.0 \text{ m}$ 的速度和加速度.

1-7 质点在 Oxy 平面内运动,其运动方程为 $\mathbf{r} = (2.00 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})t\mathbf{i} + [19.0 \text{ m} - (2.00 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})t^2]\mathbf{j}$.求:(1) 质点的轨迹方程;(2) 在 $t_1 = 1.00 \text{ s}$ 到 $t_2 = 2.00 \text{ s}$ 时间内的平均速度;(3) $t_1 = 1.00 \text{ s}$ 时的速度及切向和法向加速度.

1-8 质点的运动方程为 $x = (-10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})t + (30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})t^2$ 和 $y = (15 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})t - (20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})t^2$,试求:(1) 初速度的大小和方向;(2) 加速度的大小和方向.

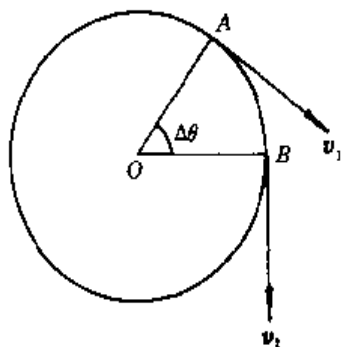
1-9 一质点具有恒定加速度 $\mathbf{a} = (6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})\mathbf{i} + (4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})\mathbf{j}$,在 $t = 0$ 时,其速度为零,位置矢量 $\mathbf{r}_0 = 10 \text{ m}\mathbf{i}$.求:(1) 在任意时刻的速度和位置矢量;(2) 质点在 Oxy 平面上的轨迹方程,并画出轨迹的示意图.

1-10 飞机以 $100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度沿水平直线飞行,在离地面高为 100 m 时,驾驶员要把物品空投到前方某一地面目标处,问:(1) 此时目标在飞机下方前多远?(2) 投放物品时,驾驶员看目标的视线和水平线成何角度?(3) 物品投出 2.00 s 后,它的法向加速度和切向加速度各为多少?

1-11 一足球运动员在正对球门前 25.0 m 处以 $20.0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的初速率罚任意球,已知球门高为 3.44 m ,若要在垂直于球门的竖直平面内将足球直接踢进球门,问他应与地面成什么角度的范围内踢出足球?(足球可视为质点.)

1-12 设从某一点 O 以同样的速率,沿着同一竖直面内各个不同方向同时抛出几个物体.试证:在任意时刻,这几个物体总是散落在某一圆周上.

1-13 一质点在半径为 R 的圆周上以恒定的速率运动,质点由位置 A 运动到位置 B , OA 和 OB 所对的圆心角为 $\Delta\theta$.



习题 1-13 图

(1) 试证 A 和 B 位置之间平均加速度为 $\bar{a} = \sqrt{2(1 - \cos \Delta\theta)} v^2 / (R\Delta\theta)$.

(2) 当 $\Delta\theta$ 分别等于 90° , 30° , 10° 和 1° 时,平均加速度各为多少? 并对结果加以讨论.

1-14 一质点沿半径为 R 的圆周按规律 $s = v_0 t - \frac{1}{2}bt$ 而运动, v_0 , b 都是常量.(1) 求 t 时刻质点的总加速度.(2) t 为何值时总加速度在数值上等于 b ? (3) 当加速度达到 b 时,质点已沿圆周运行了多少圈?

1-15 碟盘是一张表面覆盖一层信息记录物质的塑性圆片.若碟盘可读部分的内外半径分别为 2.50 cm 和 5.80 cm .在回放时,碟盘被以恒定的线速度由内向外沿螺旋扫描线(阿基米德螺线)进行扫描.(1)若开始时读写碟盘的角速度为 $50.0\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$,则读完时的角速度为多少?(2)若螺旋线的间距为 $1.60\text{ }\mu\text{m}$,求扫描线的总长度和回放时间

1-16 地面上垂直竖立一高 20.0 m 的旗杆,已知正午时分太阳在旗杆的正上方,求在下午 2.00 时,杆顶在地面上影子速度的大小.在何时刻杆影将伸展至 20.0 m ?

1-17 一半径为 0.50 m 的飞轮在启动时的短时间内,其角速度与时间的平方成正比.在 $t=2.0\text{ s}$ 时测得轮缘一点的速度值为 $4.0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.求:(1)该轮在 $t'=0.5\text{ s}$ 的角速度,轮缘一点的切向加速度和总加速度;(2)该点在 2.0 s 内所转过的角度.

1-18 一质点在半径为 0.10 m 的圆周上运动,其角位置为 $\theta=2+(4\text{ s}^{-3})t^3$.(1)求在 $t=2.0\text{ s}$ 时质点的法向加速度和切向加速度.(2)当切向加速度的大小恰等于总加速度大小的一半时, θ 值为多少?(3) t 为多少时,法向加速度和切向加速度的值相等?

1-19 一无风的下雨天,一列火车以 $v_1=20.0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度匀速前进,在车内的旅客看见玻璃窗外的雨滴和垂线成 75° 角下降.求雨滴下落的速度 v_2 . (设下降的雨滴作匀速运动)

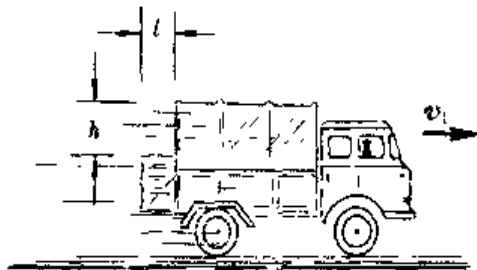
1-20 设有一架飞机从 A 处向东飞到 B 处,然后又向西飞回到 A 处.飞机相对空气的速率为 v' ,而空气相对地面的速率为 u , A 、 B 间的距离为 l ,飞机相对空气的速率 v' 保持不变.

(1)假定空气是静止的(即 $u=0$),试证来回飞行时间为 $t_0=2l/v'$;

(2)假定空气的速度向东,试证来回飞行时间为 $t_1=t_0\left(1-\frac{u^2}{v'^2}\right)^{-1}$;

(3)假定空气的速度向北,试证来回飞行的时间为 $t_2=t_0\left(1-\frac{u^2}{v'^2}\right)^{-1/2}$.

1-21 如图 1-21 所示,一汽车在雨中沿直线行驶,其速率为 v_1 ,下落雨滴的速度方向偏于竖直方向之前 θ 角,速率为 v_2 .若车后有一长方形物体,问车速 v_1 为多大时,此物体正好不会被雨水淋湿?



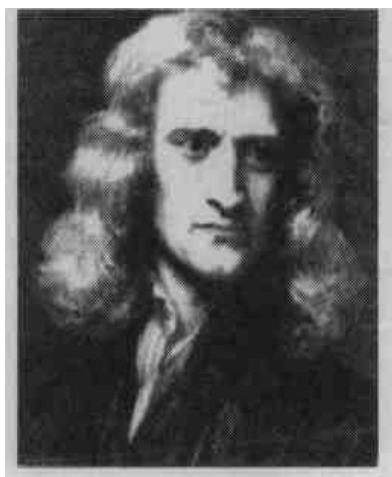
习题 1-21 图

1-22 一人能在静水中以 $1.10\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度划船前进.今欲横渡一宽为 $1.00\times 10^3\text{ m}$ 、水流速度为 $0.55\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的大河,(1)他若要从出发点横渡该河而到达正对岸的一点,那么应如何确定划行方向?到达正对岸需多少时间?(2)如果希望用最短的时间过河,应如何确定划行方向?船到达对岸的位置在什么地方?

1 ~ 23 一质点相对观察者 O 运动, 在任意时刻 t , 其位置为 $x = vt, y = gt^2/2$, 质点运动的轨迹为抛物线. 若另一观察者 O' 以速率 v 沿 x 轴正向相对于 O 运动. 试问质点相对 O' 的轨迹和加速度如何?

第二章 牛顿定律

上一章我们曾指出,位置矢量和速度是描述质点运动状态的量,而加速度则是表示质点运动状态变化的量,但没有涉及质点运动状态发生变化的原因.而质点运动状态的变化,则是与作用在质点上的力有关的,这部分内容属牛顿定律涉及的范围.以牛顿定律为基础建立起来的宏观物体运动规律的动力学理论,称之为牛顿力学或经典力学.本章将概括地阐述牛顿定律的内容及其在质点运动方面的初步应用.



牛顿(Isaac Newton, 1643—1727),杰出的英国物理学家,经典物理学的奠基人.他的不朽巨著《自然哲学的数学原理》总结了前人和自己关于力学以及微积分学方面的研究成果,其中含有牛顿三条运动定律和万有引力定律,以及质量、动量、力和加速度等概念.在光学方面,他说明了色散的起因,发现了色差及牛顿环,他还提出了光的微粒说.

2-1 牛顿定律

一 牛顿第一定律

按照古希腊哲学家亚里士多德(Aristotle, 公元前 384—322)的说法,静止是物体的自然状态,要使物体以某一速度作匀速运动,必须有力对它作用才行.在亚里士多德看来,这确实是真理.人们的确看到,在水平面上运动的物体最后都要趋于静止,从地而上抛出的石子最终都要落回地面.在亚里士多德以后的漫长岁月中,这个概念一直被许多哲学家和不少物理学家所接受.直到 17 世纪,意大利物理学家和天文学家伽利略指出,物体沿水平面滑动趋于静止的原因是有摩擦力作用在物体上的缘故.他从实验中总结出在略去摩擦力的情况下,如果没有外力作用,物体将以恒定的速度运动下去.力不是维持物体运动的原因,而是使物体运动状态改变的原因.

牛顿继承和发展了伽利略的见解,并第一次用概括性的语言把它表达了出来.1686年,牛顿在他的名著《自然哲学的数学原理》一书中写道:任何物体都要保持其静止或匀速直线运动状态,直到外力迫使它改变运动状态为止.这就是牛顿第一定律.牛顿第一定律的数学形式表示为

$$F=0 \text{ 时, } v = \text{恒矢量} \quad (2-1)$$

第一定律表明,任何物体都具有保持其运动状态不变的性质,这个性质叫做惯性,所以,第一定律以前曾称为惯性定律.

第一定律还表明,正是由于物体具有惯性,所以要使物体的运动状态发生变化,一定要有其它物体对它作用,这种作用被称之为力.在自然界中完全不受其它物体作用的物体实际上是不存在的,物体总要受到接触力或场力的作用.因此,第一定律不能简单地直接用实验加以验证.

如果有几个外力作用在一质点上,而且合力为零,这时质点的运动情况,与它不受外力作用时的情况是一样的.

由第一定律我们知道,力是使物体运动状态发生变化的原因,而物体的惯性则反映了物体改变运动状态的难易程度.这两者都对物体运动状态的变化发挥作用.

二 牛顿第二定律

物体在运动时总具有速度,我们把物体的质量 m 与其运动速度 v 的乘积叫做物体的动量,用 p 表示,即

$$p = m v \quad (2-2)$$

动量 p 显然也是一个矢量,其方向与速度 v 的方向相同.与速度可表示物体运动状态一样,动量也是表述物体运动状态的量,但动量较之速度其涵义更为广泛,意义更为重要.当外力作用于物体时,其动量要发生改变.牛顿第二定律阐明了作用于物体的外力与物体动量变化的关系.

牛顿第二定律表明,动量为 p 的物体,在合外力 $F (= \sum F_i)$ 的作用下,其动量随时间的变化率应当等于作用于物体的合外力,即

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} \quad (2-3a)$$

当物体在低速情况下运动时,即物体的运动速度 v 远小于光速 c ($v \ll c$) 时,物体的质量可以视为是不依赖于速度的常量.于是上式可写成

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad (2-3b)$$

$$\text{或} \quad F = ma \quad (2-3c)$$

应当指出,若运动物体的速度 v 接近于光速 c 时,物体的质量就依赖于其速度

了,即 $m(v)^{\text{①}}$. 式(2-3b)也可写成

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + m \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + m \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k}$$

$$\text{即} \quad \mathbf{F} = ma_x \mathbf{i} + ma_y \mathbf{j} + ma_z \mathbf{k} \quad (2-3d)$$

式(2-3)是牛顿第二定律的数学表达式,又称牛顿力学的质点动力学方程.

牛顿第二定律是牛顿力学的核心,应用它解决问题时必须注意以下几点.

(1) 牛顿第二定律只适用于质点的运动. 物体作平动时,物体上各质点的运动情况完全相同,所以物体的运动可看作是质点的运动,此时这个质点的质量就是整个物体的质量. 以后如不特别指明,在论及物体的平动时,都是把物体当作质点来处理的.

(2) 牛顿第二定律所表示的合外力与加速度之间的关系是瞬时关系. 也就是说,加速度只在外力有作用时才产生,外力改变了,加速度也随之改变.

(3) 力的叠加原理. 当几个外力同时作用于物体时,其合外力所产生的加速度 \mathbf{a} , 与每个外力 \mathbf{F}_i 所产生加速度 \mathbf{a}_i 的矢量和是一样的,这就是力的叠加原理. 式(2-3)是牛顿第二定律的矢量式,它在直角坐标系 Ox 、 Oy 和 Oz 轴上的分量式分别为

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y, \quad F_z = ma_z \quad (2-4)$$

式中 F_x 、 F_y 和 F_z 分别表示作用在物体上所有的外力在 Ox 、 Oy 和 Oz 轴上的分

量之和 ($F_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}$, $F_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}$, $F_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}$); a_x 、 a_y 和 a_z 分别表示物体加速度 \mathbf{a} 在 Ox 、 Oy 和 Oz 轴上的分量.

当质点在平面上作曲线运动时,我们可取如图 2-1 所示的自然坐标系, \mathbf{e}_n 为法向单位矢量, \mathbf{e}_t 为切向单位矢量. 于是质点在点 A 的加速度 \mathbf{a} 在自然坐标系的两个相互垂直方向上的分矢量为 \mathbf{a}_t 和 \mathbf{a}_n . 这样,质点在平面上作曲线运动时,在自然坐标系中牛顿第二定律可写成

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(\mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n) = m \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + m \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (2-5a)$$

如以 \mathbf{F}_t 和 \mathbf{F}_n 代表合外力 \mathbf{F} 在切向和法向的分矢量,则有

$$\begin{cases} \mathbf{F}_t = m\mathbf{a}_t = m \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t \\ \mathbf{F}_n = m\mathbf{a}_n = m \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n \end{cases} \quad (2-5b)$$

^① 关于在高速运动情况下质量依赖于速度的论述,请阅本书第四章第 4-6 节,较详细的阐述请阅本书第十八章第 18-6 节.

F_t 叫做切向力, F_n 叫做法向力(或向心力); a_t 和 a_n 相应地叫做切向加速度和法向加速度.

三 牛顿第三定律

牛顿第一定律指出物体只有在外力作用下才改变其运动状态, 牛顿第二定律给出物体的加速度与作用于物体的力和物体质量之间的数量关系, 牛顿第三定律则说明力具有物体间相互作用的性质.

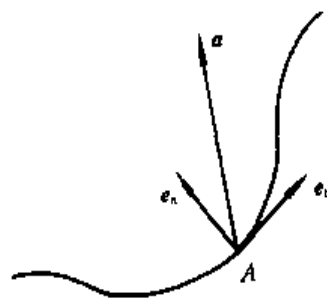


图 2-1 牛顿第二定律在自然坐标系上的分量

两个物体之间的作用力 F 和反作用力 F' , 沿同一直线, 大小相等, 方向相反, 分别作用在两个物体上. 这就是牛顿第三定律, 其数学表达式为

$$F = -F' \quad (2-6)$$

正确理解牛顿第三定律, 对分析物体受力情况是很重要的. 分析物体受力情况时必须注意以下两点:

- (1) 作用力和反作用力是矛盾的两个方面, 它们互以对方为自己存在的条件, 同时产生, 同时消灭, 任何一方都不能孤立地存在.
- (2) 作用力和反作用力是分别作用在两个物体上的, 因此它们不能相互抵消.

此外, 作用力和反作用力总是属于同种性质的力. 例如作用力是万有引力, 那么反作用力也一定是万有引力.

2-2 物理量的单位和量纲

在历史上, 物理量的单位制有很多种, 这不仅给工农业生产、人民生活带来诸多不便, 而且也不规范. 1984 年 2 月 27 日, 我国国务院颁布实行以国际单位制(SI)^①为基础的法定单位制. 本书采用以国际单位制为基础的我国法定单位制.

国际单位制规定, 力学的基本量是长度、质量和时间, 并规定: 长度的基本单位名称为“米”, 单位符号为 m; 质量的基本单位名称为“千克”, 单位符号为 kg, 时间的基本单位名称为“秒”, 单位符号为 s. 其他力学物理量都是导出量.

按照上述基本量和基本单位的规定, 速度的单位名称为“米每秒”符号为

^① 在国际单位制中, 包括长度、时间、质量在内共有 7 个基本量, 关于它们的名称、单位和符号以及导出量的名称、单位和符号, 请参阅本书附录三.

$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$;角速度的单位名称为“弧度每秒”,符号为 $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$;加速度的单位名称为“米每二次方秒”,符号为 $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$;角加速度的单位名称为“弧度每二次方秒”,符号为 $\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$;力的单位名称为“牛顿”,简称“牛”,符号为 N , $1\text{ N}=1\text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. 其他物理量的名称、符号,以后将陆续介绍.

在物理学中,导出量与基本量之间的关系可以用量纲来表示.我们用 L 、 M 和 T 分别表示长度、质量和时间三个基本量的量纲,其他力学量 Q 的量纲与基本量量纲之间的关系可按下列形式表达出来:

$$\dim Q = L^p M^q T^r$$

例如,速度的量纲是 LT^{-1} ,角速度的量纲是 T^{-1} ,加速度的量纲是 LT^{-2} ,角加速度的量纲是 T^{-2} ,力的量纲是 MLT^{-2} ,等等.

由于只有量纲相同的物理量才能相加减和用等号联接,所以只要考察等式两端各项量纲是否相同,就可初步校验等式的正确性.例如在第1章第1-1节的例3中,我们得到小球在液体中下落的速度公式为 $v = v_0 e^{(-10\text{ s}^{-1})t}$,由于 $e^{(-10\text{ s}^{-1})t}$ 是无量纲的数,故等式两边的量纲均为 LT^{-1} .因此,可初步认为上式是正确的,这就是量纲检查法.这种方法在求解问题和科学实验中经常用到.同学们应当学会在求证、解题过程中使用量纲来检查所得结果.

2-3 几种常见的力

在动力学中,分析物体受力情况是十分重要的.力学中常见到的力有弹性力、摩擦力、万有引力等,它们分属不同性质的力,弹性力和摩擦力属接触力,而万有引力属场力.下面我们来介绍弹性力、摩擦力和万有引力.

一 万有引力

17世纪初,德国天文学家开普勒(J. Kepler, 1571—1630)分析第谷·布拉(Tycho Brahe, 1546—1601)观察行星所得的大量数据,提出了行星运动的开普勒三定律^①.牛顿继承了前人的研究成果,在此基础上,通过深入研究,提出了著名的万有引力定律.这个定律指出,星体之间,地球与地球表面附近的物体之间,以及所有物体与物体之间都存在着一种相互吸引的力,所有这些力都遵循同一规律.这种相互吸引的力叫做万有引力.万有引力定律可表述为:在两个相距为 r ,质量分别为 m_1 、 m_2 的质点间有万有引力,其方向沿着它们的连线,其大小与它们的质量乘积成正比,与它们之间距离 r 的二次方成反比,即

^① 关于行星运动的开普勒定律可阅本书第五章第5-1节.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2-7a)$$

式中 G 为一普适常数, 叫做引力常量. 引力常量最早是由英国物理学家卡文迪许(H. Cavendish, 1731—1810)于 1798 年由实验测出的. 在一般计算时取

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

用矢量形式表示, 万有引力定律可写成

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (2-7b)$$

如以由 m_1 指向 m_2 的有向线段为 m_2 的位矢 \mathbf{r} , 那么式中 \mathbf{e}_r 为沿位矢方向的单位矢量, 它等于 \mathbf{r}/r . 而上式中的负号则表示 m_1 施于 m_2 的万有引力的方向始终与沿位矢的单位矢量 \mathbf{e}_r 的方向相反.

应该注意, 万有引力定律中的 F 是两个质点之间的引力. 若欲求两个物体间的引力, 则必须把每个物体分成很多小部分, 把每个小部分看成是一个质点, 然后计算所有这些质点间的相互作用力. 从数学上讲, 这个计算通常是一个积分问题. 计算表明, 对于两个密度均匀的球体, 或者球的密度只是两球心距离 r 的函数 $\rho(r)$, 它们之间的引力可以直接用式(2-7)来计算, 这时 r 表示两球球心间的距离. 也就是说, 这两球体之间的引力与把球的质量当作集中于球心(即把球当作质点来处理)的引力是一样的^①.

物理学中四种最基本的相互作用

万有引力相互作用是迄今认识到的四种基本相互作用之一, 其他三种相互作用是电磁相互作用, 弱相互作用和强相互作用. 电磁相互作用从本质上来说是运动电荷间产生的; 弱相互作用是产生于放射性衰变过程和其他一些“基本”粒子衰变等过程之中的; 强相互作用则能使像质子、中子这样一些粒子集合在一起. 弱相互作用和强相互作用是微观粒子间的相互作用. 现在我们常遇到的力, 如重力、摩擦力、弹性力、库仑力、安培力、分子力、原子力、核力等等, 都可归结为这四种基本相互作用. 然而这四种相互作用的范围即力程是不一样的. 万有引力作用和电磁作用的作用范围, 原则上讲是不限制的, 即可达无限远; 强相互作用范围为 10^{-15} m ; 而弱相互作用的有效作用范围仅为 10^{-18} m . 这四种力的强度相差也很大, 如以距源 10^{-15} m 处强相互作用的力强度为 1, 则其他力的相对强度分别为: 电磁力是 10^{-2} , 弱相互作用力是 10^{-13} , 万有引力仅是 10^{-38} . 由此可见, 万有引力的强度是这四种相互作用中强度最弱的一种, 而且相差悬殊. 因此, 通常在论及电磁力时, 如不特别指明, 万有引力所产生的影响可以略去不计.

^① 球体间引力的计算和球壳内质点的引力计算, 曾困扰了牛顿近 20 年. 为解决这类变量的数学计算问题, 牛顿发明了微积分, 从而使著名的牛顿命题得到了解决. 同学们如有兴趣想知道这些物体间的引力是如何计算的, 可阅读本书第五章第 5-4 节物体间的引力势能和引力, 从中可了解到数学和物理学是如何相辅相成、共同发展的.

长期以来,人们对物理理论的归纳综合进行了深入探索,其中以牛顿运动定律和万有引力定律为核心的经典力学,以及以麦克斯韦电磁场理论为核心的经典电动力学是两次伟大的综合,它标志着人们对经典力学和经典电磁理论认识上的飞跃.那么,能否找到上面所讲的四种基本相互作用之间的联系呢?这是一次更深刻更基本的综合,许多物理学家为此进行了不懈的努力.1967—1968年温伯格(S. Weinberg, 1933—)、萨拉姆(A. Salam, 1926—)和格拉肖(S. L. Glashow, 1932—)提出一个理论,把弱相互作用与电磁相互作用统一为电弱相互作用.后来这个电弱相互作用的理论为实验所证实.这个发现把原先的四种基本相互作用统一为三个.为此,他们三人于1979年共获诺贝尔物理学奖.鲁比亚(C. Rubbia, 1934—)和范德米尔(Vander Meer, 1925—)两人因从实验证实弱电相互作用,于1984年获诺贝尔物理学奖.由于受到发现电弱相互作用的鼓舞,许多物理学家正在进行电弱相互作用和强相互作用之间统一的研究,并企盼把万有引力作用也包括进去,以实现相互作用理论的“大统一”.

重力 通常把地球对地面附近物体的万有引力叫做重力 P , 其方向通常是指向地球中心的. 重力的大小又叫重量. 在重力 P 的作用下, 物体具有的加速度叫重力加速度 g , 有

$$g = \frac{P}{m}$$

如以 m_E 代表地球的质量, r 为地球中心与物体之间的距离, 由式(2-7)可得

$$g = \frac{Gm_E}{r^2}$$

在地球表面附近, 物体与地球中心的距离 r 与地球的半径 R 相差很小, 即 $r - R \ll R$. 故上式可近似表示为

$$g = \frac{Gm_E}{R^2}$$

已知 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, 由附录四可查得 $m_E = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$. 代入上式有 $g = 9.82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. 一般计算时, 地球表面附近的重力加速度取 $g = 9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

顺便指出, 由附录四有关月球的质量和半径的数据, 可以算出月球表面附近的重力加速度约为 $1.62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 亦即近似等于地球表面重力加速度的 $1/6$. 所以, 习惯于在地面行走的人, 到了月球以后, 就显著地处于失重状态了, 即使处于距地面约 10^3 km 高空的宇航飞行器中, 失重感也是很明显的, 故宇航员需在地面上进行失重训练.

二 弹性力

当两物体相互接触而挤压时, 它们要发生形变. 物体形变时欲恢复其原来的形状, 物体间会有作用力产生. 这种物体因形变而产生欲使其恢复原来形状的力

叫做弹性力. 常见的弹性力有: 弹簧被拉伸或压缩时产生的弹簧弹性力^①; 绳索被拉紧时所产生的张力; 重物放在支承面上产生的正压力(作用在支承面上)和支持力(作用在物体上)等.

例 1 质量为 m 、长为 l 的柔软细绳, 一端系着放在光滑桌面上质量为 m' 的物体, 如图 2-2(a) 所示. 在绳的另一端加如图中所示的力 F . 绳被拉紧时会略有伸长(形变), 一般伸长甚微, 可略去不计. 现设绳的长度不变, 质量分布是均匀的. 求: (1) 绳作用在物体上的力; (2) 绳上任意点的张力.

解 如图 2-2(b) 所示, 设想在绳索上点 P 将绳索分为两段, 它们之间有拉力 F_T 和 F'_T 作用, 这一对拉力称为张力. 它们的大小相等、方向相反.

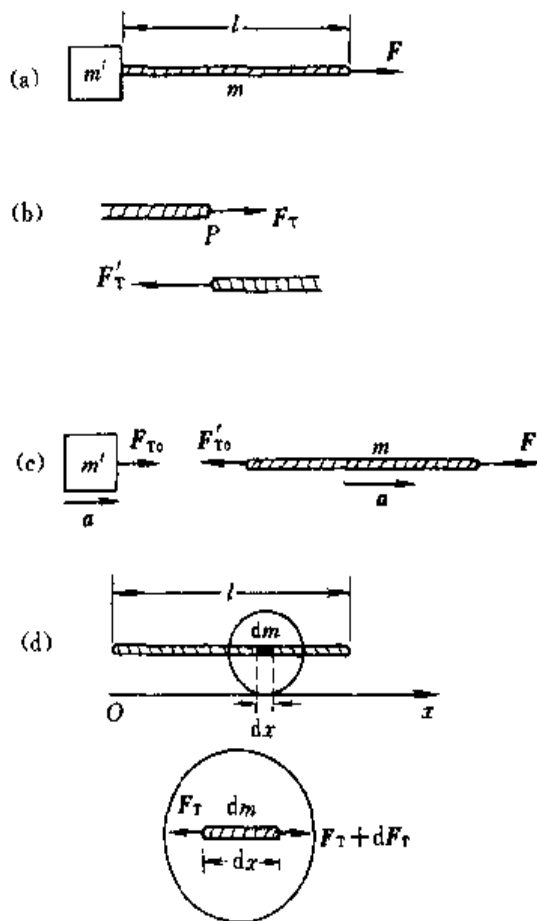


图 2-2

(1) 由题意知, 绳和物体均被约束在如图 2-2(c) 所示的 Ox 轴上运动, 且绳的长度不变, 故它们的加速度相等, 均为 a . 设绳作用在物体上的拉力为 F_{T0} , 物体作用在绳端的力为 F'_{T0} . 它们是作用力与反作用力, 故 $F_{T0} = -F'_{T0}$. 由牛顿第二定律, 对物体与绳可分别有

^① 参阅本书第三章第 3-5 节和第十四章第 14-1 节.

$$F_{T1} = m'a$$

和

$$F - F'_{T0} = ma$$

由于 $F_{T0} = F'_{T1}$, 所以, 物体与绳的加速度为

$$a = \frac{F}{m' + m} \quad (1)$$

绳对物体的拉力为

$$F_{T0} = \frac{m'}{m' + m} F$$

从上式可以看出, 由绳传递给物体的力 F_{T0} 小于作用在绳另一端的外力 F . 只有当绳的质量 m 远小于物体的质量 m' 时, 即绳的质量可忽略不计时, F_{T0} 才与 F 近似相等. 在力学中, 遇到有细而软的绳索问题时, 如不特别指明, 其质量均是略去不计的.

(2) 由于绳的长度不变, 且质量分布均匀, 故其单位长度的质量即质量线密度为 m/l . 在图 2-2(d) 中, 取物体与绳连接处为原点 O , 在距原点 O 为 x 的绳上, 取一线元 dx , 其质量元为 $dm = m dx/l$. 按图 2-2(d) 所示的示力图, 由牛顿第二定律, 有

$$(F_T + dF_T) - F_1 = (dm)a = \frac{m}{l} a dx$$

利用式(1), 上式为

$$dF_1 = \frac{mF}{(m' + m)l} dx$$

从图 2-2(c) 有 $x=l$ 时, $F_T = F$, 所以上式的积分为

$$\int_{F_T}^F dF_1 = \frac{mF}{(m' + m)l} \int_0^l dx$$

得

$$F_1 = F - \frac{Fm}{l(m' + m)}(l - x)$$

化简, 得

$$F_T = \left(m' + m \frac{x}{l} \right) \frac{F}{m' + m} \quad (2)$$

从式(2)可以看出, 绳中各点的张力是随位置而变的, 即 $F_T = F_T(x)$. 当 $m' \gg m$ 时, $F_T \approx F$, 此时绳中各点的张力近似相等, 均约等于外力 F .

三 摩擦力

除了弹性力是接触力之外, 摩擦力也是接触力. 两个互相接触的物体间有相对滑动的趋势但尚未相对滑动时, 在接触面上便产生阻碍发生相对滑动的力, 这个力称为静摩擦力. 把物体放在一水平面上, 有一外力 F 沿水平面作用在物体上, 若外力 F 较小, 物体尚未滑动, 这时静摩擦力 F_0 与外力 F 在数值上相等, 方向则与 F 相反. 静摩擦力 F_0 随着 F 的增大而增大, 直到 F 增大到某一定数值时, 物体相对平面即将滑动, 这时静摩擦力达到最大值, 称为最大静摩擦力 $F_{0\max}$. 实验表明, 最大静摩擦力的值与物体的正压力 F_N 成正比, 即

$$F_{f0m} = \mu_0 F_N$$

μ_0 叫做静摩擦因数. 静摩擦因数与两接触物体的材料性质以及接触面的情况有关, 而与接触面的大小无关. 应强调指出, 在一般情况下, 静摩擦力总是满足下述关系的:

$$F_f \leq F_{f0m}$$

当物体在平面上滑动时, 仍受摩擦力作用. 这个摩擦力叫做滑动摩擦力 F_f , 其方向总是与物体相对平面的运动方向相反, 其大小也是与物体的正压力 F_N 成正比, 即

$$F_f = \mu F_N$$

μ 叫做滑动摩擦因数. μ 与两接触物体的材料性质、接触表面的情况、温度、干湿程度等有关, 还与两接触物体的相对速度有关. 在相对速度不太大时, 为计算简单起见, 可以认为滑动摩擦因数 μ 略小于静摩擦因数 μ_0 ; 在一般计算时, 除非特别指明, 可认为它们是相等的.

摩擦产生的影响有利弊两个方面. 所有机器的运动部分都有摩擦, 它既磨损机器又浪费大量能量, 而且由于摩擦会使机器局部温度升高, 从而降低机器的精度, 这是摩擦有害的一面. 为此, 必须设法减少摩擦, 通常是在产生有害摩擦的部位涂以润滑油, 或者以滚动摩擦替代滑动摩擦, 或者改变摩擦材料的性能等. 此外, 摩擦也是生产和生活中所必需的. 很难想像, 没有摩擦的自然界会是什么情况, 人的行走, 车轮的滚动, 货物借助皮带输送机的传输等等, 都是依赖于摩擦才能进行的. 下面所举的例 2 中: 绳索与圆柱体之间的摩擦在日常生活和生产中是经常遇到的.

例 2 如图 2-3(a) 所示, 有一绳索围绕在圆柱上, 绳索绕圆柱的张角为 θ , 绳与圆柱间的静摩擦因数为 μ . 求绳索处于滑动的边缘时, 绳两端的张力 F_{TA} 和 F_{TB} 间的关系. 设绳索的质量略去不计.

解 如图 2-3(b) 所示, 在绕于圆柱的绳索 AB 上, 取一微小段绳索 ds , 其相对圆心的张角为 $d\theta$. 设 ds 两端的张力分别为 F_T 和 $F_T + dF_T$, 圆柱对 ds 的支持力为 F_N . 当圆柱有顺时针旋转的趋势时, 圆柱对 ds 的摩擦力为 F_f . 由于绳索的质量略去不计, 故 ds 所受重力亦不予考虑.

由题意知, 绳索处于滑动边缘, 所以绳索的加速度 $a = 0$. 取如图 2-3(b) 所示的 Ox 轴和 Oy 轴, 根据牛顿第二定律, 微小段绳索 ds 在 Ox 轴和 Oy 轴上的分量式分别为

$$(F_T + dF_T) \cos \frac{d\theta}{2} - F_T \cos \frac{d\theta}{2} - F_f = 0 \quad (1)$$

$$-(F_T + dF_T) \sin \frac{d\theta}{2} - F_T \sin \frac{d\theta}{2} + F_N = 0 \quad (2)$$

此外, 由摩擦力定义有

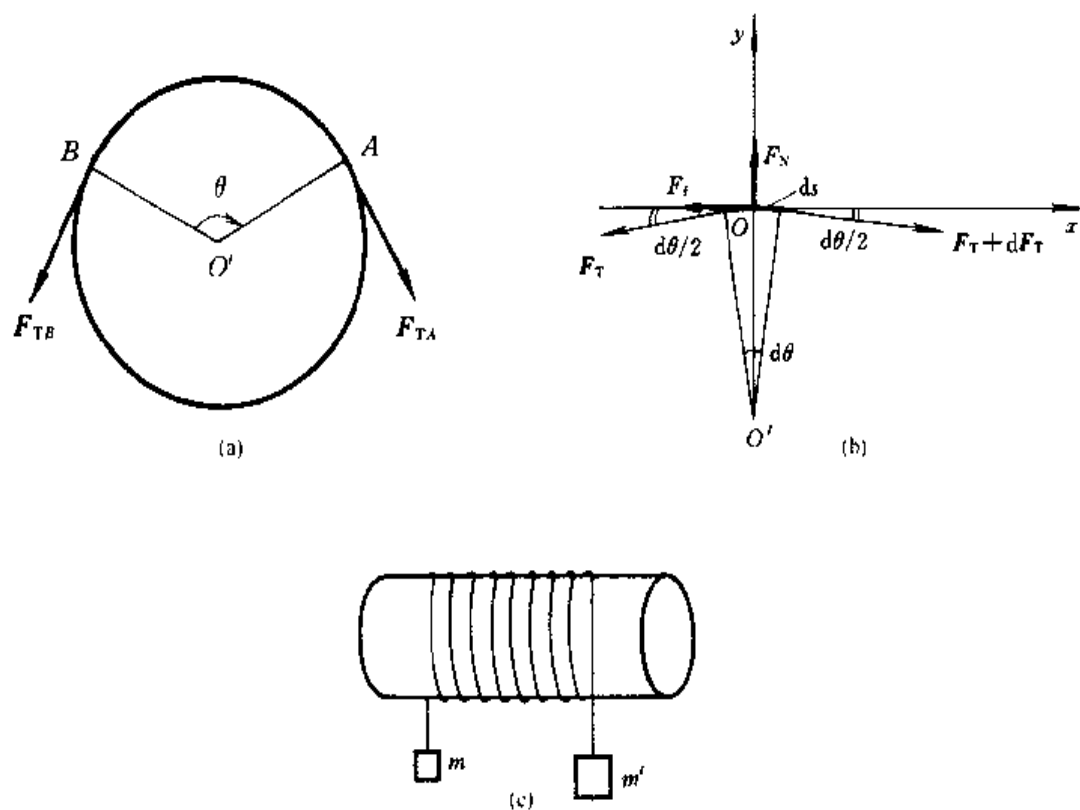


图 2-3

$$F_1 = \mu F_N \quad (3)$$

考虑到 ds 相对圆心 O 的张角 $d\theta$ 很小, 即 $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$, $\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1$. 式(1)和式(2)分别为

$$dF_T = F_1 = \mu F_N \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} dF_1 d\theta + F_1 d\theta = F_N \quad (5)$$

上式中略去二阶无限小量 $d\theta dF_T$, 那么由式(4)和式(5)得

$$\int_{F_{TA}}^{F_{TB}} \frac{dF_1}{F_T} = \mu \int_0^\theta d\theta$$

得

$$F_{TB} = F_{TA} e^{-\mu\theta} \quad (6)$$

上式表明, 由于绳索与圆柱间存在摩擦力, 所以, 绳索两端的张力之比 $\frac{F_{TB}}{F_{TA}}$ 是随张角 θ 按指数规律而变化的. 对于绳索与圆柱间的摩擦因数 $\mu = 0.25$ 来说, 当绳索绕半圈时 ($\theta = \pi$), $\frac{F_{TB}}{F_{TA}} = e^{-0.25\pi} = 0.46$; 当绳索绕 1 圈时 ($\theta = 2\pi$), $\frac{F_{TB}}{F_{TA}} = e^{-0.25 \cdot 2\pi} = 0.21$; 当绳索绕 5 圈时 ($\theta = 10\pi$), $\frac{F_{TB}}{F_{TA}} = e^{-0.25 \cdot 10\pi} = 0.00039$. 如果把绳端点 A 与一负荷相连接, F_{TA} 为负荷所引起的张力, 而绳端点 B 与拉力相连接, F_{TB} 为拉力所引起的张力, 那么, 由上述数据可以看出, 绳索绕

在圆柱上的圈数越多, F_{TB} 比 F_{TA} 就小得越多. 人们常将这个道理用于工农业生产和日常生活之中. 例如, 为了使轮船平稳地停靠在码头上, 人们常将缆绳在桩柱上多绕几圈; 又如, 欲把重物挂在屋内的梁柱的钉子上, 有经验的人总是把系有重物的绳索先在梁柱上绕几圈, 再挂在钉子上, 等等. 你能举几个这方面的例子吗? 在如图 2-3(c) 所示的圆柱上绕有 n 圈绳索. 绳与圆柱之间的摩擦系数仍为 0.25. 如果我们在绳索的两端分别悬挂质量分别为 1 000 g 和 10 g 的两个物体, 并使之平衡. 你知道 n 至少为多少吗? (n 大约是 3 圈, 你算算看)

从式(6)还可以看出, 如果绳索与圆柱间的摩擦可略去不计, 即 $\mu = 0$, 那么 $F_{TB} = F_{TA}$. 这时跨过光滑圆柱上的轻绳中各处的张力均相等. 如不特别指明, 本章所讨论的有关绳索跨过滑轮的问题, 都不计及绳索与滑轮间的摩擦力.

2-4 惯性参考系 力学相对性原理

一 惯性参考系

在运动学中, 研究物体的运动可任选参考系, 只是所选择的参考系应给物体运动的研究带来方便. 那么在动力学中, 应用牛顿运动定律研究物体的运动时, 参考系还能不能任意选择呢? 也就是说牛顿运动定律是否对任意参考系都适用呢? 我们通过下面的例子来进行讨论.

在火车车厢内的一个光滑桌面上, 放一个小球. 当车厢相对地面以匀速前进时, 这个小球相对桌面处于静止状态, 而路基旁的人则看到小球随车厢一起作匀速直线运动. 这时, 无论是以车厢还是以地面作为参考系, 牛顿运动定律都是适用的. 因为小球在水平方向不受外力作用, 它保持静止或匀速直线运动状态. 但当车厢突然相对于地面以向前的加速度 a 运动时, 车厢内的乘客观察到此小球相对于车厢内的桌面以加速度 $-a$ 向后作加速运动. 这个现象, 对处于不同参考系的观察者, 可以得出不同的结论. 站在路基旁的人, 觉得这件事是很自然的, 因为小球和桌面之间非常光滑, 它们之间的摩擦力可以忽略不计, 因此, 当桌面随车厢一起以加速度 a 向前运动时, 小球在水平方向并没有受到外力作用, 所以它仍保持原来的运动状态, 牛顿运动定律此时仍然是适用的. 然而对于坐在车厢内的乘客来说, 这就很不好理解了, 既然小球在水平方向没有受到外力作用, 小球怎么会在水平方向具有 $-a$ 的加速度呢? 由此可见, 牛顿运动定律不是对任意的参考系都适用的. 我们把适用牛顿运动定律的参考系叫做惯性参考系, 简称惯性系; 反之, 就叫非惯性系. 例如前面所述的地面以及相对地面作匀速直线运动的车厢, 都是惯性系, 而相对地面作加速运动的车厢则是非惯性系.

要确定一个参考系是不是惯性系, 只能依靠观察和实验. 地球这个参考系能否看作是惯性系呢? 生活实践和实验表明, 地球可视为惯性系, 但考虑到地球的自转和公转, 所以地球又不是一个严格的惯性系. 然而, 一般在研究地面上物体

的运动时,由于地球对太阳的向心加速度和地面上的物体对地心的向心加速度都比较小,所以,地球仍可近似地看成是惯性系。

二 力学相对性原理

设有两个参考系 $S(Oxyz)$ 和 $S'(O'x'y'z')$, 它们对应的坐标轴都相互平行,

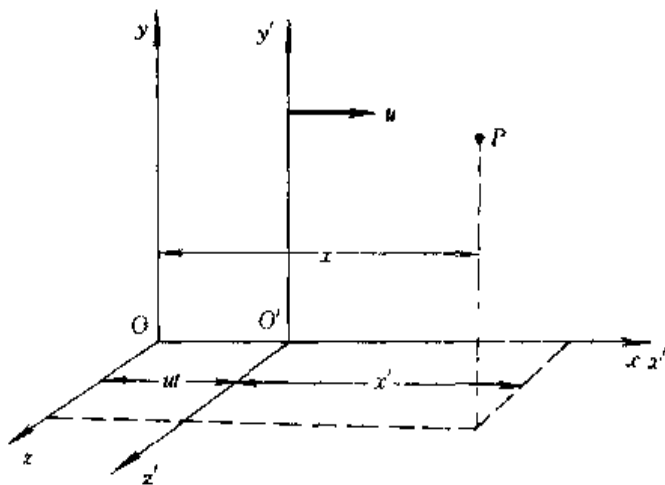


图 2-4 相互作匀速直线运动的两个参考系

且 Ox 轴与 Ox' 轴相重合(图 2-4). 其中 S 系是惯性系, S' 系以恒定的速度 u , 沿 x 轴正向相对 S 系作匀速直线运动, 所以 S' 系也是惯性系. 若有一质点 P 相对 S' 系的速度为 \boldsymbol{v}' , 相对 S 系的速度为 \boldsymbol{v} , 由第 1-4 节关于速度相对性的讨论可知, 它们之间的关系为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}$$

将上式对时间 t 求导数, 并考虑到 \boldsymbol{u} 为常量, 故可得

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}$$

即

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' \quad (2-8)$$

上式表明, 当惯性参考系 S' 以恒定的速度相对惯性参考系 S 作匀速直线运动时, 质点在这两个惯性系中的加速度是相同的. 由于 S' 系也是惯性系, 质点所受的力为 $\boldsymbol{F}' = m\boldsymbol{a}'$. 考虑到 $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}$, 所以

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}'$$

这就是说, 在这两个惯性系中, 牛顿第二定律的数学表达式也具有相同形式^①, 即

^① 这里的力学相对性原理是属于经典力学或牛顿力学范畴的, 也就是指物体的运动速度是低速 (即 $v \ll c$) 的情形. 在高速的情况下, 运动物体将遵守狭义相对论性的相对性原理. 这将在第 18 章第 18-3 节中讨论.

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

在此我们再次强调：相对于惯性系作匀速直线运动的一切参考系都是惯性系。地球或固定在地球上的物体可作为惯性系，相对地面作匀速直线运动的物体也可作为惯性系。当由惯性系 S 变换到惯性系 S' 时，牛顿运动方程的形式不变。换句话说，在所有惯性系中，牛顿运动定律都是等价的。对于不同惯性系，牛顿力学的规律都具有相同的形式，在一惯性系内部所作的任何力学实验，都不能确定该惯性系相对于其他惯性系是否在运动。这个原理叫做力学相对性原理或伽利略相对性原理。

2-5 牛顿定律的应用举例

牛顿定律是物体作机械运动的基本定律，它在实践中有着广泛的应用。本节将通过举例来说明如何应用牛顿定律分析问题和解决问题。

在牛顿第二定律 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ 中， \boldsymbol{F} 是作用在运动物体上的合外力，因此在应用牛顿第二定律时，首先要正确地分析运动物体的受力情况。若一个物体上同时受到几个力的作用，为了便于分析物体受力的情况，应当把它们图示出来；作示力图时，首先要将所研究的物体从与之相联系的其他物体中“隔离”出来，然后把作用在此物体上的力一个不漏地都画出来，还必须正确地标明力的方向。这种分析物体受力的方法，叫做隔离体法。隔离体法是分析物体受力的有效方法，我们应当熟练地掌握这种方法。应当注意，在画隔离体的示力图时，要避免多画或漏画作用力。

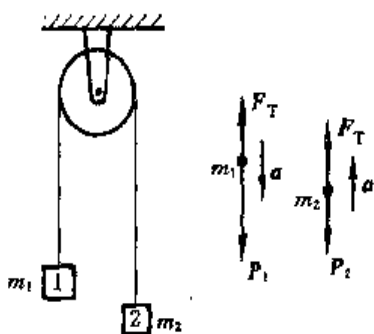
对隔离体画出示力图后，还要根据题意选择适当的坐标系。对于直线运动来说，常选取加速度的方向为坐标轴的正向。然后按照所选定的坐标系，由牛顿第二定律列出每一隔离体的运动方程的矢量式及其分量式，最后对运动方程求解。求解时最好先用文字符号得出结果，而后再代入已知数据进行运算。这样既简单明瞭，又可避免数字重复运算。

例 1 阿特伍德 (Atwood) 机。

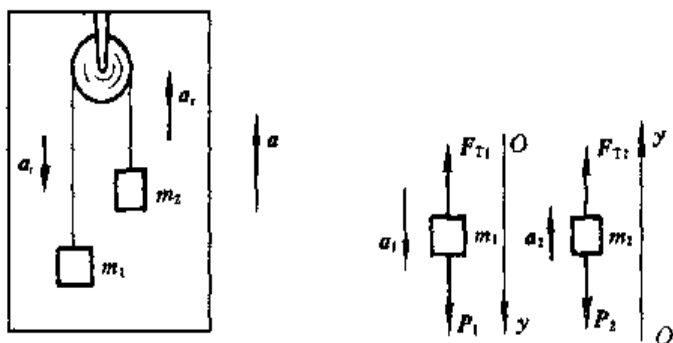
(1) 如图 2-5(a) 所示，一根细绳跨过定滑轮，在细绳两侧各悬挂质量分别为 m_1 和 m_2 的物体，且 $m_1 > m_2$ 。假设滑轮的质量^①与细绳的质量均略去不计，滑轮与细绳间的摩擦力以及轮轴的摩擦力亦略去不计。试求重物释放后，物体的加速度和细绳的张力。

(2) 若将上述装置固定在如图 2-5(b) 所示的电梯顶部。当电梯以加速度 a 相对地面竖直向上运动时，试求两物体相对电梯的加速度和细绳的张力。

① 若滑轮的质量不能略去不计，这个问题将如何求解呢？可参阅本书第四章第 4-2 节中的例 4。



(a)



(b)

图 2-5

解 (1) 选取地面为惯性参考系,并作如图 2-5(a)所示的示力图.考虑到可忽略细绳和滑轮质量的条件,故细绳作用两物体上的力 F_{T1} 、 F_{T2} 与绳的张力 F_T 应相等,即 $F_{T1} = F_{T2} = F_T$.又按图示的加速度 a ,则根据牛顿第二定律,有

$$m_1 g - F_T = m_1 a$$

$$F_T - m_2 g = m_2 a$$

联立求解以上两式,可得两物体的加速度的大小和绳的张力分别为

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \quad F_T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

(2) 仍选取地面为惯性参考系,电梯相对地面的加速度为 a .如图 2-5(b)所示,如以 a_r 为物体 1 相对电梯的加速度,那么物体 1 相对地面的加速度为 $a_1 = a_r + a$.由牛顿第二定律,有

$$P_1 + F_{T1} = m_1 a_1$$

按如图所选的坐标,考虑到物体 1 被限制在 y 轴上运动,且 $a_1 = a_r + a$,故上式为

$$m_1 g - F_T = m_1 a_1 = m_1 (a_r + a) \quad (1)$$

由于绳的长度不变,故物体 2 相对电梯的加速度的大小也是 a_r .物体 2 相对地面的加速度为 a_2 .按如图所选的坐标, $a_2 = a_r + a$.于是,物体 2 的运动方程为

$$F_T - m_2 g = m_2 a_2 = m_2 (a_r + a) \quad (2)$$

由式(1)和式(2),可得物体1和2相对电梯的加速度的大小为

$$a_r = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g + a)$$

将上式代入式(1),轻绳的张力为

$$F_T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g + a)$$

例2 如图2-6所示,长为 l 的轻绳,一端系质量为 m 的小球,另一端系于定点 O .开始时小球处于最低位置.若使小球获得如图所示的初速 v_0 ,小球将在铅直平面内作圆周运动.求小球在任意位置的速率^①及绳的张力.

解 由题意知,在 $t=0$ 时,小球位于最低点,速率为 v_0 .在时刻 t 时,小球位于点 A ,轻绳与铅直线成 θ 角,速率为 v .此时小球受重力 P 和绳的拉力 F_T 作用.由于绳的质量不计,

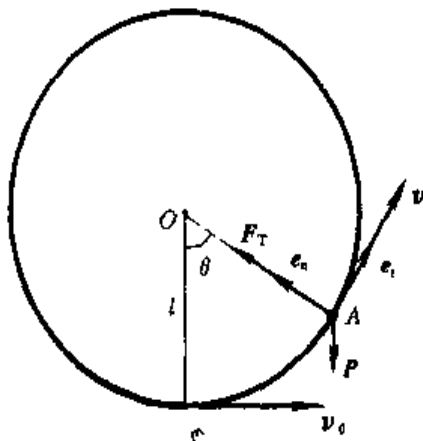


图 2-6

故绳的张力就等于绳对小球的拉力.由牛顿第二定律,小球的运动方程为

$$F_T + mg = ma \quad (1)$$

为列出小球运动方程的分量式,我们选取自然坐标系,并以过点 A 与速度 v 同向的轴线为 e_t 轴,过点 A 指向圆心 O 的轴为 e_n 轴.那么式(1)在两轴上的运动方程分量式分别为

$$F_T - mg \cos \theta = ma_n$$

$$- mg \sin \theta = ma_t$$

由变速圆周运动知, a_n 为法向加速度, $a_n = v^2/l$, a_t 为切向加速度, $a_t = dv/dt$.这样上面两式为

$$F_T - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{l} \quad (2)$$

$$- mg \sin \theta = m \frac{dv}{dt} \quad (3)$$

^① 计算在铅直平面内作圆周运动质点的速度有许多方法,这里介绍的是利用牛顿力学方程求解运动学问题.下一章还将介绍用能量方法求解这样的问题.如果绳索的质量不能略去不计,或者用一细棒替代绳索,又如何求解呢?本书第四章第4-2节例5将介绍这类问题的解法.

式(3)中
$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

由角速度定义式 $\omega = d\theta/dt$, 以及角速度 ω 与线速率之间的关系式 $v = l\omega$, 上式为

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v}{l} \frac{dv}{d\theta}$$

于是式(3)可写成

$$v dv = -gl \sin \theta d\theta$$

上式积分, 并注意初始条件, 有

$$\int_0^v v dv = -gl \int_0^\theta \sin \theta d\theta$$

得
$$v = \sqrt{v_0^2 + 2lg(\cos \theta - 1)} \quad (4)$$

把上式代入式(2), 得

$$F_T = m \left(\frac{v_0^2}{l} - 2g + 3g \cos \theta \right) \quad (5)$$

从式(4)可以看出, 小球的速率与位置有关, 即 $v(\theta)$ 在 $0 \rightarrow \pi$ 之间, 随着 θ 角增大, 小球速率减小; 而在 $\pi \rightarrow 2\pi$ 之间, 随着 θ 角增大, 小球速率增大. 小球作变速率圆周运动.

从式(5)也可以看出, 在小球从最低点向上升的过程中, 随着角度 θ 的增加, 绳对小球的张力 F_T 逐步减小, 在到达最高点时, 张力 F_T 最小; 而后在小球向下降的过程中, 张力 F_T 又逐步增加, 在到达最低点时, 张力最大.

例 3 如图 2-7(a) 所示(圆锥摆), 长为 l 的细绳一端固定在天花板上, 另一端悬挂质量为 m 的小球, 小球经推动后, 在水平面内绕通过圆心 O 的铅直轴作角速率为 ω 的匀速率圆周运动. 问绳和铅直方向所成的角度 θ 为多少? 空气阻力不计.

解 小球受重力 \mathbf{P} 和绳的拉力 \mathbf{F}_T 作用, 其运动方程为

$$\mathbf{F}_T + \mathbf{P} = m\mathbf{a} \quad (1)$$

式中 \mathbf{a} 为小球的加速度.

由于小球在水平面内作线速率为 $v = r\omega$ 的匀速率圆周运动. 过圆周上任意点 A , 取自然坐标系, 其轴线方向的单位矢量分别为 \mathbf{e}_n 和 \mathbf{e}_t . 小球的法向加速度的大小为 $a_n = v^2/r$, 而切向加速度 $a_t = 0$, 且小球在任意位置的速度 \mathbf{v} 的方向均与 \mathbf{P} 和 \mathbf{F}_T 所成的平面垂直. 因此, 按图 2-7(b) 所选的坐标, 式(1)的分量式为

$$F_T \sin \theta - ma_n = m \frac{v^2}{r} = mr\omega^2$$

和

$$F_T \cos \theta - P = 0$$

由图知 $r = l \sin \theta$, 故由上两式, 得

$$F_T = m\omega^2 l$$

及

$$\cos \theta = \frac{mg}{m\omega^2 l} = \frac{g}{\omega^2 l}$$

得

$$\theta = \arccos \frac{g}{\omega^2 l}$$

可见, 当 ω 越大时, 绳与铅直方向所成的夹角 θ 也越大.

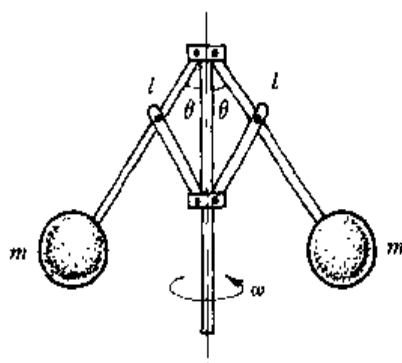
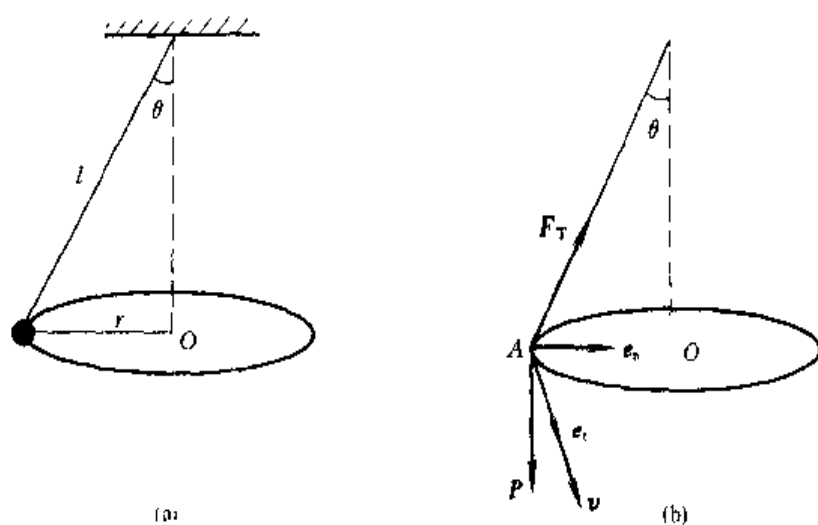


图 2-7

值得一提的是,在蒸汽机发展的早期,瓦特就是根据上述圆锥摆的摆角 θ 随角速度 ω 的改变而改变的道理制成蒸汽机的调速器的.图 2-7(c)是调速器的示意图,当转速超过一定限度时,摆角增大,使阀门关闭,进入汽缸中蒸汽的量有所减少;当转速过低时,摆角减少,使阀门打开,增加汽缸中的蒸汽量,从而达到调速作用.现在许多机器还在使用这种调速器.

例 4 我们在上一章讨论抛体运动时曾略去空气阻力对运动的影响.实际上,空气阻力对抛体运动的影响是十分显著的,而且阻力的大小是随抛体的速率的变化而改变的.这里,我们只能作一些简化处理,对较为简单的模型进行讨论,从而认识其基本规律.我们假设空气对抛体的阻力与抛体的速度成正比,即 $F_r = -k\mathbf{v}$, k 为比例系数.我们还假设抛体的质量为 m 、初速为 \mathbf{v}_0 、抛射角为 α .求抛体运动的轨迹方程.

解 取如图 2-8 所示的 Oxy 平面坐标系.抛体在点 A 受到重力 $P(mg)$ 和空气阻力 $F_r(-k\mathbf{v})$ 的作用,由牛顿第二定律的分量式,可得

$$\begin{cases} ma_x = m \frac{dv_x}{dt} = -kv_x \\ ma_y = m \frac{dv_y}{dt} = -mg - kv_y \end{cases}$$

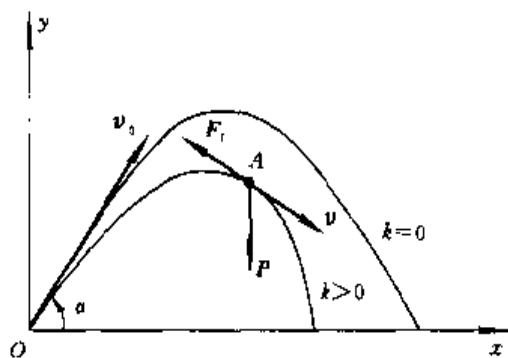


图 2-8

由此有

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m} dt \\ \frac{k dv_y}{mg + kv_y} = -\frac{k}{m} dt \end{cases}$$

对上两式分别积分,并考虑起始条件, $t=0$ 时, $v_{0x}=v_0 \cos \alpha$, $v_{0y}=v_0 \sin \alpha$,得

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha e^{-kt/m} \\ v_y = \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right) e^{-kt/m} - \frac{mg}{k} \end{cases}$$

由于 $dx = v_x dt$, $dy = v_y dt$, 将上两式代入后取积分,得

$$x = \frac{m}{k} (v_0 \cos \alpha) (1 - e^{-kt/m}) \quad (1)$$

$$y = \frac{m}{k} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right) (1 - e^{-kt/m}) - \frac{mg}{k} t \quad (2)$$

再消去式(1)和式(2)中的 t , 可得抛体的轨迹方程为

$$y = \left(\tan \alpha + \frac{mg}{kv_0 \cos \alpha} \right) x + \frac{m^2 g}{k^2} \ln \left(1 - \frac{k}{mv_0 \cos \alpha} x \right) \quad (3)$$

显然式(3)不是抛物线方程。

例 5 物体在粘滞流体中的运动.

当物体在流体(气体或液体)中运动时,要受到流体的阻力作用.一般来说,流体阻力的大小与物体的尺寸、形状、速率以及物体和流体的性质等有关.当速率不太大时,对于球形的物体,粘滞阻力的大小为^①

$$F_r = 6\pi r \eta v$$

阻力的方向与物体运动的方向相反.式中 r 为球形物体的半径, v 为其速率, η 为流体的粘滞

^① 一般来说,流体对物体的阻力 $f(v)$ 比较复杂,可与 v^n ($n > 1$) 成正比, n 的取值由实验确定.只是在物体的速率不太大时, n 才取 1.

系数,上式也叫做斯托克斯公式^①.

有一个质量为 m , 半径为 r 的球体, 由水面静止释放沉入水底, 试求此球体的下沉速度与时间的函数关系. 设球体竖直下沉, 其路径为一直线.

解 如图 2-9(a) 所示, 球体在水中受到重力 P 、浮力 F_B 和粘滞阻力 F_r 的作用. 浮力 F_B 的大小等于物体所排除的流体的重量, 即 $F_B = m'g$. 粘滞阻力的大小为 $F_r = 6\pi\eta rv$. 重力 P 与浮力 F_B 的合力称为驱动力 $F_0 = P + F_B$, 其大小为 $F_0 = P - F_B = mg - m'g$, 其方向与球体的运动方向相同, 为一恒力 [图 2-9(a)]. 由牛顿第二定律, 可得出球体的运动方程为

$$F_0 - F_r = ma$$

即
$$F_0 - 6\pi\eta rv = m \frac{dv}{dt}$$

令 $b = 6\pi r\eta$, 上式为

$$F_0 - bv = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

因此有

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m} \left(v - \frac{F_0}{b} \right) \quad (2)$$

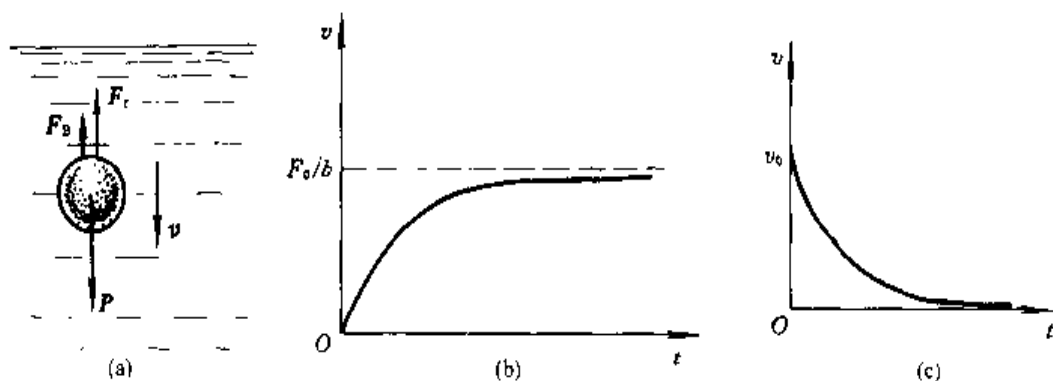


图 2-9

由于球体是由静止释放, 即 $t=0$ 时, $v_0=0$, 故其速度是随时间的增加而增加的; 当 $v = F_0/b$ 时, 球体的速度才达到极限值. 上式取分离变数并积分, 得

$$\int_0^v \frac{dv}{v - \left(\frac{F_0}{b} \right)} = -\frac{b}{m} \int_0^t dt$$

于是有

$$v = \frac{F_0}{b} [1 - e^{-(b/m)t}] \quad (3)$$

按照式(3)的速度-时间函数, 可作如图 2-9(b) 所示的图线.

从式(3)和图线可以看出, 球体的下沉速度随时间的增加而增加; 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e^{-(b/m)t} \rightarrow 0$. 这时下沉速度达到极限值 $v_L = F_0/b$. 实际上, 下沉速度达到极限值并不需要无限长的时

^① 斯托克斯 (G. G. Stokes, 1819—1903), 英国物理学家和数学家. 他于 1851 年首次得到球形物体在粘滞流体中运动时所受阻力的公式, 后称为斯托克斯公式.

间. 当 $t = 3m/b$ 时, $e^{-b/m \cdot t} = e^{-3} \approx 0.05$, 从式(3)可以看出, 此时的下沉速度为

$$v = \frac{F_0}{b}(1 - 0.05) = v_L(1 - 0.05) = 0.95v_L$$

这就是说, 下沉速度已达极限速度的 95%. 因此, 一般认为 $t \geq 3m/b$ 时, 下沉速度已达到极限速度了, 如 $t = 5m/b$, 则 $v = 0.993v_L$.

若球体落在水面上时具有竖直向下的速率 v_0 , 且在水中所受的浮力 F_0 与重力 P 亦相等, 即 $F_0 = F_B + P = 0$, 那么球体在水中仅受阻力 $F_r = -bv$ 的作用, 则式(1)可写成

$$m \frac{dv}{dt} = -bv \quad (4)$$

由题意可设 $t=0$ 时, $v = v_0$, 上式取分离变数并积分, 有

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} \int_0^t dt$$

积分后, 可得

$$v = v_0 e^{-b/m \cdot t} \quad (5)$$

球体在水中的速率与时间的关系如图 2-9(c) 所示.

* 2-6 非惯性系 惯性力

从第 2-4 节关于惯性参考系的讨论中已经知道, 牛顿定律只适用于惯性系, 而相对惯性系作加速运动的参考系, 牛顿定律则是不适用的. 这种相对惯性系作加速运动的参考系就是非惯性系. 相对地面加速运动的火车、升降机以及旋转的圆盘等都是非惯性系.

为了方便地求解非惯性系中的力学问题, 我们引入惯性力. 如图 2-10 所示的加速火车,

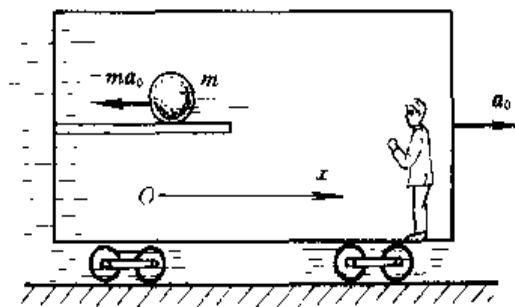


图 2-10 惯性力

当车以加速度 a_0 沿 Ox 轴正向相对地面参考系运动时, 从车中的观察者看来, 在光滑平板上的小球以加速度 $-a_0$ 沿 Ox 轴负向运动. 如果我们设想作用在质量为 m 的小球上有一个惯性力, 并认为这个惯性力为 $F_i = -ma_0$, 那么对火车这个非惯性参考系也可应用牛顿第二定律了. 这就是说, 对处于加速度为 a_0 的火车中的观察者来说, 他认为有一个大小等于 ma_0 , 方向与 a_0 相反的惯性力作用在小球上.

一般来说, 如果作用在物体上的力含有惯性力 F_i , 那么牛顿第二定律的数学表达式为

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_i = m\mathbf{a} \quad (2-9)$$

或

$$\mathbf{F} - (m\mathbf{a}_0) = m\mathbf{a}$$

式中 \mathbf{a}_0 是非惯性系相对惯性系的加速度, \mathbf{a} 是物体相对非惯性系的加速度, \mathbf{F} 是物体所受到的除惯性力以外的合外力。

例 1 如图 2-11(a) 所示的三棱柱以加速度 \mathbf{a}_0 沿水平面向左运动, 它的斜面是光滑的。若质量为 m 的物体恰能静止于斜面上, 求物体对三棱柱的压力。

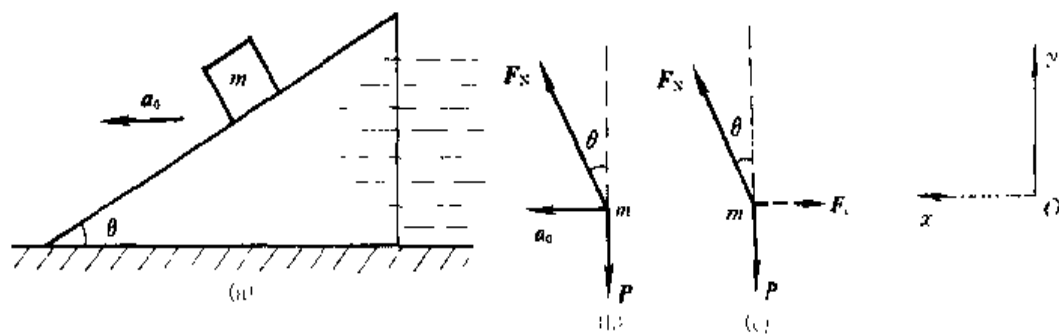


图 2-11

解 (1) 以地面为参考系, m 受到重力 $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ 和支持力 \mathbf{F}_N 的作用 [图 2-11(b)], 其运动方程为

$$\mathbf{F}_N + \mathbf{P} = m\mathbf{a}_0$$

式中 \mathbf{a}_0 为 m 相对地面参考系的加速度, 按如图所示的坐标, 其分量式为

$$F_N \cos \theta - mg = 0$$

$$F_N \sin \theta = ma_0$$

解上两式, 得

$$F_N = m \sqrt{g^2 + a_0^2}$$

(2) 以三棱柱为参考系, 由于三棱柱相对地面参考系 (惯性系) 的加速度为 \mathbf{a}_0 , 故三棱柱这个参考系是非惯性系。

m 除受到重力 $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ 和支持力 \mathbf{F}_N 的作用外, 还要受到惯性力 \mathbf{F}_i 的作用 [图 2-11(c)], 其运动方程为

$$\mathbf{F}_N + \mathbf{P} + \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$$

其中 \mathbf{a} 为 m 相对三棱柱的加速度。由题意知, m 静止在斜面上, 故 $\mathbf{a} = 0$ 。此外, 惯性力 $\mathbf{F}_i = m\mathbf{a}_0$, 因此, 上述运动方程为

$$\mathbf{F}_N + m\mathbf{g} - m\mathbf{a}_0 = 0$$

按如图所示的坐标, 其分量式为

$$F_N \cos \theta - mg = 0$$

$$F_N \sin \theta - ma_0 = 0$$

解上面两式亦可得

$$F_N = m \sqrt{g^2 + a_0^2}$$

例 2 动力摆可用来测定车辆的加速度. 在如图 2-12 所示的车厢内, 一根质量可略去不计的细棒, 其一端固定在车厢的顶部, 另一端系一小球, 当列车以加速度 a 行驶时, 细杆偏离竖直线成 α 角. 试求加速度 a 与摆角 α 间的关系.

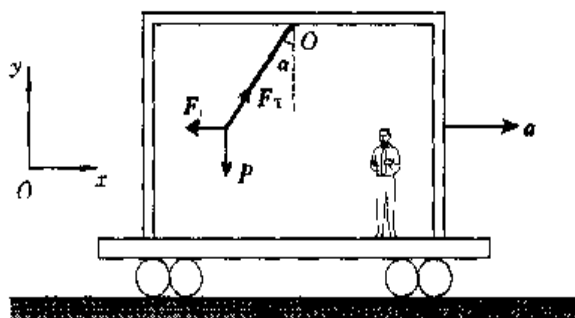


图 2-12 动力摆

解 设以加速度 a 运动的车厢为参考系, 此参考系为非惯性系. 在此非惯性系中的观测者认为, 当细棒的摆角为 α 时, 小球受到重力 P 、拉力 F_T 和惯性力 $F_i = -ma$ 的作用. 由于小球处于平衡状态, 所以有如下方程:

$$mg + F_T - ma = 0$$

上式在 Ox 轴和 Oy 轴上的分量式则为

$$F_T \cos \alpha - mg = 0, \quad F_T \sin \alpha - ma = 0$$

解得

$$a = g \tan \alpha$$

一般来说, 车辆的加速度不是很大, 此时 $\alpha < 5^\circ$, 故上式为 $a \approx g\alpha$. 这样由摆角即可测出车辆的加速度.

下面我们来介绍惯性离心力的概念. 如图 2-13 所示, 在水平放置的转台上, 有一轻弹簧

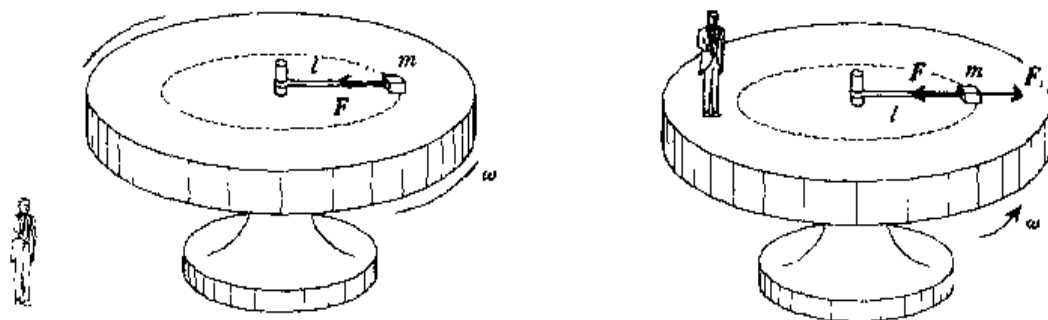


图 2-13 惯性离心力

系在细绳中间, 细绳的一端系在转台中心, 另一端系一质量为 m 的小球. 设转台平面非常光滑, 它与小球和弹簧的摩擦力均可略去不计. 转台可绕垂直于转台中心的竖直轴以匀角速度 ω 转动. 有两个观察者, 一个站在地面上 (处在惯性系中), 另一个相对转台静止并随转台一起转动 (处在非惯性系中). 当转台转动时, 站在地面上的观察者观察到弹簧被拉长. 这时, 绳对小球作用的力为指向转台中心的向心力 F . 力 F 的大小为 $ml\omega^2$. 从牛顿第二定律来说, 这一点是很好理解的, 在向心力作用下, 小球作匀速率圆周运动. 而相对转台静止的另一个观察

者,虽也观察到弹簧被拉长,有力 F 沿向心方向作用在小球上,但小球却相对转台静止不动,这就不好理解了.为什么有力作用在小球上,小球却静止不动呢?于是这个观察者认为,要使小球保持平衡的事实仍然遵从牛顿第二定律,就必须想像有一个与向心力方向相反、大小相等的力作用在小球上.这个力 F ,叫做惯性离心力.应当注意,向心力和惯性离心力都是作用在同一小球上的,它们不是作用力和反作用力.也就是说,它们不服从牛顿第三定律.

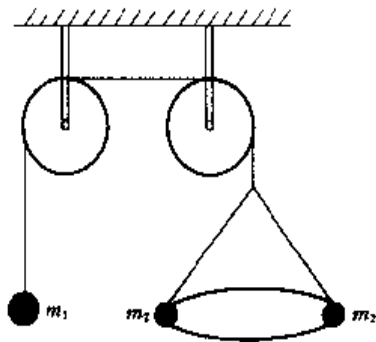
问 题

2-1 在略去空气阻力的情况下,轻重不等的两物体在地球表面附近从同一高处自由下落.亚里士多德认为:“重的物体应比轻的物体先落地”.对于亚里士多德的这一观点,你觉得怎样?

2-2 一车辆沿弯曲公路运动.试问作用在车辆上的力的方向是指向道路外侧,还是指向道路的内侧^①?

2-3 将一质量略去不计的轻绳,跨过无摩擦的定滑轮.一只猴子抓住绳的一端,绳的另一端悬挂一个质量和高度均与猴子相等的镜子.开始时,猴子与镜在同一水平面上.猴子为了不看到镜中的猴像,它作了下面三项尝试:(1) 向上爬;(2) 向下爬;(3) 松开绳子自由下落.这样猴子是否就看不到它在镜中的像了吗?

2-4 如图所示,轻绳与定滑轮间的摩擦力略去不计,且 $m_1 = 2m_2$.若使质量为 m_2 的两个物体绕公共竖直轴转动,两边能否保持平衡?



问题 2-4 图



问题 2-5 图

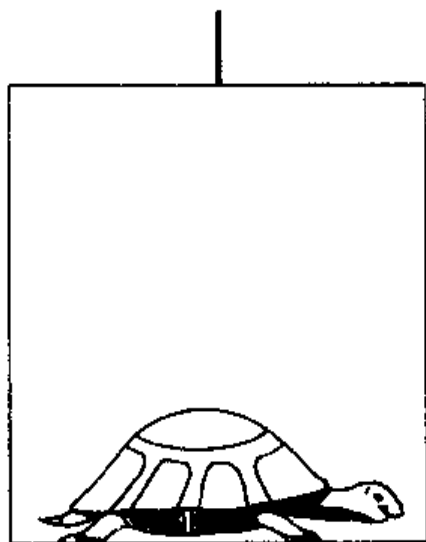
2-5 如图所示,一半径为 R 的木桶,以角速度 ω 绕其轴线转动.有一人紧贴在木桶壁上,人与木桶间的静摩擦因数为 μ_0 .你知道在什么情形下,人会紧贴在木桶壁上而不掉下

^① 关于这个问题的较详细的讨论可阅:马文蔚等主编《物理学原理在工程技术中的应用》之“外轨超高”(高等教育出版社出版).

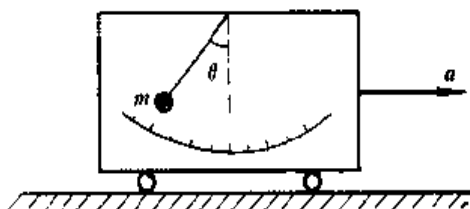
来吗?

2-6 一人站在电梯中的磅秤上,在什么情况下,他的视重为零?在什么情况下,他的视重大于他在地面上的体重?

2-7 在升降机中有一只海龟,如图所示.在什么情况下,海龟会“飘浮”在空中?



问题 2-7 图



问题 2-9 图

2-8 在空间站中的宇航员“没有重量”,你怎样判断地球引力对它的影响呢?

2-9 为测量车厢的加速度,有人提出这样一个办法,在车厢顶上悬挂一根长为 l 的细绳,绳下系一质量为 m 的小球,并在竖直位置放一量角器(如图所示).通过测量绳与竖直线的摆角 θ 可测出车厢的加速度.你知道其物理原理吗?

2-10 在火车车厢中的光滑桌面上,放置一个钢制小球.当火车的速率增加时,车厢内的观察者和铁轨上的观察者看到小球的运动状态将会发生怎样的变化?如果火车的速率减小,情况又将怎样?你能对上述现象加以说明吗?

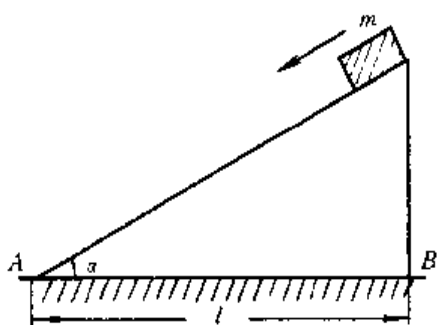
习 题

2-1 一木块能在与水平面成 α 角的斜面上匀速下滑.若使它以速率 v_0 沿此斜面向上滑动,试证明它能沿该斜面向上滑动的距离为 $v_0^2/(4g\sin\alpha)$.

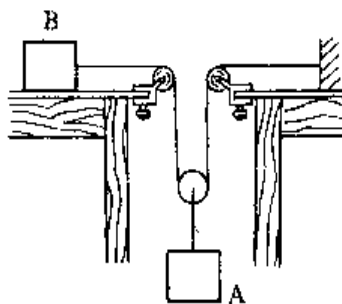
2-2 假使地球自转速度加快到能使赤道上的物体处于失重状态,一昼夜的时间有多长?

2-3 一枚质量为 $3.03 \times 10^4 \text{ kg}$ 的火箭,在与地面成 58.0° 倾角的发射架上,点火后发动机以恒力 61.2 kN 作用于火箭,火箭始终以与地面成 58.0° 的夹角飞行.经 48.0 s 后关闭发动机,计算此时火箭的高度及距发射点的距离.(忽略燃料质量和空气阻力)

2-4 图示一斜面,倾角为 α ,底边 AB 长为 $l = 2.1 \text{ m}$,质量为 m 的物体从斜面顶端由静止开始向下滑动,斜面的摩擦因数为 $\mu = 0.14$.试问,当 α 为何值时,物体在斜面上下滑的时间最短?其数值为多少?



习题 2-4 图



习题 2-6 图

2-5 工地上有一吊车,将甲、乙两块混凝土预制板吊起送至高空.甲块质量为 $m_1 = 2.00 \times 10^3 \text{ kg}$,乙块质量为 $m_2 = 1.00 \times 10^3 \text{ kg}$.设吊车、框架和钢丝绳的质量不计.试求下述两种情况下,钢丝绳所受的张力以及乙块对甲块的作用力:(1)两物块以 $10.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 的加速度上升;(2)两物块以 $1.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 的加速度上升.从本题的结果,你能体会到起吊重物时必须缓慢加速的道理吗?

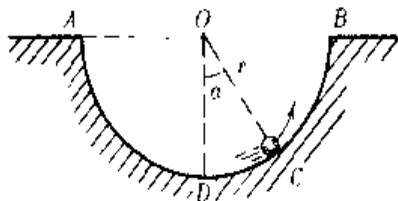
2-6 如图所示,已知两物体 A、B 的质量均为 $m = 3.0 \text{ kg}$,物体 A 以加速度 $a = 1.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 运动,求物体 B 与桌面间的摩擦力.(滑轮与连接绳的质量不计.)

2-7 质量为 m' 的长平板以速度 v' 在光滑平面上作直线运动,现将质量为 m 的木块轻轻平稳地放在长平板上,板与木块之间的滑动摩擦因数为 μ ,求木块在长平板上滑行多远才能与板取得共同速度?

2-8 直升飞机的螺旋桨由两个对称的叶片组成,每一叶片的质量 $m = 136 \text{ kg}$,长 $l = 3.66 \text{ m}$.求当它的转速 $n = 320 \text{ r/min}$ 时,两个叶片根部的张力.(设叶片是宽度一定、厚度均匀的薄片.)

2-9 在一只半径为 R 的半球形碗内,有一粒质量为 m 的小钢球,当小球以角速度 ω 在水平面内沿碗内壁作匀速圆周运动时,它距碗底有多高?

2-10 一质量为 m 的小球最初位于如图所示的 A 点,然后沿半径为 r 的光滑圆轨道 ADCB 下滑.试求小球到达点 C 时的角速度和对圆轨道的作用力.



习题 2-10 图

2-11 光滑的水平桌面上放置一半径为 R 的固定圆环,物体紧贴环的内侧作圆周运动,其摩擦因数为 μ .开始时物体的速率为 v_0 ,求:(1) t 时刻物体的速率;(2) 当物体速率从 v_0 减少到 $\frac{1}{2}v_0$ 时,物体所经历的时间及经过的路程.

2-12 一质量为 10 kg 的质点在力 $F = (120\text{ N}\cdot\text{s}^{-1})t + 40\text{ N}$ 作用下,沿 x 轴作直线运动.在 $t=0$ 时,质点位于 $x=5.0\text{ m}$ 处,其速度 $v_0=6.0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.求质点在任意时刻的速度和位置.

2-13 轻型飞机连同驾驶员总质量为 $1.0\times 10^3\text{ kg}$.飞机以 $55.0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速率在水平跑道上着陆后,驾驶员开始制动,若阻力与时间成正比,比例系数 $\alpha=5.0\times 10^2\text{ N}\cdot\text{s}^{-1}$,求:(1) 10 s 后飞机的速率;(2) 飞机着陆后 10 s 内滑行的距离.

2-14 质量为 m 的跳水运动员,从 10.0 m 高台上由静止跳下落入水中.高台与水面距离为 h .把跳水运动员视为质点,并略去空气阻力.运动员入水后垂直下沉,水对其阻力为 bv^2 ,其中 b 为一常量.若以水面上一点为坐标原点 O ,竖直向下为 Oy 轴,求:(1) 运动员在水中的速率 v 与 y 的函数关系.(2) 若 $b/m=0.40\text{ m}^{-1}$,跳水运动员在水中下沉多少距离才能使其速率 v 减少到落水速率 v_0 的 $1/10$? (假定跳水运动员在水中的浮力与所受的重力大小恰好相等.)

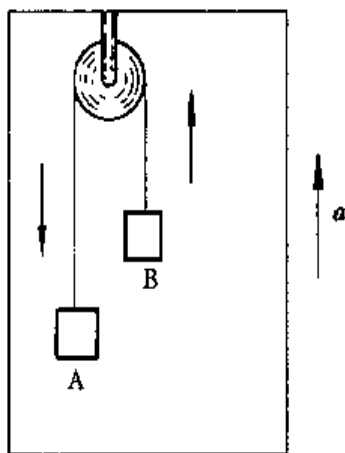
2-15 自地球表面垂直上抛一物体,要使它不返回地面,其初速度最小为多少? (略去空气阻力作用.)

2-16 质量为 45.0 kg 的物体,由地面以初速 $60.0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 竖直向上发射,物体受到空气的阻力为 $F_c = kv$,且 $k=0.03\text{ N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$. (1) 求物体发射到最大高度所需的时间. (2) 最大高度为多少?

2-17 一物体自地球表面以速率 v_0 竖直上抛.假定空气对物体阻力的值为 $F_c = kmv^2$,其中 m 为物体的质量, k 为常量.试求:(1) 该物体能上升的高度;(2) 物体返回地面时速度的值. (设重力加速度为常量.)

2-18 质量为 m 的摩托车,在恒定的牵引力 F 的作用下工作,它所受的阻力与其速率的平方成正比,它能达到的最大速率是 v_m .试计算从静止加速到 $v_m/2$ 所需的时间以及所走过的路程.

2-19 如图所示,电梯相对地面以加速度 a 竖直向上运动.电梯中有一滑轮固定在电梯



习题 2-19 图

顶部,滑轮两侧用轻绳悬挂着质量分别为 m_1 和 m_2 的物体 A 和 B.设滑轮的质量和滑轮与

绳索间的摩擦均略去不计. 已知 $m_1 > m_2$, 如以加速度运动的电梯为参考系, 求物体相对地面的加速度和绳的张力.

· 2 ~ 20 在光滑水平面上, 放一质量为 m' 的三棱柱 A, 它的斜面的倾角为 α . 现把一质量为 m 的滑块 B 放在三棱柱的光滑斜面上. 试求: (1) 三棱柱相对于地面的加速度; (2) 滑块相对于地面的加速度; (3) 滑块与三棱柱之间的正压力.

第三章 动量守恒定律和能量守恒定律

牛顿第二定律指出,在外力作用下,质点的运动状态要发生改变,获得加速度.然而力不仅作用于质点,而且更普遍地说是作用于质点系的.此外,力作用于质点或者质点系往往还有一段持续时间,或者持续一段距离,这就是力对时间的累积作用和力对空间的累积作用.在这两种累积作用中,质点或质点系的动量、动能或能量将发生变化或转移.在一定条件下,质点系内的动量或能量将保持守恒.动量守恒定律和能量守恒定律不仅适用于力学,而且为物理学中各种运动形式所遵守,只要通过某些扩展和修改即可.更进一步说,它们是自然界中已知的一些基本守恒定律中的两个.本章的主要内容有:质点和质点系的动量定理和动能定理,外力与内力、保守力与非保守力等概念,以及动量守恒定律、机械能守恒定律和能量守恒定律.

3-1 质点和质点系的动量定理

一 冲量 质点的动量定理

在上一章中,将牛顿第二定律表述为:“动量为 p 的质点,在合外力 F 的作用下,其动量随时间的变化率等于作用在质点上的合外力”,其数学表达式为

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$$

上式可写成

$$Fdt = dp = d(mv)$$

在低速运动的牛顿力学范围内,质点的质量可视为是不改变的,故 $d(mv)$ 可写成 $m dv$. 此外,一般说来,作用在质点上的力是随时间而改变的,即力是时间的函数, $F = F(t)$. 考虑到以上两点,在时间间隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ 内,上式的积分为

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t)dt = p_2 - p_1 = mv_2 - mv_1 \quad (3-1)$$

式中 v_1 和 p_1 是质点在时刻 t_1 的速度和动量, v_2 和 p_2 是质点在时刻 t_2 的速度和动量. $\int_{t_1}^{t_2} F(t)dt$ 为力对时间的积分,称为力的冲量,用符号 I 表示. 式(3-

1)的物理意义是:在给定时间间隔内,外力作用在质点上的冲量,等于质点在此时间内动量的增量.这就是质点的动量定理.

应当指出,冲量 I 是矢量.一般来说,冲量的方向并不与动量的方向相同,而是与动量增量的方向相同.

式(3-1)是质点动量定理的矢量表达式,在直角坐标系中,其分量式为

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = mv_{2x} - mv_{1x} \\ I_y &= \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = mv_{2y} - mv_{1y} \\ I_z &= \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = mv_{2z} - mv_{1z} \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

显然,质点在某一轴线上的动量增量,仅与该质点在此轴线上所受外力的冲量有关.

下面简单说明一下动量 p 的物理意义.从动量定理可以知道,在相等的冲量作用下,不同质量的物体,其速度变化是不相同的,但它们的动量的变化却是一样的,所以从过程角度来看,动量 p 比速度 v 能更恰当地反映了物体的运动状态.因此,一般描述物体作机械运动时的状态参量,用动量 p 比用速度 v 更确切些.动量 p 和位矢 r 是描述物体机械运动状态的状态参量.

二 质点系的动量定理

上面我们讨论了质点的动量定理.然而在许多问题中还需研究由一些质点构成的质点系的动量变化与作用在质点系上的力之间的关系.

如图 3-1 所示,在系统 S 内有两个质点 1 和 2,它们的质量分别为 m_1 和

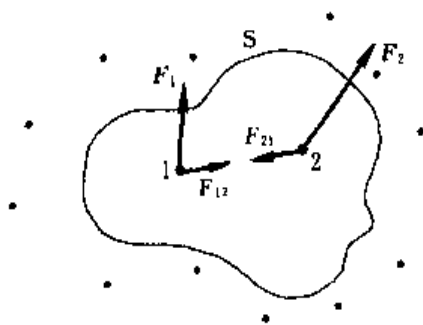


图 3-1 质点系的内力和外力

m_2 .系统外的质点对它们作用的力叫做外力,系统内质点间的相互作用力则叫内力.设作用在质点上的外力分别是 F_1 和 F_2 ,而两质点相互作用的内力分别为 F_{12} 和 F_{21} .根据质点的动量定理,在 $\Delta t = t_2 - t_1$ 时间内,两质点所受力的冲量

和动量增量分别为

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}) dt = m_1 \mathbf{v}_1 - m_1 \mathbf{v}_{10}$$

和

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}) dt = m_2 \mathbf{v}_2 - m_2 \mathbf{v}_{20}$$

将上两式相加,有

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}) dt \\ &= (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) - (m_1 \mathbf{v}_{10} + m_2 \mathbf{v}_{20}) \end{aligned} \quad (3-3)$$

由牛顿第三定律知 $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, 所以系统内两质点间的内力之和, $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$, 故上式为

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) dt = (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) - (m_1 \mathbf{v}_{10} + m_2 \mathbf{v}_{20})$$

上式表明, 作用于两质点组成系统的合外力的冲量等于系统内两质点动量之和的增量, 亦即系统的动量增量。

上述结论容易推广到由 n 个质点所组成的系统. 如果系统内含有 n 个质点, 那么式(3-3)可改写成

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{\text{ex}} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{\text{in}} \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_{i0} \end{aligned}$$

考虑到内力总是成对出现, 且大小相等、方向相反, 故其矢量和必为零, 即

$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{\text{in}} = 0$. 设作用于系统的合外力用 \mathbf{F}^{ex} 表示, 且系统的初动量和末动量各为 \mathbf{p}_0 和 \mathbf{p} , 那么上式可改写为

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}^{\text{ex}} dt = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_{i0} \quad (3-4a)$$

或

$$\mathbf{I} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 \quad (3-4b)$$

式(3-4)表明, 作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量. 这就是质点系的动量定理.

如同质点的动量定理一样, 也可将式(3-4)的矢量表达式写成像式(3-2)那样的分量式.

需要强调指出: 作用于系统的合外力是作用于系统内每一质点的外力的矢量和. 只有外力才对系统的动量变化有贡献, 而系统的内力(系统内各质点间的

相互作用)是不能改变整个系统的动量的,这是牛顿第三定律的直接结果.利用这个道理来研究几个物体组成的系统的动力学问题就可化繁为简了.

对于在无限小的时间间隔内,质点系的动量定理可写成

$$\mathbf{F}^{\text{ex}} dt = d\mathbf{p}$$

或

$$\mathbf{F}^{\text{ex}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (3-4c)$$

上式表明,作用于质点系的合外力等于质点系的动量随时间的变化率.

在人造地球卫星的定轨和运行过程中,常常需要纠正同步卫星的运行轨道.近来,采用一种叫做离子推进器^①的系统所产生的推力,使卫星能保持在适当的方位上.其基本原理就是质点系的动量定理.

例1 如图3-2所示,一质量为 0.05 kg 、速率为 $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的钢球,以与钢板法线呈 45° 角的方向撞击在钢板上,并以相同的速率和角度弹回来.设球与钢板的碰撞时间为 0.05 s ,求在此碰撞时间内钢板所受到的平均冲力.

解 由题意知 $v_1 = v_2 = v = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$,按图所选定的坐标, \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 均在 x, y 平面内,故 \mathbf{v}_1 在 Ox 轴和 Oy 轴上的分量为 $v_{1x} =$

$v \cos \alpha$, $v_{1y} = v \sin \alpha$, \mathbf{v}_2 在 Ox 轴和 Oy 轴上的分量为 $v_{2x} = v \cos \alpha$, $v_{2y} = v \sin \alpha$. 由动量定理的分量式(3-2)可得,在碰撞过程中球所受的冲量为

$$\begin{aligned} F_x \Delta t &= mv_{2x} - mv_{1x} \\ &= mv \cos \alpha - (-mv \cos \alpha) \\ &= 2mv \cos \alpha \\ \bar{F}_y \Delta t &= mv_{2y} - mv_{1y} \\ &= mv \sin \alpha - mv \sin \alpha = 0 \end{aligned}$$

因此,球所受的平均冲力为

$$\bar{F} = F_x = \frac{2mv \cos \alpha}{\Delta t}$$

如令 \bar{F}' 为球对钢板作用的平均冲力,则由牛顿第三定律有 $\bar{F} = -\bar{F}'$,即球对钢板作用的平均冲力与钢板对球作用的平均冲力大小相等,方向相反,故有

$$\bar{F}' = \frac{2mv \cos \alpha}{\Delta t}$$

代入已知数据,

$$\bar{F}' = \frac{2 \times 0.05 \times 10 \times \cos 45^\circ}{0.05} \text{ N} = 14.1 \text{ N}$$

\bar{F}' 的方向与 Ox 轴正向相反.

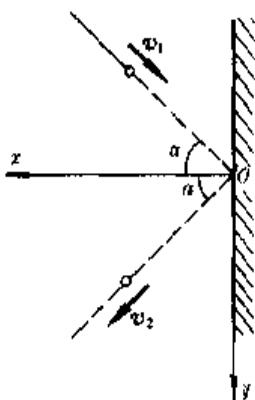


图3-2

^① 可参阅马文蔚等主编《物理学原理在工程技术中的应用》之“离子推进器”(高等教育出版社出版).

例 2 如图 3-3 所示,一柔软链条长为 l , 单位长度的质量为 λ . 链条放在桌上, 桌上有一小孔, 链条一端由小孔稍伸下, 其余部分堆在小孔周围. 由于某种扰动, 链条因自身重量开始落下. 求链条下落速度与落下距离之间的关系. 设链与各处的摩擦均略去不计, 且认为链条柔软得可自由伸开.

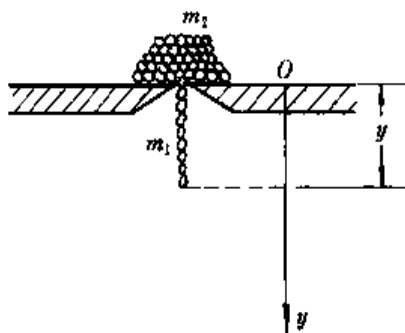


图 3-3

解 如图所示,选桌面上一点为坐标原点 O , 竖直向下的轴为 Oy 轴正向. 在某时刻 t , 链下垂部分的长度为 y . 此时在桌面上尚有长为 $l-y$ 的链条. 如选链条为一系统, 那么此系统含有竖直悬挂的链条和在桌面上的链条两部分, 它们之间作用的力为内力. 由于链与各处的摩擦略去不计, 故下垂部分链条所受的重力 $P_1 = m_1 g$, 桌面上链条所受的重力 $P_2 = m_2 g$, 所受的支持力 $F_N = -m_2 g$, 所以作用于系统的外力为 $F^{\text{ex}} = m_1 g$, 其中 $m_1 = \lambda y$. 在无限小时间间隔 dt 内, 外力 F^{ex} 在 Oy 轴上的冲量应为 $F^{\text{ex}} dt$, 所以, 由质点系的动量定理可得

$$F^{\text{ex}} dt = \lambda y g dt = dp \quad (1)$$

dp 为系统(即整个链条)的动量增量. 考虑到桌面上那部分链条处于静止状态, 其速度恒为零, 因此, 整个链条中只有下垂部分的动量在改变.

在时刻 t , 链条下垂长度为 y , 下落速度为 v , 因此这部分链条的动量为

$$p = m_1 v = \lambda y v$$

随着链条下落, 链条下垂部分的长度及速度均在增加. 在 dt 时间里, 下垂部分链条动量的增量为

$$dp = \lambda d(yv)$$

把它代入式(1)有

$$\lambda y g dt = \lambda d(yv)$$

也即

$$yg = \frac{d(yv)}{dt}$$

等式两边各乘以 $y dy$, 上式为

$$gy^2 dy = y \frac{dy}{dt} d(yv) = yv d(yv) \quad (2)$$

已知在开始时, 链条尚未下落, 其下落速度当然也为零, 即 $(yv)_{y=0} = 0$. 于是式(2)的积分为

$$g \int_0^y y^2 dy = \int_0^{yv} yv d(yv)$$

得

$$\frac{1}{3} gy^3 = \frac{1}{2} (yv)^2$$

有

$$v = \left(\frac{2}{3} gy \right)^{1/2}$$

这就是链条下落速度与落下距离之间的关系.

3-2 动量守恒定律

从式(3-4)可以看出,当系统所受合外力为零,即 $\mathbf{F}^{\text{ex}} = 0$ 时,系统的总动量的增量亦为零,即 $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = 0$. 这时系统的总动量保持不变,即

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \text{恒矢量} \quad (3-5a)$$

这就是动量守恒定律,它的表述为:当系统所受合外力为零时,系统的总动量将保持不变. 式(3-5a)是动量守恒定律的矢量式. 在直角坐标系中,其分量式为

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \sum m_i v_{ix} = C_1 \quad (F_x^{\text{ex}} = 0) \\ p_y &= \sum m_i v_{iy} = C_2 \quad (F_y^{\text{ex}} = 0) \\ p_z &= \sum m_i v_{iz} = C_3 \quad (F_z^{\text{ex}} = 0) \end{aligned} \right\} \quad (3-5b)$$

式中 C_1 、 C_2 和 C_3 均为恒量.

在应用动量守恒定律时应该注意以下几点:

(1) 在动量守恒定律中,系统的动量是守恒量或不变量. 由于动量是矢量,故系统的总动量不变是指系统内各物体动量的矢量和不变,而不是指其中某一个物体的动量不变. 此外,各物体的动量还必须都应相对于同一惯性参考系.

(2) 系统的动量守恒是有条件的. 这个条件就是系统所受的合外力必须为零. 然而,有时系统所受的合外力虽不为零,但与系统的内力相比较,外力远小于内力,这时可以略去外力对系统的作用,认为系统的动量是守恒的. 像碰撞、打击、爆炸等这类问题,一般都可以这样来处理,这是因为参与碰撞的物体的相互作用时间很短,相互作用内力很大,而一般的外力(如空气阻力、摩擦力或重力)与内力比较,可忽略不计,所以在碰撞过程的前后,可认为参与碰撞的物体系统的总动量保持不变.

(3) 如果系统所受外力的矢量和并不为零,但合外力在某个坐标轴上的分量为零,此时,系统的总动量虽不守恒,但在该坐标轴的分动量则是守恒的. 这一点在处理某些问题是很有用的.

(4) 动量守恒定律是物理学最普遍、最基本的定律之一. 动量守恒定律虽然是从表述宏观物体运动规律的牛顿运动定律导出的,但近代的科学实验和理论分析都表明:在自然界中,大到天体间的相互作用,小到质子、中子、电子等微观粒子间的相互作用都遵守动量守恒定律;而在原子、原子核等微观领域中,牛顿运动定律却是不适用的. 因此,动量守恒定律比牛顿运动定律更加基本,它与能

量守恒定律一样,是自然界中最普遍、最基本的定律之一。

最后还应指出,动量定理和动量守恒定律只在惯性系中才成立.因此运用它们来求解问题时,要选定一惯性系作为参考系。

例 1 设有一静止的原子核,衰变辐射出一个电子和一个中微子^①后成为一个新的原子核.已知电子和中微子的运动方向相互垂直,且电子的动量为 $1.2 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$,中微子的动量为 $6.4 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.问新的原子核的动量的值和方向如何?

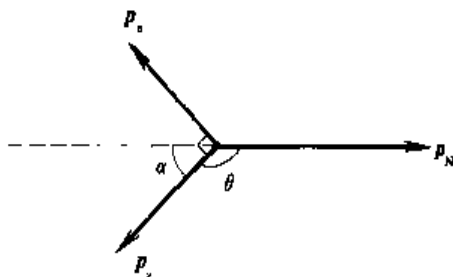


图 3-4

解 以 p_e 、 p_ν 和 p_N 分别代表电子、中微子和新原子核的动量,且 p_e 与 p_ν 相互垂直(图 3-4).在原子核衰变的短暂时间内,粒子间的内力远大于外界作用于该粒子系统上的外力,故粒子系统在衰变前后的动量是守恒的.考虑到原子核在衰变前是静止的,所以衰变后电子、中微子和新原子核的动量之和亦应为零,即

$$p_e + p_\nu + p_N = 0$$

由于 p_e 与 p_ν 垂直,有

$$p_N = (p_e^2 + p_\nu^2)^{1/2}$$

代入已知数据,得

$$p_N = [(1.2 \times 10^{-22})^2 + (6.4 \times 10^{-23})^2]^{1/2} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 1.36 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

图 3-4 中的 α 角为

$$\alpha = \arctg \frac{p_e}{p_\nu} = \arctg \frac{1.2 \times 10^{-22}}{6.4 \times 10^{-23}} = 61.9^\circ$$

或者新原子核的动量 p_N 与中微子动量 p_ν 之间的夹角为

$$\theta = 180^\circ - 61.9^\circ = 118.1^\circ$$

例 2 一枚返回式火箭以 $2.5 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率相对地面沿水平方向飞行.设空气阻力不计.现由控制系统使火箭分离为两部分,前方部分是质量为 100 kg 的仪器舱,后方部分是质量为 200 kg 的火箭容器.若仪器舱相对火箭容器的水平速率为 $1.0 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.求仪器舱和火箭容器相对地面的速度。

^① 中微子是“基本”粒子的一种,常记符号 ν 表示,不带电,稳定.中微子的存在是在研究原子核的 β 衰变时从理论上首先提出的,但由于它同其它物质的作用极为微弱,直到 1956 年才比较直接地在实验中被观察到。

解 如图 3-5 所示,以地面为惯性系 $S(Oxyz)$. 设 \boldsymbol{v} 为火箭分离前火箭相对惯性系 S 的速度, \boldsymbol{v}_1 和 \boldsymbol{v}_2 为火箭分离后,仪器舱和火箭容器相对惯性系 S 的速度, \boldsymbol{v}' 为分离后仪器舱相对火箭容器的速度. 取火箭容器为惯性系 $S'(O'x'y'z')$, S' 系沿 xx' 轴以速度 \boldsymbol{v}_2 相对 S 系运动. 由相对运动的速度公式,有

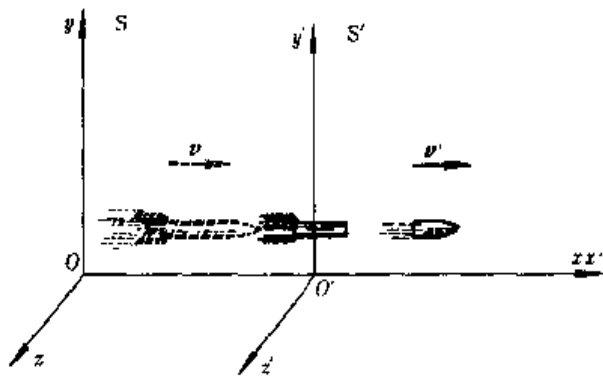


图 3-5

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}'$$

由于 \boldsymbol{v}_1 、 \boldsymbol{v}_2 和 \boldsymbol{v}' 都在同一水平方向上,故上式为

$$v_1 = v_2 + v'$$

在火箭分离前后,它只受到铅直方向的重力作用,所以沿水平方向动量守恒,有

$$(m_1 + m_2)v = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

解上两式,得

$$v_2 = v - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v'$$

代入数据,有

$$v_2 = (2.5 \times 10^3 - \frac{1}{3} 1.0 \times 10^3) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 2.17 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_1 = (2.17 \times 10^3 + 1.0 \times 10^3) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 3.17 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

v_1 和 v_2 都为正值,它们的速度方向相同,且与 \boldsymbol{v} 同向. 只不过仪器舱经火箭推动后其速率变大,相反,火箭容器的速率却变慢了,从而实现了动量的转移.

* 3-3 系统内质量移动问题

当系统内部的质量发生移动时,系统内各部分的质量、速度及动量要发生变化. 这类由于质量移动而引起的速度及动量变化问题是很多的. 如砂粒流入车厢,柔软绳索落在桌面上,水滴在水蒸汽中下落,以及火箭在飞行中由燃料燃烧而射出大量粒子等,都属这类问题. 其中,火箭飞行是特别有趣的问题.

在火箭的运行过程中,火箭内部的燃料发生爆炸性的燃烧,产生大量的气体粒子,这些气体粒子从火箭的末端沿与火箭运动相反的方向射出. 设每个粒子相对火箭的速率均为 u , u

叫做喷射速率.在这过程中,由于不断有燃料变为气体粒子,燃料的质量在减少,而气体粒子的质量在增加.若把火箭、燃料和气体粒子作为一个系统,那么虽然这个系统的总质量是守恒的,但有部分质量从燃料移至气体粒子中.

为简单起见,我们讨论如图 3-6 所示的情况.设在时刻 t ,火箭-燃料系统(简称系统)的质量为 m' ,它相对某一选定的惯性系(如地球)的速度为 \mathbf{v} ;在 $t \rightarrow t + \Delta t$ 时间间隔内,有质

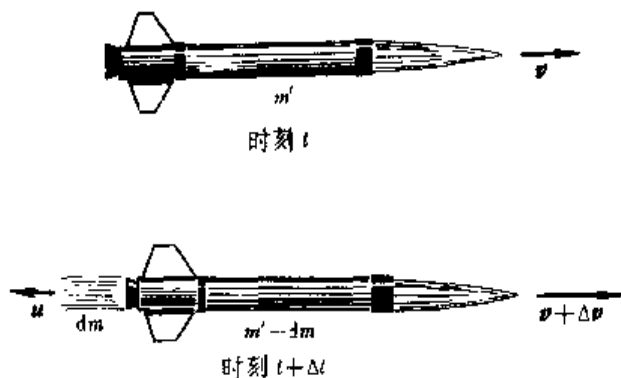


图 3-6 火箭飞行原理

量为 Δm 的燃料变为气体粒子,并以速度 u 相对火箭喷射出去,此时系统则包括火箭、燃料以及由部分燃料变成的气体粒子,在时刻 $t + \Delta t$ 火箭相对选定的惯性系的速度为 $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$,而气体粒子相对选定的惯性系的速度则为 $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

按上述分析,在时刻 t ,系统的动量为

$$\mathbf{p}(t) = m' \mathbf{v}$$

在时刻 $t + \Delta t$,系统的动量为

$$\mathbf{p}(t + \Delta t) = (m' - \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) + \Delta m(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v} + \mathbf{u})$$

在 $t \rightarrow t + \Delta t$ 时间间隔内,系统动量的增量为

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}(t + \Delta t) - \mathbf{p}(t)$$

即

$$\Delta \mathbf{p} = m' \Delta \mathbf{v} + \mathbf{u} \Delta m$$

由上式可得动量随时间的变化率为

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m' \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{u} \frac{dm}{dt}$$

上式中 $\frac{dm}{dt}$ 是气体质量随时间的变化率,而气体粒子是由火箭中喷射出来的,故有

$$\frac{dm}{dt} = - \frac{dm'}{dt}$$

于是,上式可写成

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m' \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{u} \frac{dm'}{dt}$$

从式(3-4c)我们已知道作用于系统的合外力应等于系统的动量随时间的变化率,因此,若以 \mathbf{F} 表示作用于系统的合外力,则有

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m' \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{u} \frac{dm'}{dt}$$

上式也可写成

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{u} \frac{dm'}{dt} \quad (3-6)$$

$\mathbf{u} \frac{dm'}{dt}$ 叫做火箭发动机的推力. 从上式可以看出, 火箭的加速度是与外力 \mathbf{F} 及推力的矢量和成正比的. 当外力给定时, 推力越大, 火箭获得的加速度 $d\mathbf{v}/dt$ 也越大. 从式(3-6)还可以看出, 要使火箭获得大的推力, 必须使气体具有较大的喷射速率 u 和较大的气体排出率 dm'/dt . 如气体喷射速率为 $2000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, 气体排出率为 $300 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$, 则火箭的推力为 $6 \times 10^5 \text{ N}$.

对于在远离地球大气层之外, 星际空间(即所谓自由空间)中飞行的火箭, 可以认为不受外力作用, 即 $\mathbf{F} = 0$. 于是式(3-6)为

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u} \frac{dm'}{dt}$$

或

$$m' d\mathbf{v} = \mathbf{u} dm'$$

如设气体的喷射速度 \mathbf{u} 为恒矢量, 且在 $t=0$ 时, 火箭的质量为 m'_0 , 速度为 \mathbf{v}_0 , 在 $t=t$ 时, 火箭的质量为 m' , 速度为 \mathbf{v} , 那么对上式积分, 得

$$\int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}} d\mathbf{v} = \mathbf{u} \int_{m'_0}^{m'} \frac{dm'}{m'}$$

有

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{u} \ln \frac{m'}{m'_0} = -\mathbf{u} \ln \frac{m'_0}{m'}$$

应当注意, 气体相对火箭的喷射速度 \mathbf{u} 与火箭相对惯性系的速度 \mathbf{v} 方向相反. 若选取 \mathbf{v} 的方向为正向, 上式可写为

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u} \ln \frac{m'_0}{m'} \quad (3-7)$$

式中 m'_0/m' 叫做质量比. 显然, 火箭的质量比越大, 气体的喷射速率越大, 火箭获得的速度也越大. 然而, 仅靠增加单级火箭的质量比或增大气体喷射速率来提高火箭的飞行速度是不够的. 从目前的理论分析, 气体喷射速率的理论值只能是 $5000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, 而实际上能达到的气体喷射速度最多只是这个值的一半; 此外, 由于单级火箭燃料的运载量有限, 所以质量比也不能很大. 这就是说, 依靠单级火箭是不能实现人造卫星或宇宙飞行器的发射的, 必须采用多级火箭. 下面我们简述三级火箭的发射.

如有一人造卫星由三级火箭从地面静止发射, 每级火箭的燃料燃烧完后便自动脱落. 设想气体的喷射速率恒为 $u = 2.5 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, 且略去燃料完后脱落燃料容器的质量. 若一、二、三级火箭的质量比各为 $m'_0/m'_1 = 4$, $m'_1/m'_2 = 3$, $m'_2/m'_3 = 2$, 由式(3-7)可得各级火箭中的燃料燃烧完后的速率各为

$$v_1 = u \ln \frac{m'_0}{m'_1}$$

$$v_2 = v_1 + u \ln \frac{m'_1}{m'_2}$$

$$v_3 = v_2 + u \ln \frac{m'_2}{m'_3}$$

所以, 第三级火箭中的燃料燃烧完后, 人造卫星的速率为

$$v_3 = u \left(\ln \frac{m'_0}{m'_1} + \ln \frac{m'_1}{m'_2} + \ln \frac{m'_2}{m'_3} \right)$$

代入已知数据, $v_3 = 7.93 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. 这个速率已达人造地球卫星的入轨速率^①. 实际上, 上述计算只是一种估算, 若计及燃料用完后脱落的储存燃料容器的质量, 计算还要复杂得多.



我国长 3B 运载火箭

例 一长为 l 、密度均匀的柔软链条, 其单位长度的质量为 λ . 将其卷成一堆放在地面上 (图 3-7). 若手握链条的一端, 以匀速 v 将其上提. 当链条一端被提高地面高度为 y 时, 求手

^① 有关人造卫星的入轨速率的讨论, 可参阅本章第 3-6 节中例 3. 关于同步卫星的发射和轨道转移等方面的问题, 可参阅马文蔚等主编《物理学原理在工程技术中的应用》之“同步卫星的发射”(高等教育出版社出版).

的提力.

解 取地面为惯性参考系,地面上一点为坐标原点 O , 竖直向上的轴为 Oy 正向. 以整个链条为一系统. 设在时刻 t , 链条一端距原点的高度为 y , 其速率为 v . 由于在地面部分的链条的速度为零, 故在时刻 t , 链条的动量为

$$p(t) = \lambda y v j$$

由于 λ 和 v 均为常量, 故链条的动量随时间的变化率为

$$\frac{dp}{dt} = \lambda v \frac{dy}{dt} j = \lambda v^2 j \quad (1)$$

作用于整个链条上的外力, 有手的提力 F , 重力 $\lambda y g$ 和 $\lambda(l-y)g$ 以及地面对 $(l-y)$ 长链条的支持力 F_N . 由牛顿第三定律知 F_N 与 $\lambda(l-y)g$ 的大小相等, 方向相反, 所以系统所受的合外力为

$$F + \lambda y g = (F - \lambda y g) j \quad (2)$$

由式(1)和式(2)得

$$(F - \lambda y g) j - \lambda v^2 j$$

有

$$F = \lambda v^2 + \lambda y g \quad (3)$$

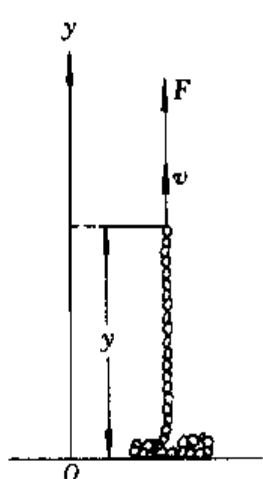


图 3-7

3-4 动能定理

一 功

如有一质点在力 F 的作用下, 沿图 3-8 所示的路径 AB 运动. 设在时刻 t ,

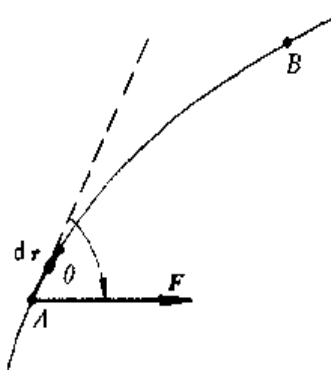


图 3-8 功的定义

质点位于点 A , 经时间间隔 dt , 质点的位移为 $d\mathbf{r}$. 力 F 与质点位移之间的夹角为 θ . 在物理学中, 功的定义是: “力对质点所作的功为力在质点位移方向的分量与位移大小的乘积”. 按此定义, 该力所作的元功为

$$dW = F \cos \theta dr \quad (3-8a)$$

从上式可以看出, 当 $90^\circ > \theta > 0^\circ$ 时, 功为正值, 即力对质点作正功; 当 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 时, 功为负值, 即力对质点作了负功. 由于力 F 与位移 $d\mathbf{r}$ 均为矢量, 从

矢量的标积定义^①知, 上式等号右边为 F 与 $d\mathbf{r}$ 的标积, 即

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (3-8b)$$

上式表明, 虽然力和位移都是矢量, 但它们的标积——功是标量.

^① 参阅附录一中矢量的标积式(10).

如果把式(3-8a)写成 $dW = F(dr \cos \theta)$, 那么功的定义也可以说成是: 力对质点所作的功为质点的位移在力方向的分量和力的大小的乘积. 这个叙述显然与前述功的定义是等效的. 在具体问题中采用哪一种叙述, 视方便而定.

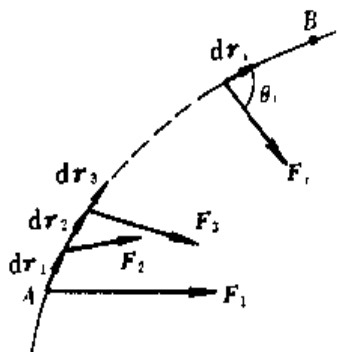


图 3-9 变力的功

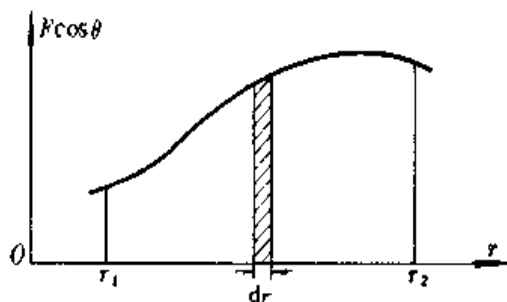


图 3-10 变力作功的图示

若有一质点沿如图 3-9 所示的路径由点 A 运动到点 B, 而在这过程中作用于质点上的力的大小和方向都在改变. 为求得在这过程中变力所作的功, 我们把路径分成很多段的多个位移元, 使得在这些位移元里, 力可近似看成是不变的. 于是, 质点从点 A 移到点 B 时, 变力所作的功应等于力在每段位移元上所作元功的代数和, 即

$$W = \int dW = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B F \cos \theta dr \quad (3-9a)$$

上式是变力作功的表达式.

功常用图示法来计算. 如图 3-10 所示, 图中的曲线表示 $F \cos \theta$ 随路径变化的函数关系. 曲线下方的面积等于变力所作功的代数值.

在直角坐标系中, \mathbf{F} 和 $d\mathbf{r}$ 都是坐标 x, y, z 的函数, 即

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

和

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$$

因此式(3-9a)亦可写成^①

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (3-9b)$$

式(3-9b)是变力作功的另一数学表达式, 它与式(3-9a)是等价的.

上面仅讨论了一个力对质点所作的功. 若有几个力同时作用在质点上, 它们所作的功是多少呢? 设有 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots, \mathbf{F}_i, \dots$ 作用在质点上, 它们的合力为 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots + \mathbf{F}_i + \dots$. 由功的定义式(3-9a)知, 此合力所作的功为

^① 计算中用到 $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$, 可参阅附录一中矢量积分式(24).

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots \mathbf{F}_i + \cdots) \cdot d\mathbf{r}$$

由矢量标积的分配律^①, 上式为

$$W = \int \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} + \int \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{r} + \cdots \int \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r} + \cdots$$

$$\text{即} \quad W = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots W_i + \cdots \quad (3-10)$$

式(3-10)表明, 合力对质点所作的功, 等于每个分力所作的功的代数和. 显然, 上述结果是依据力的叠加原理(即力的独立作用原理)得出的.

在国际单位制中, 力的单位是 N, 位移的单位是 m, 所以功的单位是 N·m, 我们把这个单位叫做焦耳(Joule)^②, 简称焦, 符号是 J. 功的量纲为 ML^2T^{-2} .

在生产实践中, 重要的是要知道功对时间的变化率. 我们定义, 功随时间的变化率叫做功率, 用 P 表示, 则有

$$P = \frac{dW}{dt}$$

利用式(3-8a), 可得

$$P = \frac{dW}{dt} = F \cos \theta \frac{dr}{dt}$$

$$\text{即} \quad P = Fv \cos \theta \quad (3-11)$$

这就是说, 功率等于力在物体运动方向上的分量与物体速度的乘积. 由式(3-11)可以看出, 当发动机的功率一定时, 若要加大牵引力, 就得降低速度; 反之, 若要获得较大的速度, 牵引力就得减少. 若 W 为给定时间 t 内所作的功, 那么, 在此时间内的平均功率 \bar{P} 为

$$\bar{P} = \frac{W}{t}$$

在国际单位制中, 功率的单位名称为瓦特(Watt)^③, 简称瓦, 符号为 W. $1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W}$.

例 1 一质量为 m 的小球竖直落入水中, 刚接触水面时其速率为 v . 设此球在水中所受的浮力与重力相等, 水的阻力为 $F_r = -bv$, b 为一常量. 求阻力对球作的功与时间的函数关系.

解 由于阻力随球的速率而变化, 故阻力做功是属变力做功问题. 取水面上某点为坐标原点 O , 竖直向下的轴为 Ox 轴正向. 由功的定义可知, 水的阻力作的功为

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int -bv dx = - \int bv \frac{dx}{dt} dt$$

^① 参阅附录一中标积分律式(12).

^② 功这个物理量的单位名称定为“焦耳”, 是为了纪念著名的英国科学家焦耳(J. P. Joule, 1818—1889).

$$\text{即} \quad W = -b \int v^2 dt \quad (1)$$

又由第2-5节例5的式(5)知,仅在阻力作用下,物体下落速度与时间的关系为

$$v = v_0 e^{-\frac{b}{m}t} \quad (2)$$

m 是下落物体的质量,在这里就是球的质量.将式(2)代入式(1),有

$$W = -bv_0^2 \int e^{-\frac{2b}{m}t} dt$$

如设小球刚落入水面时为计时起点,即 $t_0 = 0$,那么上式的积分为

$$W = -bv_0^2 \int_0^t e^{-\frac{2b}{m}t} dt = -bv_0^2 \left(-\frac{m}{2b} \right) (e^{-\frac{2b}{m}t} - 1)$$

$$\text{即} \quad W = \frac{1}{2}mv_0^2 (e^{-\frac{2b}{m}t} - 1)$$

二 质点的动能定理

上面我们从力对空间累积作用出发,讨论了力对物体做功的定义及其数学表述.而力对物体做功,则要使物体的运动状态发生变化.它们之间的关系如何呢?

如图3-11所示,一质量为 m 的质点在合外力 F 作用下,自点 A 沿曲线移动到点 B ,它在点 A 和点 B 的速率分别为 v_1 和 v_2 . 设作用在位移元 $d\mathbf{r}$ 上的合外力 F 与 $d\mathbf{r}$ 之间的夹角为 θ .由式(3-8)可得,合外力 F 对质点所作的元功为

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cos \theta dr$$

由牛顿第二定律及切向加速度 a_t 的定义,有

$$F \cos \theta = ma_t = m \frac{dv}{dt}$$

故可得

$$dW = m \frac{dv}{dt} dr = mvdv$$

于是,质点自点 A 移至点 B 这一过程中,合外力所作的总功为

$$W = \int_{v_1}^{v_2} mvdv$$

积分有

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (3-12a)$$

上式表明合外力对质点做功的结果,使得 $\frac{1}{2}mv^2$ 这个量获得了增量,而 $\frac{1}{2}mv^2$ 是与质点的运动状态有关的参量.我们把 $\frac{1}{2}mv^2$ 叫做质点的动能,用 E_k 表示,

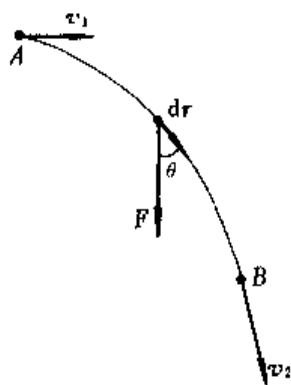


图 3-11 动能定理

即

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

这样, $E_{k1} = \frac{1}{2}mv_1^2$ 和 $E_{k2} = \frac{1}{2}mv_2^2$ 分别表示质点在起始和终了位置时的动能.

式(3-12a)可写成

$$W = E_{k2} - E_{k1} \quad (3-12b)$$

上式表明,合外力对质点所作的功,等于质点动能的增量.这个结论就叫做质点的动能定理. E_{k1} 称为初动能,而 E_{k2} 称为末动能.

关于质点的动能定理还应说明以下两点.

(1) 功与动能之间的联系和区别.只有合外力对质点做功,才能使质点的动能发生变化.功是能量变化的量度,功是与在外力作用下质点的位置移动过程相联系的,故功是一个过程量.而动能则是决定于质点的运动状态的,故它是运动状态的函数.

(2) 与牛顿第二定律一样,动能定理也适用于惯性系.此外,在不同的惯性系中,质点的位移和速度是不同的,因此,功和动能依赖于惯性系的选取.

动能的单位和量纲与功的单位和量纲相同.

应该指出,应用动能定理时要计算功的线积分,故必须知道质点的运动路径.然而在许多情况下,这往往又是十分困难的.值得高兴的是,有些力的线积分与积分路径无关,只与质点的起始和终了位置有关,这些力就是下一节要讲到的保守力.

例2 如图3-12所示,一质量为1.0 kg的小球系在长为1.0 m的细绳下端,绳的上端固定在天花板上.起初把绳子放在与竖直线成 30° 角处,然后放手使小球沿圆弧下落.试求绳与竖直线成 10° 角时,小球的速率.

解 设小球的质量为 m , 细绳长为 l , 在起始时刻细绳与竖直线的夹角为 θ_0 , 小球的速率 $v_0 = 0$. 在某一时刻细绳与竖直线的夹角为 θ , 小球的速率为 v . 小球受到绳的拉力 F_T 和重力 P 的作用. 由功的计算式(3-8)可知,在合外力作用下,小球在圆弧上有无限小位移 ds 时,合外力 F 作的功为

$$dW = F \cdot ds = F_T \cdot ds + P \cdot ds \quad (1)$$

由于 F_T 的方向始终与小球运动方向垂直,故 $F_T \cdot ds = 0$, 而

$$P \cdot ds = P \cos \varphi ds$$

其中 φ 为 P 与 ds 之间的夹角. 由于 $\varphi + \theta = \pi/2$, 故

$$P \cdot ds = P \sin \theta ds$$

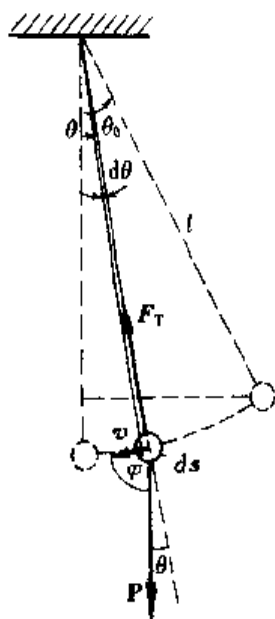


图3-12

从图 3-12 可知,位移 ds 的大小 $ds = -l d\theta$. 于是式(1)可写成

$$dW = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} = -mgl \sin \theta d\theta$$

在摆角由 θ_0 改变为 θ 的过程中,合外力所作的功为

$$W = -mgl \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta = mgl(\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (2)$$

由动能定理式(3-12),得

$$W = mgl(\cos \theta - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

由题意知, $v_0 = 0$. 故绳与竖直线成 θ 角时,小球的速率为

$$v = \sqrt{2gl(\cos \theta - \cos \theta_0)} \quad (3)$$

把已知数据 $l = 1.0 \text{ m}$, $\theta_0 = 30^\circ$, $\theta = 10^\circ$ 代入上式,得

$$v = \sqrt{2 \times 9.8 \times 1.0 (\cos 10^\circ - \cos 30^\circ)} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 1.53 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

3-5 保守力与非保守力 势能

上一节我们介绍了作为机械运动能量之一的动能. 本节将介绍另一种机械能——势能. 为此,我们将从万有引力、重力、弹性力以及摩擦力等力的做功特点出发,引出保守力和非保守力概念,然后介绍引力势能、重力势能和弹性势能.

一 万有引力、重力、弹性力作功的特点

1 万有引力作功

如图 3-13 所示,有两个质量为 m 和 m' 的质点,其中质点 m' 固定不动^①, m 经任一路径由点 A 运动到点 B. 如取 m' 的位置为坐标原点,那么 A、B 两点

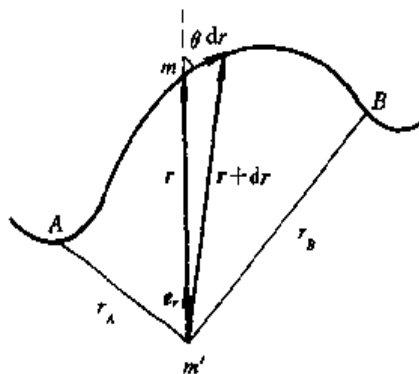


图 3-13 万有引力作功

对 m' 的距离分别为 r_A 和 r_B . 设在某一时刻质点 m 距质点 m' 的距离为 r , 其位

^① 在一般情况下, m' 和 m 都是运动的, 但若 $m' \gg m$, 就可以把质量为 m' 的质点看成是不动的.

矢为 r , 这时质点 m 受到质点 m' 的万有引力为

$$\mathbf{F} = -G \frac{m' m}{r^2} \mathbf{e}_r$$

\mathbf{e}_r 为沿位矢 r 的单位矢量. 当 m 沿路径移动位移元 $d\mathbf{r}$ 时, 万有引力作的功为

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -G \frac{m' m}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r}$$

从图 3-13 可以看出

$$\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{e}_r| |d\mathbf{r}| \cos \theta = |d\mathbf{r}| \cos \theta = dr$$

于是, 上式为

$$dW = -G \frac{m' m}{r^2} dr$$

所以, 质点 m 从点 A 沿任一路径到达点 B 的过程中, 万有引力作的功为

$$W = \int_A^B dW = -Gm'm \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr$$

即

$$W = -Gm'm \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (3-13)$$

上式表明, 当质点的质量 m' 和 m 均给定时, 万有引力作的功只取决于质点 m 的起始和终止的位置, 而与所经过的路径无关. 这是万有引力作功的一个重要特点.

2 重力作功

如图 3-14 所示, 设一个质量为 m 的质点, 在重力作用下从点 A 沿 ACB 路径至点 B , 点 A 和点 B 距地面的高度分别为 y_1 和 y_2 . 因为质点运动的路径为

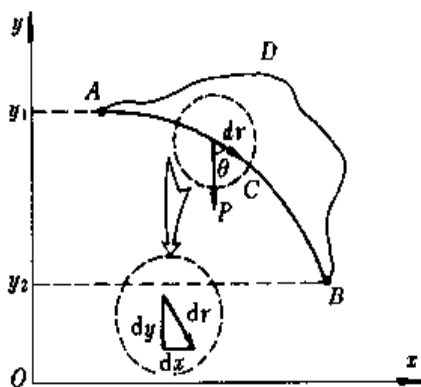


图 3-14 重力沿任意路径对物体作的功

一曲线, 所以重力和质点运动方向之间的夹角是不断变化的. 我们把路径 ACB 分成许多位移元. 在位移元 $d\mathbf{r}$ 中, 重力 \mathbf{P} 所作的功为

$$dW = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r}$$

若质点在平面内运动,按图 3-14 所选坐标,并取地面上某一点为坐标原点 O ,有

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$$

且 $\mathbf{P} = -mg\mathbf{j}$. 于是,前式为

$$dW = -mg\mathbf{j} \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = -mgdy$$

质点由点 A 移至点 B 的过程中,重力作的总功为

$$W = -mg \int_{y_1}^{y_2} dy = -mg(y_2 - y_1)$$

即
$$W = -(mgy_2 - mgy_1) \quad (3-14)$$

若从点 A 沿 ADB 路径至点 B ,显然结果是一样的.上述结果表明,重力做功只与质点的起始和终止位置有关,而与所经过的路径无关.这是重力做功的一个重要特点.

3 弹性力作功

图 3-15 所示是一放置在光滑平面上的弹簧,弹簧的一端固定,另一端与一质量为 m 的物体相连接.当弹簧在水平方向不受外力作用时,它将不发生形变,此时物体位于点 O (即位于 $x=0$ 处),这个位置叫做平衡位置.现以平衡位置 O 为坐标原点,向右为 Ox 轴正向.

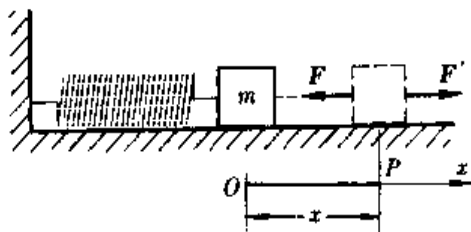


图 3-15 弹簧的伸长

若物体受到沿 Ox 轴正向的外力 F' 作用,弹簧将沿 Ox 轴正向被拉长,弹簧的伸长量即其位移为 x . 根据胡克定律,在弹性限度内,弹簧的弹性力 F 与弹簧的伸长量 x 之间的关系为

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$$

式中 k 称为弹簧的劲度系数. 在弹簧被拉长的过程中,弹性力是变力(图 3-16),但弹簧位移为 dx 时的弹性力 F 可近似看成是不变的. 于是,弹簧位移为 dx 时,弹性力作的元功为

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = -kx\mathbf{i} \cdot dx\mathbf{i} = -kxdx\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$$

有

$$dW = -kxdx$$

这样,弹簧的伸长量由 x_1 变到 x_2 时,弹性力所作的功就等于各个元功之和,数值上等于图 3-16 所示梯形的面积.由积分计算可得

$$W = \int dW = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx$$

$$W = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right) \quad (3-15)$$

从式(3-15)可以看出,对在弹性限度内具有给定劲度系数的弹簧来说,弹性力所作的功只由弹簧起始和终止的位置(x_1 和 x_2)决定,而与弹性形变的过程无关.这一特点与重力做功和万有引力做功的特点是相同的.

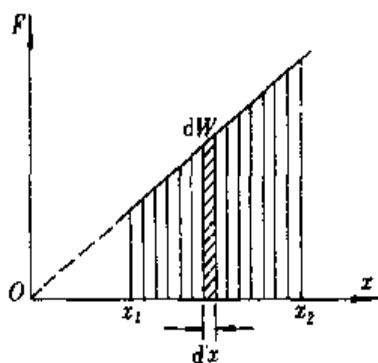


图 3-16 弹性力作的功

二 保守力与非保守力 保守力做功的数学表达式

从上述对重力、万有引力和弹性力做功的讨论中可以看出,它们所作的功只与物体(或弹簧)的始、末位置有关,而与路径无关.这是它们做功的一个共同特点.我们把具有这种特点的力叫做保守力.除了上面所讲的重力、万有引力和弹性力是保守力外,电荷间相互作用的库仑力和原子间相互作用的分子力也是保守力.

如何用一个统一的数学式,把各种保守力做功与路径无关这一特点表达出来呢?

如图 3-17(a)所示,设一物体在保守力作用下自点 A 沿路径 ACB 到达点 B,或沿路径 ADB 到达点 B.根据保守力做功与路径无关的特点,有

$$W_{ACB} = W_{ADB} = \int_{ACB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{ADB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (3-16)$$

显然,此积分结果只是 A、B 两点位置的函数.如果物体沿如图 3-17(b)所示的 ACBDA 闭合路径运动一周时,保守力对物体作的功为

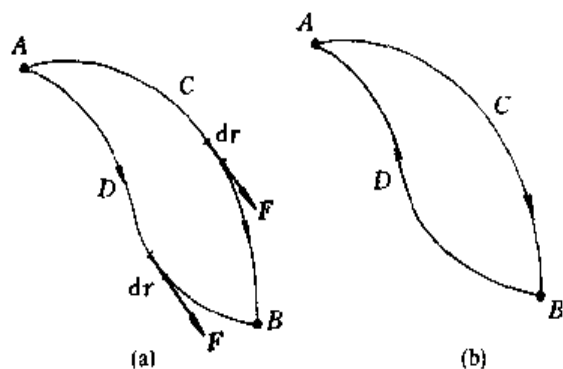


图 3-17 保守力做功

$$W = \oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ ①} = \int_{ACB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{BDA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

由于

$$\int_{BDA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{ADB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

所以,上式为

$$W = \oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{ACB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{ADB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

由式(3-16),上式为

$$W = \oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (3-17)$$

上式表明,物体沿任意闭合路径运动一周时,保守力对它所作的功为零,式中积分号 \oint_l 表示沿闭合曲线积分,式(3-17)是反映保守力做功特点的数学表达式.

无论是重力、万有引力、弹性力、库仑力和分子力它们沿闭合路径做功都符合式(3-17).此外还应指出,式(3-17)是根据式(3-16)得出的,所以,我们可以说,保守力做功与路径无关的特点与保守力沿任意闭合路径一周做功为零的特点是-致的,也即是等效的.

然而,在物理学中并非所有的力都具有做功与路径无关这一特点,例如常见的摩擦力,它所作的功就与路径有关,路径越长,摩擦力作的功也越大.显然,摩擦力就不具有保守力做功的特点.另外,还有一些力做功也与路径有关,如磁场对电流作用的安培力,它作的功也与路径有关.我们把这种做功与路径有关的力叫做非保守力.摩擦力就是一种非保守力.对于非保守力来说,保守力做功的数学表达式(3-16)和式(3-17)是不适用的.

① 对闭合路径的积分是线积分,在数学上用符号 \oint_l 表示.

三 势能

从上面关于万有引力、重力和弹性力作功的讨论中,我们知道这些保守力作功均只与物体的始末位置有关,为此,可以引入势能概念.我们把与物体位置有关的能量称作物体的势能,用符号 E_p 表示.于是,三种势能分别为

$$\left. \begin{array}{ll} \text{重力势能} & E_p = mgy^{\text{①}} \\ \text{引力势能} & E_p = -G \frac{m'm}{r} \\ \text{弹性势能} & E_p = \frac{1}{2} kx^2 \end{array} \right\}$$

式(3-13)、式(3-14)、和式(3-15)可统一写成

$$W = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p \quad (3-18)$$

上式表明,保守力对物体作的功等于物体势能增量的负值.

在一维的情况下,由式(3-18)可得

$$\int_r^{r+\Delta x} F(x)dx = -\Delta E_p(x) = -[E_p(x+\Delta x) - E_p(x)]$$

对于足够小的 Δx 来说,在积分范围内 $F(x)$ 可视为恒定的,于是有

$$F(x) = -\frac{\Delta E_p(x)}{\Delta x}$$

在 $\Delta x \rightarrow 0$ 的情况下,得

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} \quad (3-19)$$

上式表明,作用于物体上的在 Ox 轴上的保守力,等于势能对坐标 x 的导数的负值.

为加深对势能的理解,我们再作一些讨论.

(1) 势能是状态的函数.在保守力作用下,只要物体的起始和终了位置确定了,保守力所作的功也就确定了,而与所经过的路径是无关的.所以说,势能是坐标的函数,亦即是状态的函数,即 $E_p = E_p(x, y, z)$.前面还说过,动能亦是状态的函数, $E_k = E_k(v_x, v_y, v_z)$.

(2) 势能的相对性.势能的值与势能零点的选取有关.一般选地面的重力势能为零,引力势能的零点取在无限远处,而水平放置的弹簧处于平衡位置时,其弹性势能为零.当然,势能零点也可以任意选取,选取不同的势能零点,物体的势能就将具有不同的值.所以,通常说势能具有相对意义.但也应当注意,任意两点

① 关于地球表面附近物体的重力势能 mgy ,也可以由引力势能得出.读者如有兴趣可参阅第6-4节中的“质点在地球表面的重力势能”.

间的势能之差却是具有绝对性的。

(3) 势能是属于系统的. 势能是由于系统内各物体间具有保守力作用而产生的, 因而它是属于系统的. 单独谈单个物体的势能是没有意义的. 例如重力势能就是属于地球和物体所组成的系统的. 如果没有地球对物体的作用, 也就谈不上重力做功和重力势能的问题, 离开了地球作用范围的宇宙飞船, 也就无所谓重力势能. 同样, 弹性势能和引力势能也是属于有弹性力和引力作用的系统的. 应当注意, 在平常叙述时, 常将地球与物体系统的重力势能说成是物体的, 这只是为了叙述上的简便, 其实它是属于地球和物体系统的. 至于物体的引力势能和弹性势能, 也都是这样.

四 势能曲线

从上述讨论可以看出, 当坐标系和势能零点一经确定后, 物体的势能便仅是

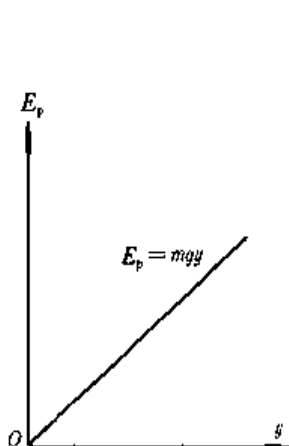


图 3-18 重力势能曲线

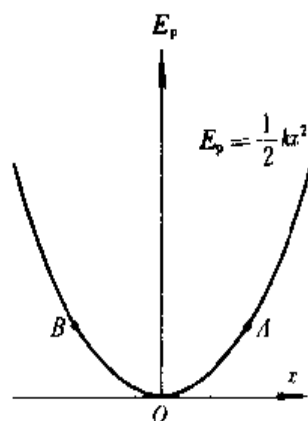


图 3-19 弹性势能曲线

坐标的函数, 即 $E_p = E_p(x, y, z)$. 按此函数画出的势能随坐标变化的曲线, 称为势能曲线. 图 3-18 是重力势能的势能曲线, 该曲线是一条直线. 图 3-19 是弹性势能曲线, 该曲线是一条通过原点的抛物线. 原点为平衡位置, 其势能为零, 它是弹性势能的最小值. 图 3-20 是万有引力势能曲线, 是一条双曲线. 从图中可见, 当 $r \rightarrow \infty$ 时, 引力势能趋于零, 这与前面规定在无限远处万有引力势能为零是一致的.

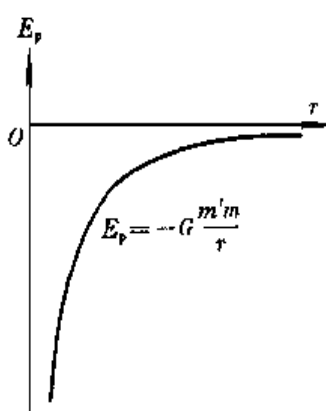


图 3-20 万有引力势能曲线

应当强调指出, 势能曲线不仅给出势能在空间的分布, 而且还可以表示系统的稳定状态. 例如在图 3-19 的弹性势能曲线

上,由式(3-19)可得点 A 处的 $dE_p/dx > 0$,故该处的弹性力是负的;而点 B 处的 $dE_p/dx < 0$,故点 B 处的弹性力是正的;而在点 O 处;有 $dE_p/dx = 0$,即点 O 处弹性力为零,弹性势能亦为零,故点 O 是一维弹簧振子的平衡位置.这就是说,无论是向左或向右偏离平衡位置点 O,都将受到指向平衡位置的弹性力.

3-6 功能原理 机械能守恒定律

前面我们讨论了质点机械运动的能量——动能和势能,以及合外力对质点做功引起质点动能改变的动能定理.可是,在许多实际问题中,我们需要研究由许多质点所构成的系统.这时系统内的质点,既受到系统内各质点之间相互作用的内力,又可能受到系统外的物体对系统内质点作用的外力.无论内力或是外力,都可以是保守力或非保守力.例如把弹簧和与弹簧相连接的物体视为一个系统时,弹簧与物体间的作用力为内力,而空气对弹簧和物体的阻力则为外力.

一 质点系的动能定理

设一系统内有 n 个质点,作用于各个质点的力所作的功分别为: W_1, W_2, W_3, \dots , 使各质点由初动能 $E_{k10}, E_{k20}, E_{k30}, \dots$ 改变为末动能 $E_{k1}, E_{k2}, E_{k3}, \dots$. 由质点的动能定理式(3-12),可得

$$W_1 = E_{k1} - E_{k10}$$

$$W_2 = E_{k2} - E_{k20}$$

$$W_3 = E_{k3} - E_{k30}$$

.....

以上各式相加,有

$$\sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n E_{ki} - \sum_{i=1}^n E_{ki0} \quad (3-20)$$

式中 $\sum_{i=1}^n E_{ki0}$ 是系统内 n 个质点的初动能之和, $\sum_{i=1}^n E_{ki}$ 是这些质点的末动能之和, $\sum_{i=1}^n W_i$ 则是作用在 n 个质点上的力所作的功之和.因此,上式的物理意义是: 作用于质点系的力所作之功,等于该质点系的动能增量. 这也叫做 质点系的动能定理.

正如前面所说,系统内的质点所受的力,既有来自系统外的外力,也有来自系统内各质点间相互作用的内力,因此,作用于质点系的力所作的功 $\sum W_i$, 应是一切外力对质点系所作的功 $\sum W_i^{\text{外}} = W^{\text{外}}$ 与质点系内一切内力所作的功 $\sum W_i^{\text{内}} = W^{\text{内}}$ 之和,即

$$\sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n W_i^{\text{ex}} + \sum_{i=1}^n W_i^{\text{in}} = W^{\text{ex}} + W^{\text{in}}$$

这样式(3-20)亦可写成

$$W^{\text{ex}} + W^{\text{in}} = \sum_{i=1}^n E_{ki} - \sum_{i=1}^n E_{ki0} \quad (3-21)$$

这是质点系动能定理的另一数学表达式,它表明,质点系的动能的增量等于作用于质点系的一切外力作的功与一切内力作的功之和。

二 质点系的功能原理

前面已经指出,如果按力的特点来区分,作用于质点系的力,有保守力与非保守力之分,无论是外力或者是内力都可以是保守力或非保守力,因此,如以 W_c^{in} 表示质点系内各保守内力做功之和, W_{nc}^{in} 表示质点系内各非保守内力做功之和,那么,质点系内一切内力所作的功则应为

$$W^{\text{in}} = W_c^{\text{in}} + W_{nc}^{\text{in}}$$

此外,从式(3-18)已知,系统内保守力作的功等于势能增量的负值,因此,质点系内各内力的保守力所作的功应为

$$W_c^{\text{in}} = - \left(\sum_{i=1}^n E_{pi} - \sum_{i=1}^n E_{pi0} \right)$$

考虑了以上两点,式(3-21)可写为

$$W^{\text{ex}} + W_{nc}^{\text{in}} = \left(\sum_{i=1}^n E_{ki} + \sum_{i=1}^n E_{pi} \right) - \left(\sum_{i=1}^n E_{ki0} + \sum_{i=1}^n E_{pi0} \right) \quad (3-22)$$

在力学中,动能和势能统称为机械能.若以 E_0 和 E 分别代表质点系的初机械能和末机械能,即

$$E_0 = \sum_{i=1}^n E_{ki0} + \sum_{i=1}^n E_{pi0}, \quad E = \sum_{i=1}^n E_{ki} + \sum_{i=1}^n E_{pi}$$

那么,式(3-22)可写成

$$W^{\text{ex}} + W_{nc}^{\text{in}} = E - E_0 \quad (3-23)$$

上式表明,质点系的机械能的增量等于外力与非保守内力做功之和.这就是质点系的功能原理。

在应用式(3-23)求解问题时应当注意, W^{ex} 是作用在质点系内各质点上的外力所作功之和,而 W_{nc}^{in} 则是非保守内力对质点系内各质点所作功之和。

此外,我们还应知道功和能量是有密切联系的,但又是区别的.功总是和能量的变化与转换过程相联系,功是能量变化与转换的一种量度.而能量是代表物体系统在一定状态下所具有的做功本领,它和物体系统的状态有关,对机械能来说,它与物体系统的机械运动状态(即位置和速度)有关。

三 机械能守恒定律

从质点系的功能原理式(3-23)可以看出,当 $W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = 0$ 时,有

$$E = E_0 \quad (3-24a)$$

$$\text{即} \quad \sum E_{k_i} + \sum E_{p_i} = \sum E_{k_i0} + \sum E_{p_i0} \quad (3-24b)$$

它的物理意义是:当作用于质点系的外力和非保守内力不作功时,质点系的总机械能是守恒的.这就是机械能守恒定律.

机械能守恒定律的数学表达式(3-24)还可以写成

$$\sum E_{k_i} - \sum E_{k_i0} = -(\sum E_{p_i} - \sum E_{p_i0})$$

$$\text{即} \quad \Delta E_k = -\Delta E_p \quad (3-25)$$

上式指出,在满足机械能守恒的条件($W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = 0$)下,质点系内的动能和势能都不是不变的,两者之间可以相互转换,但动能和势能之和却是不变的,所以说,在机械能守恒定律中,机械能是不变量或守恒量.而质点系内的动能和势能之间的转换则是通过质点系内的保守力作功(W_c)来实现的.

例1 如图3-21所示,一雪橇从高度为50 m的山顶上点A沿冰道由静止下滑,山顶到山下的坡道长为500 m.雪橇滑至山下点B后,又沿水平冰道继续滑行,滑行若干米后停止在C处.若雪橇与冰道的摩擦因数为0.050.求此雪橇沿水平冰道滑行的路程.点B附近可视为连续弯曲的滑道.略去空气阻力的作用.

解 如把雪橇、冰道和地球视为一个系统,由于略去空气阻力对雪橇的作用,故作用于雪橇的力只有重力 P 、支持力 F_N 和摩擦力 F_f .其中重力是保守内力,只有非保守内力——摩擦

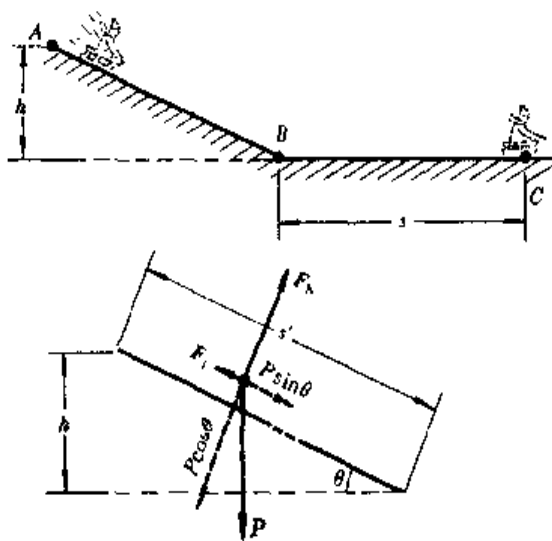


图 3-21

力作功,没有外力做功.故由功能原理可知,雪橇在下滑过程中,摩擦力所作的功为

$$W = W_1 + W_2 = (E_{p2} + E_{k2}) - (E_{p1} + E_{k1}) \quad (1)$$

式中 W_1 和 W_2 分别为雪橇沿斜坡下滑和沿水平冰道运动时摩擦力作的功; E_{p1} 和 E_{k1} 为雪橇在山顶时的势能和动能, E_{p2} 和 E_{k2} 为雪橇静止在水平滑道上的势能和动能. 如选水平滑道处的势能为零, 由题意可知, $E_{p1} = mgh$, $E_{k1} = 0$, $E_{p2} = 0$, $E_{k2} = 0$, 于是由上式有

$$W_1 + W_2 = -mgh \quad (2)$$

另由功的定义式(3-9), 有

$$W_1 = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_A^B F_1 dr = - \int_A^B \mu mg \cos \theta dr$$

因斜坡的坡度很小 ($\cos \theta \approx 1$), 故

$$W_1 = -\mu mgs'$$

而

$$W_2 = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\mu mgs$$

把上述结果代入式(2), 得

$$s - \frac{h}{\mu} = s'$$

从题意知, $h = 50 \text{ m}$, $\mu = 0.050$, $s' = 500 \text{ m}$, 代入上式, 雪橇沿水平冰道滑行的路程为

$$s = \frac{50}{0.050} \text{ m} - 500 \text{ m} = 500 \text{ m}$$

应当指出, 这个题目也可以应用牛顿第二定律先求出加速度, 再利用匀变速直线运动公式解出, 但运算步骤要繁得多, 读者不妨一试.

例 2 如图 3-22 所示, 有一质量略去不计的轻弹簧, 其一端系在铅直放置的圆环的顶点 P , 另一端系一质量为 m 的小球, 小球穿过圆环并在圆环上作摩擦可略去不计的运动. 设开始时小球静止于点 A , 弹簧处于自然状态, 其长度为圆环的半径 R ; 当小球运动到圆环的底端点 B 时, 小球对圆环没有压力. 求此弹簧的劲度系数.

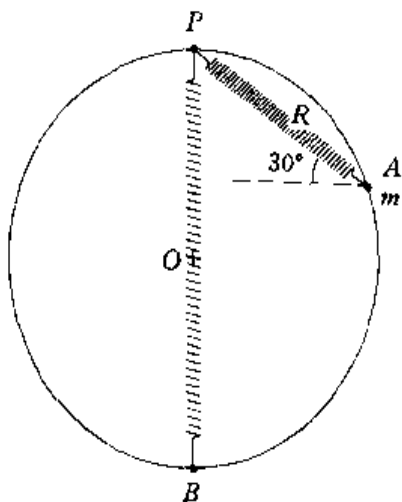


图 3-22

解 取弹簧、小球和地球为一个系统, 小球与地球间的重力、小球与弹簧间的作用力均为保守内力, 而圆环对小球的支持力和点 P 对弹簧的拉力虽都为外力, 但都不做功. 所以, 小球

从 A 运动到 B 的过程中,系统的机械能是不变量,机械能应守恒.因小球在点 A 时弹簧为自然状态,故取点 A 的弹性势能为零;另取点 B 时小球的重力势能为零.那么,由机械能守恒定律可得

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kR^2 = mgR(2 - \sin 30^\circ) \quad (1)$$

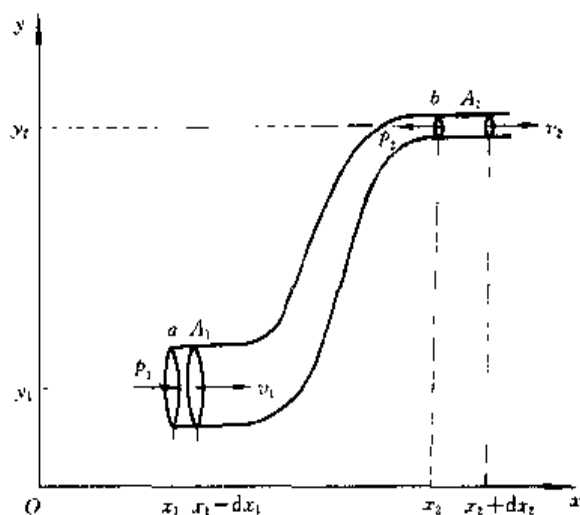
其中 v 是小球在点 B 的速率.又小球在点 B 时的牛顿第二定律方程为

$$kR - mg = m \frac{v^2}{R} \quad (2)$$

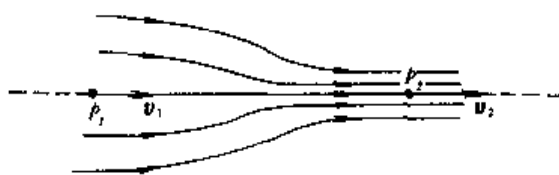
解式(1)和式(2),得弹簧的劲度系数为

$$k = \frac{2mg}{R}$$

例 3 在一截面变化的弯曲管中,稳定流动着不可压缩的密度为 ρ 的流体,如图 3-23(a)所示.在图中点 a 处的压强为 p_1 、截面积为 A_1 ,在点 b 处的压强为 p_2 、截面积为



(a)



(b)

图 3-23

A_2 .由于点 a 和点 b 之间存在压力差,流体将在管中移动.在点 a 和点 b 处的速率分别为 v_1 和 v_2 .求流体的压强和速率之间的关系.

解 取如图所示的坐标,在点 a 和点 b 处的流体因压力差的缘故而移动的距离分别为 dx_1 和 dx_2 .那么由压力差所作的功为

$$dW_p = p_1 A_1 dx_1 - p_2 A_2 dx_2$$

考虑到流体的不可压缩性,有 $A_1 dx_1 = A_2 dx_2 = dV$,所以上式为

$$dW_p = (p_1 - p_2)dV \quad (1)$$

又,在流体移动过程中重力所作的功为

$$dW_g = -dm \cdot g(y_2 - y_1)$$

其中 $dm = \rho dV$, 上式为

$$dW_g = -\rho g(y_2 - y_1)dV \quad (2)$$

按动能定理,外力对流体作的功等于流体动能的增量,故有

$$(p_1 - p_2)dV - \rho g(y_2 - y_1)dV = \frac{1}{2}\rho dV v_2^2 - \frac{1}{2}\rho dV v_1^2$$

得

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

即流体在管中任意点都有下述关系

$$p + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{常量} \quad (3)$$

此即伯努利方程,它是能量守恒在流体力学中的一种表述形式,显然,它也是牛顿力学的基本原理在流体中的应用.

如果将流管放置在如图 3-23(b)所示的水平面上,即 $y_1 = y_2$,那么伯努利方程式(3)可写成

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = \text{常量} \quad (4)$$

由式(4)可以得出一个重要的结果:在不可压缩的、密度均匀的流体中,压强比较小的区域其流速较大,反之亦然.

四 宇宙速度

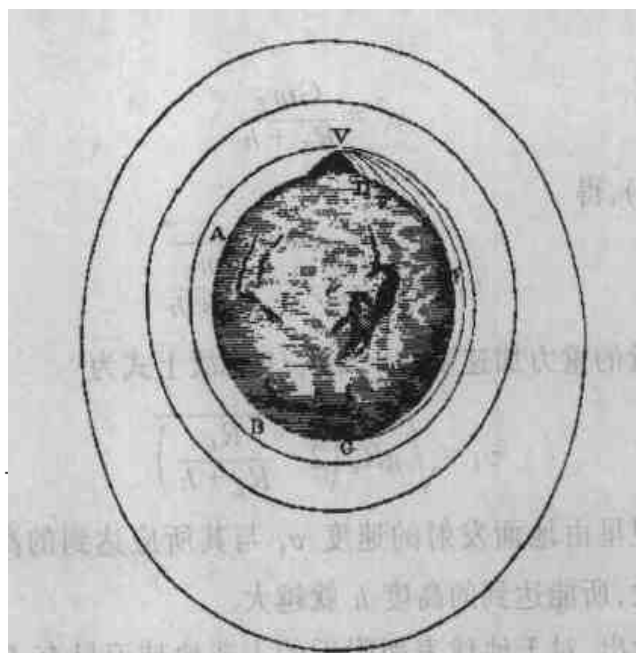
众所周知,人造地球卫星和人造行星是人类认识宇宙的重大发展,但怎样才能把物体抛向天空,使之成为人造卫星或人造行星呢?这取决于抛体的初速度.有趣的是,在 1687 年,牛顿出版的第一部著作——《自然哲学的数学原理》中,有一幅插图,这幅图指出抛体的运动轨迹取决于抛体的初速度,它明确地指出发射人造地球卫星的可能性,当然这种可能性在当时只是理论上的,270 年后,人类才把理论上的人造卫星变成了现实.

1 人造地球卫星 第一宇宙速度

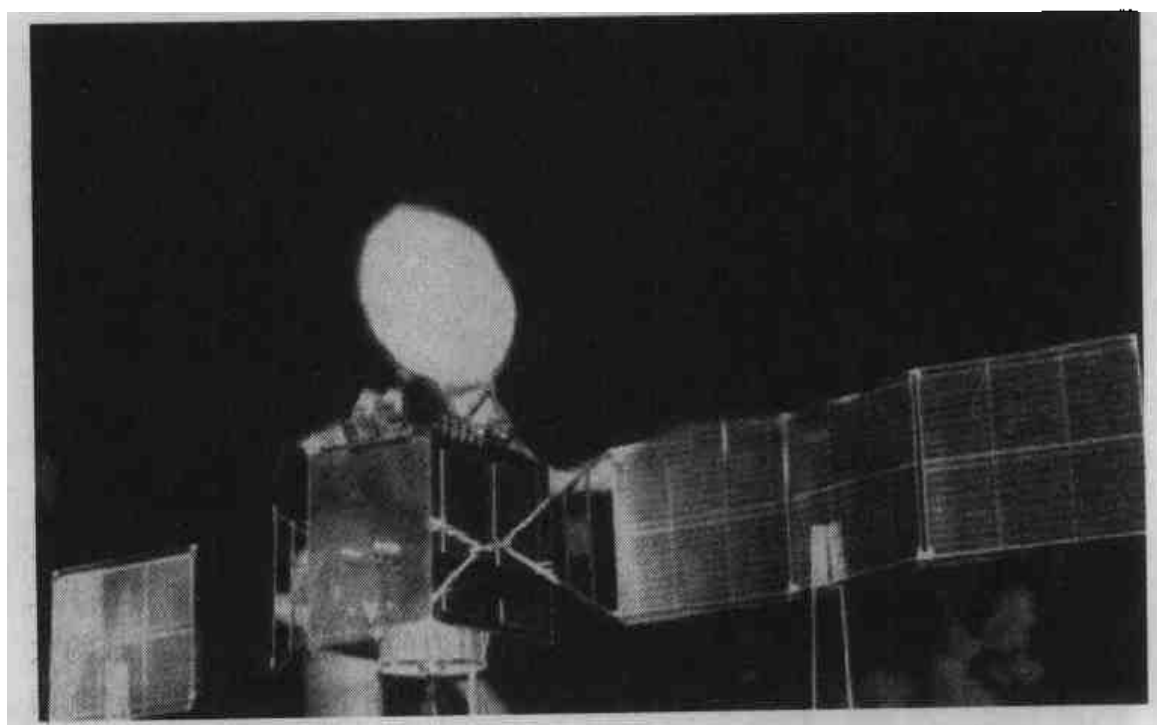
设地球的半径为 R_E 、质量为 m_E .在地面上有一质量为 m 的抛体,以初速 v_1 竖直向上发射,到达距地面高度为 h 时,以速度 v 绕地球作匀速率圆周运动,如略去大气对抛体的阻力,抛体最小应具有多大的速度才能成为地球卫星?如把抛体与地球作为一个系统,由于没有外力作用在这个系统上,系统的机械能守恒.于是,由式(3-24),有

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{Gmm_E}{R_E} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gmm_E}{R_E + h} \quad (1)$$

上式可写成



牛顿的《自然哲学的数学原理》插图,抛体
轨迹依赖于速度



我国 1997 年发射升空的东方红三号通信卫星

$$v_1^2 = v^2 - 2 \frac{Gm_E}{R_E + h} + 2 \frac{Gm_E}{R_E} \quad (2)$$

由牛顿第二定律和万有引力定律,有

$$m \frac{v^2}{R_E + h} = \frac{Gm_E m}{(R_E + h)^2} \quad (3)$$

上式可写成

$$v^2 = \frac{Gm_E}{R_E + h} \quad (4)$$

将式(4)代入式(2),得

$$v_1 = \sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E} - \frac{Gm_E}{R_E + h}}$$

已知地球表面附近的重力加速度 $g = Gm_E/R_E^2$, 故上式为

$$v_1 = \sqrt{gR_E \left(2 - \frac{R_E}{R_E + h} \right)}$$

上式给出了人造卫星由地面发射的速度 v_1 与其所应达到的高度之间的关系. 卫星发射速度越大, 所能达到的高度 h 就越大.

由上式可以看出, 对于地球表面附近的人造地球卫星有 $R_E \gg h$, 故上式可简化为

$$v_1 = \sqrt{gR_E} \quad (5)$$

其中 $R_E = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$, $g = 9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 可得

$$v_1 = 7.9 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

这就是在地面上发射人造地球卫星所需达到的最小速度, 通常叫做第一宇宙速度. 在地球表面附近的卫星 ($R_E \gg h$), 由式(2)有 $v \approx v_1$. 故常说, 人造地球卫星环绕地球的最小速度亦为 $7.9 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

把式(3)代入式(1), 有

$$E = -\frac{Gm_E m}{2(R_E + h)}$$

上式表明, 人造地球卫星的机械能是小于零的, 即 $E < 0$.

2 人造行星 第二宇宙速度

如果抛体的发射速度继续增大, 致使抛体与地球之间的距离增加到趋于无限远时, 即 $r = \infty$, 这时可认为抛体已脱离地球引力的作用范围. 抛体可成为太阳系的人造行星. 在这种情况下, 抛体在地球引力作用下的引力势能为零, 即 $E_{p\infty} = 0$. 若此时抛体的动能也为零, 即 $E_{k\infty} = 0$, 那么抛体在距地球无限远处的总机械能 $E_\infty = E_{p\infty} + E_{k\infty} = 0$. 这就是说, 在抛体从地面飞行到刚脱离地球引力作用的过程中, 抛体以自己的动能克服引力而做功, 从而把动能转变为引力势能. 由于略去阻力以及其他星体的作用力所作的功, 故机械能应守恒, 由式(3-24), 有

$$E = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{Gm_E m}{R_E} = E_{k\infty} + E_{p\infty} = 0$$

式中 v_2 是使抛体脱离地球引力作用范围, 在地面发射时抛体所必须具有的最小发射速度. 这个速度又叫第二宇宙速度.

由上式可得第二宇宙速度为

$$v_2 = \sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}} = \sqrt{2gR_E} = \sqrt{2}v_1 = 11.2 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

从上述关于第二宇宙速度的讨论中可以看出, 要使抛体脱离地球引力作用, 只要抛体具有不小于 $11.2 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的发射速度就行了, 而这时可以不考虑发射速度的方向, 就能得到所要求的数值. 这是用能量观点来讨论这类问题最显著的一个优点^①.

应当指出, 若发射速度大于第二宇宙速度, 这时抛体的机械能大于零, 即 $E > 0$. 理论计算表明, 这时抛体在太阳引力作用下绕太阳作椭圆轨道运动, 成为人造行星.

图 3-24 绘出了在地面上水平发射的抛体, 其能量与以地球为参考系的运动轨迹之间的关系. 当 $E < 0$ 时, 抛体的轨迹为椭圆(包括圆); 当 $E > 0$ 时, 为双曲线; 当 $E = 0$ 时, 为抛物线.

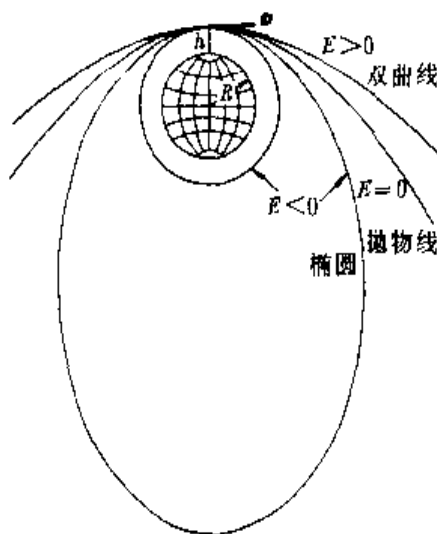


图 3-24 抛体的轨迹与能量的关系

3 飞出太阳系 第三宇宙速度

上面讲述了从地球表面发射的抛体达到或超过第二宇宙速度以后, 它将环绕太阳成为太阳系中一颗人造行星. 如果我们继续增加从地球表面发射抛体的速度, 并使之能脱离太阳引力的束缚而飞出太阳系, 这个速度称之为第三宇宙速

^① 为便于对比, 读者可求解本书第二章的习题 2-15.

度,用 v_3 来表示.

显然,要使抛体脱离太阳系的束缚,必须先脱离地球引力的束缚,然后再脱离太阳引力的束缚.这就是说,抛体脱离地球引力束缚后还要具有足够大的动能实现飞出太阳系的目的.

首先讨论抛体脱离地球引力场的情形.我们把地球和抛体作为一个系统,并取地球为参考系.设从地球表面发射一个速度为 v_3 的抛体,其动能为 $mv_3^2/2$,引力势能为 $-Gm_E m/R_E$.当抛体脱离地球引力的束缚后,它相对地球的速度为 v' .按机械能守恒定律,有

$$\frac{1}{2}mv_3^2 - G\frac{m_E m}{R_E} = \frac{1}{2}mv'^2 \quad (1)$$

为求 v' ,取太阳为参考系,此抛体距太阳的距离为 R_s ,相对太阳的速度为 v'_3 .由相对速度公式(1-24)可知,抛体相对太阳的速度 v'_3 应当等于抛体相对地球的速度 v' 与地球相对太阳的速度 v_E 之和,即

$$v'_3 = v' + v_E$$

如 v' 与 v_E 方向相同,则抛体相对太阳的速度最大,有

$$v'_3 = v' + v_E \quad (2)$$

此后,抛体在太阳的引力作用下飞行,其引力势能为 $-Gm_s m/R_s$,动能为 $mv'_3/2$,其中 m_s 为太阳的质量,故抛体要脱离太阳引力作用,其机械能至少是

$$\frac{1}{2}mv'_3{}^2 - G\frac{m_s m}{R_s} = 0 \quad (3)$$

$$\text{有} \quad v'_3 = \left(\frac{2Gm_s}{R_s} \right)^{1/2} \quad (4)$$

把式(4)代入式(2),有

$$v' = v'_3 - v_E = \left(\frac{2Gm_s}{R_s} \right)^{1/2} - v_E \quad (5)$$

如设地球绕太阳的运动轨道近似为一圆,那么由于抛体与地球的运动方向相同,且都只受太阳引力的作用,故可以认为此时抛体至太阳的距离 R_s ,即是地球轨道圆的半径.于是由牛顿第二定律有

$$-G\frac{m_E m_s}{R_s^2} = m_E \frac{v_E^2}{R_s}$$

即得

$$v_E = \left(G \frac{m_s}{R_s} \right)^{1/2}$$

把上式代入式(5),得

$$v' = (\sqrt{2} - 1) \left(G \frac{m_s}{R_s} \right)^{1/2}$$

从附录四可查得 $m_s = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$, $R_s = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$, 故得 $v' = 12.3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. 将 v' 的值代入式(1), 有

$$v_3 = \left(v'^2 + 2G \frac{m_E}{R_E} \right)^{1/2}$$

其中 $m_E = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_E = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$, 所以第三宇宙速度为 $v_3 = 16.4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

自 1957 年世界上第一颗人造地球卫星上天以来, 1961 年前苏联宇航员加加林乘坐宇宙飞船环绕地球一周, 人类首次进入了太空. 1969 年 7 月美国阿波罗 11 号宇宙飞船首次实现载人登月. 1976 年美国海盗 1 号宇宙飞船成功登上火星, 发回 5 万多张照片和大量探测数据. 1997 年 7 月 4 日, 美国“火星探路者”无人飞船又在火星上着陆, 并以火星车在火星表面采集样品. 拍摄照片. 这些都表明, 在几十亿年以前火星上非常可能发生过特大洪水. 然而, 火星上是否真的有过液态水, 甚至有过生命, 仍然是一个有待进一步考察研究的问题. 1983 年美国先驱者 10 号宇宙飞船超过太阳引力的束缚成为了飞出太阳系的第一个人造天体. 人类完全有信心指望载人火星飞行、建造适宜人类居住的太空城等愿望都终能成为现实.

3-7 完全弹性碰撞 完全非弹性碰撞

两物体在碰撞过程中, 它们之间相互作用的内力较之其他物体对它们作用的外力要大得多. 因此, 在研究两物体间的碰撞问题时, 可将其他物体对它们作用的外力忽略不计. 如果在碰撞后, 两物体的动能之和完全没有损失, 那么, 这种碰撞叫做完全弹性碰撞. 实际上, 在两物体碰撞时, 由于非保守力作用, 致使机械能转换为热能、声能、化学能等其他形式的能量, 或者其他形式的能量转换为机械能, 这种碰撞就是非弹性碰撞. 如两物体在非弹性碰撞后以同一速度运动, 这种碰撞叫做完全非弹性碰撞. 下面通过举例来讨论完全非弹性碰撞和完全弹性碰撞.

例 1 设在宇宙中有密度为 ρ 的尘埃, 这些尘埃相对惯性参考系是静止的. 有一质量为 m_0 的宇宙飞船以初速 v_0 穿过宇宙尘埃, 由于尘埃粘贴到飞船上, 致使飞船的速度发生改变. 求飞船的速度与其在尘埃中飞行时间的关系. 为便于计算, 设想飞船的外形是面积为 S 的圆柱体(图 3-25).

解 按题设条件, 可认为尘埃与飞船作完全非弹性碰撞, 把尘埃与飞船作为一个系统. 考

虑到飞船在自由空间飞行,无外力作用在这个系统上,因此系统的动量守恒.如以 m_0 和 v_0 为飞船进入尘埃前(即 $t=0$)的质量和速度, m 和 v 为飞船在尘埃中(即时刻 t)的质量和速度.那么,由动量守恒有

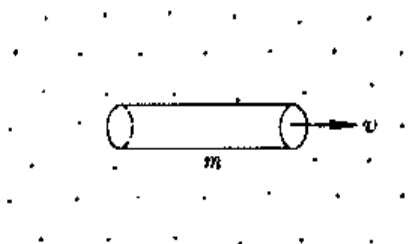


图 3-25

$$m_0 v_0 = mv \quad (1)$$

此外,在 $t \rightarrow t + dt$ 时间内,由于飞船与尘埃间作完全非弹性碰撞,而粘贴在宇宙飞船上尘埃的质量即飞船所增加的质量为

$$dm = \rho S v dt \quad (2)$$

由式(1)有

$$dm = -\frac{m_0 v_0}{v^2} dv$$

从而得

$$\rho S v dt = -\frac{m_0 v_0}{v^2} dv$$

由已知条件,上式积分为

$$-\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^3} = \frac{\rho S}{m_0 v_0} \int_0^t dt$$

得

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2} \right) = \frac{\rho S}{m_0 v_0} t$$

有

$$v = \left(\frac{m_0}{2\rho S v_0 t + m_0} \right)^{1/2} v_0$$

显然,飞船在尘埃中飞行的时间愈长,其速度就愈低.

除上例外,完全非弹性碰撞的事例还有很多,如采用子弹打入沙摆的方法来测量子弹的速度,就是这方面一个常见的例子.

例 2 如图 3-26 所示,设有两个质量分别为 m_1 和 m_2 , 速度分别为 v_{10} 和 v_{20} 的弹性小球作对心碰撞,两球的速度方向相同.若碰撞是完全弹性的,求碰撞后的速度 v_1 和 v_2 .

解 取速度方向为 x 轴正向,则由动量守恒定律得

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (1)$$

由机械能守恒定律得

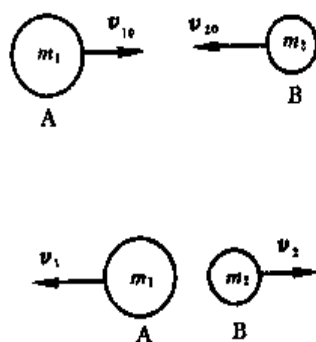
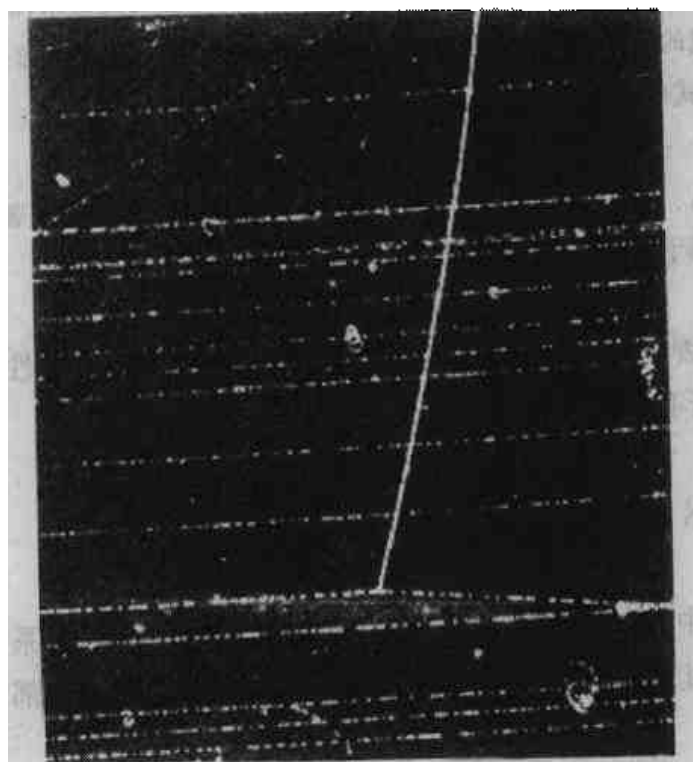


图 3-26 完全弹性碰撞的例子



两个质子在盛有液态氢的容器中发生弹性碰撞. 一个质子从左向右运动, 与另一个静止质子相碰撞. 碰撞后, 两个质子的运动方向相互垂直. 磁感强度 B 的方向垂直纸面向里.

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (2)$$

式(1)可改写为

$$m_1 (v_{10} - v_1) = m_2 (v_2 - v_{20}) \quad (3)$$

式(2)可改写为

$$m_1 (v_{10}^2 - v_1^2) = m_2 (v_2^2 - v_{20}^2) \quad (4)$$

由式(3)、(4)可解得

$$v_{10} + v_1 = v_2 + v_{20} \quad (5)$$

或

$$v_{10} - v_{20} = v_2 - v_1$$

式(5)表明, 碰撞前两球相互趋近的相对速度 $(v_{10} - v_{20})$ 等于碰撞后它们相互分开的相对速度 $(v_2 - v_1)$.

从式(3)和式(5), 可解出

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} \\ v_2 &= \frac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1 v_{10}}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

讨论:(1) 若 $m_1 = m_2$, 从式(6)可得

$$v_1 = v_{20}, v_2 = v_{10}$$

即两质量相同的小球碰撞后互相交换速度.

(2) 若 $m_2 \gg m_1$, 且 $v_{20} = 0$, 从式(6)可得

$$v_1 \approx -v_{10}, v_2 \approx 0$$

即碰撞后, 质量为 m_1 的小球将以同样大小的速率, 从质量为 m_2 的大球上反跳回来, 而大球 m_2 几乎保持静止. 皮球对墙壁的碰撞, 以及气体分子和容器壁的碰撞都属于这种情形.

(3) 若 $m_2 \ll m_1$, 且 $v_{20} = 0$, 从式(6)可得

$$v_1 \approx v_{10}, v_2 \approx 2v_{10}$$

这个结果表明: 一个质量很大的球体, 当它与质量很小的球体相碰撞时, 它的速度不发生显著改变, 但质量很小的球却以近于两倍于大球体的速度向前运动.

上面这个例题属一维完全弹性碰撞中的对心碰撞问题. 一般说来, 完全弹性碰撞常常不是对心碰撞, 读者若有兴趣可解习题 3-30.

3-8 能量守恒定律

在机械能守恒定律这一节中, 我们知道如果外力和非保守内力都不做功, 系统内的动能和势能之间是可以相互转换的, 其和是守恒的. 但是, 如果系统内部



亥姆霍兹 (H. Von Helmholtz, 1821—1894), 德国物理学家和生理学家. 他在 J. P. 焦耳和 J. R. 迈尔的能量守恒研究的基础上, 于 1847 年发表了《论力 (即现称能量) 守恒》的讲演, 首先系统地以数学方式阐述了自然界各种运动形式之间都遵守能量守恒这条规律. 这对近代物理学的发展起了很大作用. 所以说亥姆霍兹是能量守恒定律的创立者之一.

除重力和弹性力等保守内力做功外, 还有摩擦力等非保守内力做功, 那么系统的机械能就要与其他形式的能量发生转换.

在长期的生产斗争和科学实验中, 人们总结出—条重要的结论: 对于一个与自然界无任何联系的系统来说, 系统内各种形式的能量是可以相互转换的, 但是, 不论如何转换, 能量既不能产生, 也不能消灭. 这一结论叫做能量守恒定律, 它是

自然界的基本定律之一. 能量是这一守恒定律的不变量或守恒量, 在能量守恒定律中, 系统的能量是不变的, 但能量的各种形式之间却可以相互转化. 例如机械能、电能、热能、光能以及分子、原子、核能等等能量之间都可以相互转换. 应当指出, 在能量转换的过程中, 能量的变化常用功来量度. 在机械运动范围内, 功是机械能变化的唯一量度. 但是, 不能把功与能量等同起来, 功是和能量变换过程联系在一起, 而能量则只和系统的状态有关, 是系统状态的函数.

* 3-9 质心 质心运动定律

研究由许多质点所组成的系统的运动, 质心是十分有用的概念. 无论这些质点是彼此隔离开来的, 还是结构紧密的, 都是如此. 这一节我们先介绍质心的概念, 然后讨论质心运动定律.

一 质心

一人向空中抛一匀质薄三角板[图 3-27(a)], 实际观测表明, 板上有一点 C 的运动轨迹为抛物线, 而其他各点既随点 C 作抛物线运动, 又绕通过点 C 的轴线作圆周运动. 这时板的运动可看成是板的平动与整个板绕点 C 转动这两种运动的合成. 因此, 我们可用点 C 的运动来代表整个板的平动, 点 C 就是三角板的质心. 就平动而言, 板的全部质量似乎集中在质心这一点上. 跳水运动员在空中的质心的运动轨迹也是抛物线[图 3-27(b)]. 这两个例子说明质点系的质心是个重要的概念. 下面引进质心的定义, 然后再讨论质心的运动规律.

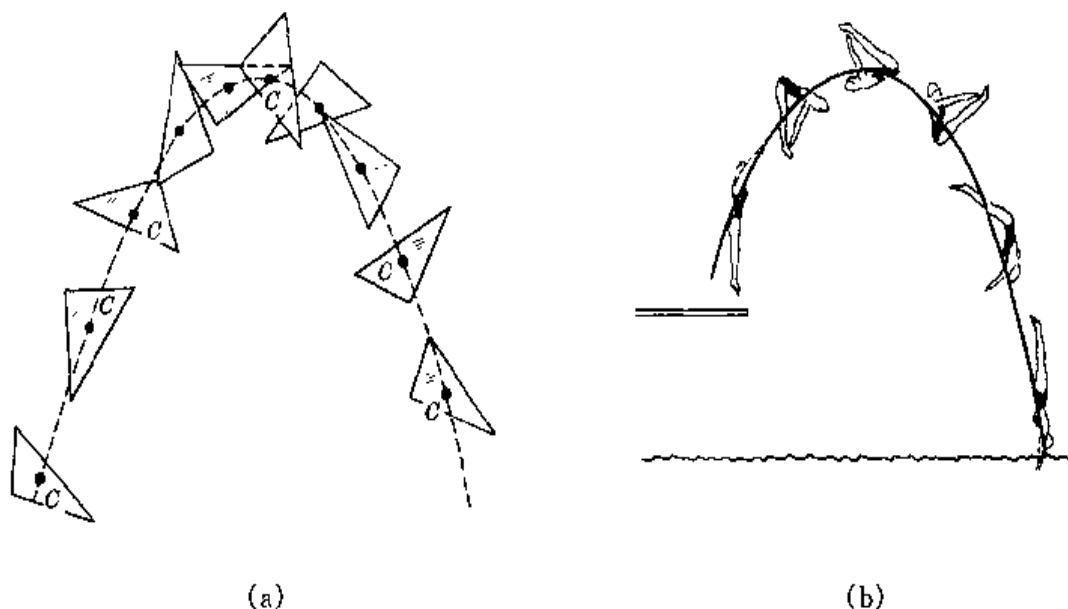


图 3-27 质心

在如图 3-28 所示的直角坐标系中, 有 n 个质点组成的质点系, 其质心位置可由下式确定

$$r_C = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \cdots + m_i r_i + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots + m_i + \cdots}$$

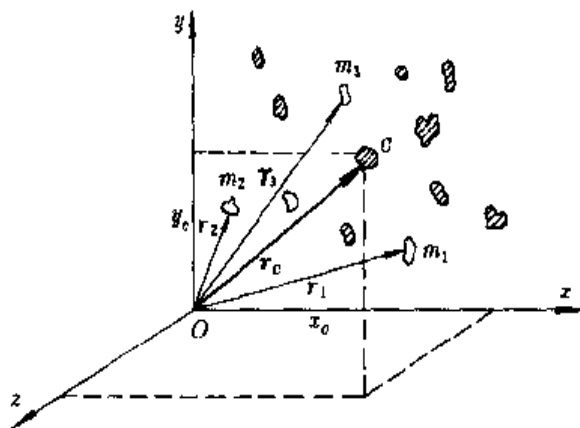


图 3-28 质心位置的确定

即

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (3-26a)$$

式中 m_i 为第 i 个质点的质量, $\sum_{i=1}^n m_i$ 为质点系内各质点的质量总和, 即 $\sum_{i=1}^n m_i = m'$; \mathbf{r}_C 为质心对原点 O 的位置矢量, 它在 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴上的分量即质心在 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴上的坐标, 分别为

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (3-26b)$$

对于质量连续分布的物体, 可把物体分成许多质量元 dm , 式(3-26b)中的求和 $\sum x_i m_i$, 可用积分 $\int x dm$ 来替代, 于是, 质心的坐标为

$$x_C = \frac{1}{m'} \int x dm, \quad y_C = \frac{1}{m'} \int y dm, \quad z_C = \frac{1}{m'} \int z dm \quad (3-26c)$$

对于密度均匀、形状对称分布的物体, 其质心都在它的几何中心处, 例如圆环的质心在圆环中心, 球的质心在球心等。

例 1 水分子 H_2O 是由两个氢原子和一个氧原子构成, 它们的结构如图 3-29 所示。每个氢原子与氧原子之间距离均为 $d = 1.0 \times 10^{-10} \text{ m}$, 氢原子与氧原子两条连线之间的夹角为 $\theta = 104.6^\circ$, 求水分子的质心。

解 选如图所示的坐标。由于氧原子的中心位于坐标原点 O , 两个氢原子对 y 轴对称, 故质心 C 在 x 轴上的坐标 $x_C = 0$ 。利用式(3-26)可得质心 C 在 y 轴上的坐标为

$$y_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{m_H d \sin 37.7^\circ + m_O \times 0 + m_H d \sin 37.7^\circ}{m_H + m_O + m_H}$$

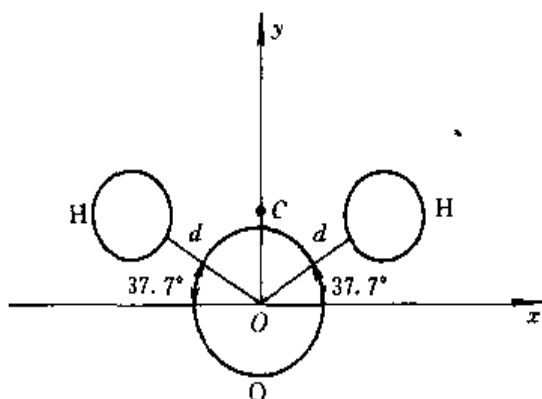


图 3-29

关于氢原子和氧原子的质量 m_H 和 m_O , 如以 u (原子质量单位^①) 为单位计算, $m_H = 1.0 u$, $m_O = 16 u$. 把已知数据代入, 得

$$y_C = \frac{2 \times 1.0 \times 1.0 \times 10^{-10} \times \sin 37.7^\circ}{2 \times 1.0 + 16} \quad m = 6.8 \times 10^{-12} \text{ m}$$

即质心处于图 3-29 中 $x=0, y=6.8 \times 10^{-12} \text{ m}$ 处, 其位置矢量为 $r_C = 6.8 \times 10^{-12} \text{ m } j$.

例 2 求半径为 R 的匀质半薄球壳的质心.

解 选如图 3-30 所示的坐标轴. 由于球壳对 Oy 轴对称, 质心显然位于图中的 Oy 轴

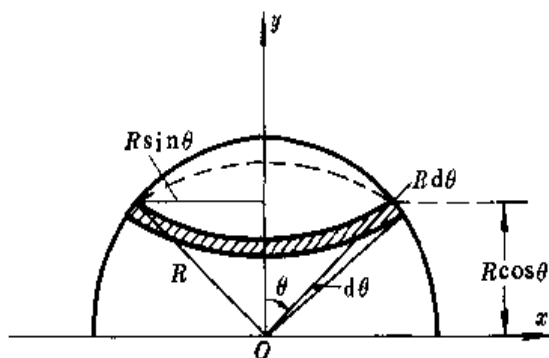


图 3-30

上. 在半球壳上取一圆环, 圆环的平面与 Oy 轴垂直. 圆环的面积为 $dS = 2\pi R \sin \theta R d\theta$. 设匀质薄球壳的质量面密度为 σ , 圆环的质量则为

$$dm = \sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$

由式(3-26c)可得匀质薄球壳的质心处于

① 在原于物理学中, 规定碳 ^{12}C 原子的质量为 $12 u$. 氢原子和氧原子的质量以 ^{12}C 为标准, 根据实验测得 $m_H = 1.0 u$, $m_O = 16 u$. 根据 1986 年国际科技数据委员会的推荐值 $1 u = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ (取三位有效字).

$$y_c = \frac{\int y dm}{m} = \frac{\int y \sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta}{\sigma 2\pi R^2}$$

从图 3-30 可见, $y = R \cos \theta$, 所以上式为

$$y_c = R \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} R$$

即质心位于 $y_c = R/2$ 处, 其位置矢量为 $\mathbf{r} = (R/2)\mathbf{j}$.

二 质心运动定律

在如图 3-28 所示的质点系中, 式(3-26a)可写成

$$m' \mathbf{r}_c = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i$$

考虑到质点系内各质点的质量总和 m' 是一定的, 因此, 上式对时间的一阶导数为

$$m' \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \quad (3-27)$$

式中 $d\mathbf{r}_c/dt$ 是质心的速度, 用 \mathbf{v}_c 表示, $d\mathbf{r}_i/dt$ 是第 i 个质点的速度, 用 \mathbf{v}_i 表示, 故上式为

$$m' \mathbf{v}_c = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \quad (3-28)$$

上式表明, 系统内各质点的动量的矢量和等于系统质心的速度乘以系统的质量.

前面在讨论质点系的动量定理时已经讲过, 系统内各质点间相互作用的内力的矢量和为

零, 即 $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{\text{in}} = 0$. 因此, 作用在系统上的合力就等于合外力. 于是式(3-28)为

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{\text{ex}}$$

如用 \mathbf{F}^{ex} 代表作用于系统的合外力, 即 $\mathbf{F}^{\text{ex}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{\text{ex}}$, 那么上式可写成

$$\mathbf{F}^{\text{ex}} = m' \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = m' \mathbf{a}_c \quad (3-29)$$

上式表明, 作用在系统上的合外力等于系统的总质量乘以系统质心的加速度. 它与牛顿第二定律在形式上完全相同, 就相当于系统的质量集中于质心, 在合外力作用下, 质心以加速度 \mathbf{a}_c 运动. 通常我们把式(3-29)作为 质心运动定律 的数学表达式.

利用质心运动定律求解多粒子体系的物理问题时, 会带来许多方便^①. 下面举两个这方面的例子.

例 3 设有一质量为 $2m$ 的弹丸, 从地面斜抛出去, 它飞行在最高点处爆炸成质量相等的两个碎片(图 3-31), 其中一个碎片竖直自由下落, 另一个碎片水平抛出, 它们同时落地. 试问第二个碎片落地点在何处?

^① 可参阅马文蔚等主编《物理学原理在工程技术中的应用》之“汽车的驱动和制动”(高等教育出版社出版).

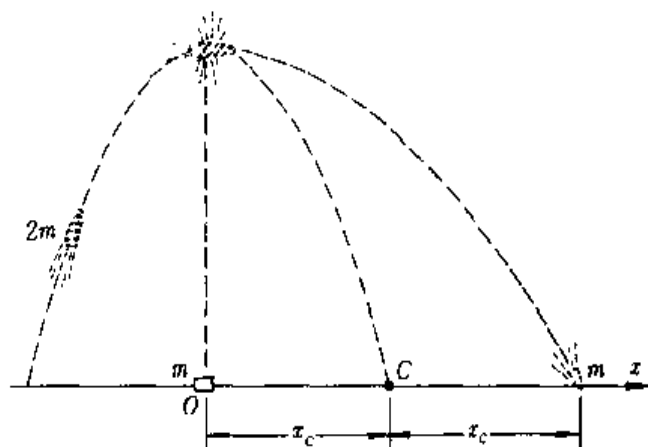


图 3-31

解 考虑弹丸为一系统,空气阻力略去不计.爆炸前和爆炸后弹丸质心的运动轨迹都在同一抛物线上,这就是说,爆炸以后两碎片质心的运动轨迹仍沿爆炸前弹丸的抛物线运动轨迹.如取第一个碎片的落地点为坐标原点 O ,水平向右的轴为 Ox 轴正向.设 m_1 和 m_2 为第一和第二碎片的质量,且 $m_1 = m_2 = m$; x_1 和 x_2 为两碎片落地时距原点 O 的距离, x_c 为两碎片落地时它们的质心距原点 O 的距离,由图可知 $x_1 = 0$,于是,从式(3-26)可得

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

由于 $m_1 = m_2 = m$,由上式有

$$x_2 = 2x_c$$

即第二个碎片的落地点与第一个碎片落地点的水平距离为碎片的质心与第一个碎片水平距离的两倍.这个问题虽然也可以用第一章的质点运动学方法来求解,但比用此方法繁琐得多,读者不妨试一下.

例 4 在第 3-3 节的例题中,我们曾作为质量移动问题的例子,用牛顿定律讨论了从地面上匀速提起柔软链条的过程中,手的提力与链条提高地面长度的关系.这里我们用质心运动定律来讨论.

解 从图 3-32 中可以看出,被提起的链条质心的坐标 y_c 是随链条的上升而改变的.按如图所选的坐标,其质心位于

$$y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{\lambda_y \frac{y}{2} + \lambda(l-y) \times 0}{\lambda l} = \frac{y^2}{2l} \quad (1)$$

式中 λ 为链条单位长度的质量.而作用于链条的合外力为 $F + \lambda y g$,故由质心运动定律有

$$F + y\lambda g = l\lambda \frac{d^2 y_c}{dt^2}$$

或

$$(F - y\lambda g)j = l\lambda \frac{d^2 y_c}{dt^2} j \quad (2)$$

式(1)对时间 t 取二阶导数,有

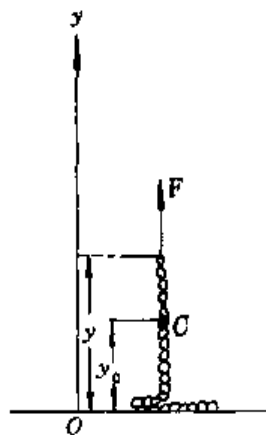


图 3-32

$$\frac{d^2 y_C}{dt^2} = \frac{1}{l} \left[\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + y \frac{d^2 y}{dt^2} \right]$$

考虑到 $v = dy/dt$, $v=0$, 故 $y d^2 y/dt^2 = 0$. 上式为

$$\frac{d^2 y_C}{dt^2} = \frac{v^2}{l}$$

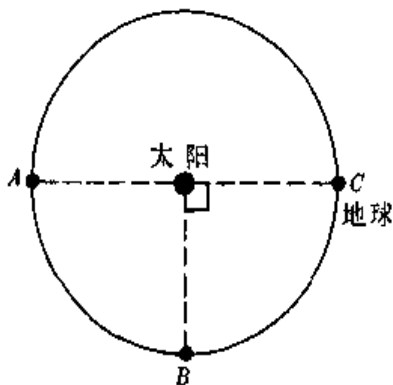
把上式代入式(2), 得

$$(F - \lambda y g) f = \lambda v^2 f$$

可见, 这两种解法所得结果是相同的.

问 题

3-1 如图所示, 设地球在太阳引力的作用下, 绕太阳作匀速圆周运动. 试问: 在下述情况下, (1) 地球从点 A 运动到点 B, (2) 地球从点 A 运动到点 C, (3) 地球从点 A 出发绕行一周又返回点 A, 地球的动量增量和所受的冲量各为多少?



问题 3-1 图

3-2 假使你处在摩擦可略去不计的覆盖着冰的湖面上, 周围又无其它可资利用的工具, 你怎样依靠自身的努力返回湖岸呢?

3-3 质点系的动量守恒, 是否意味着该系统中, 一部分质点的速率变大时, 另一部分质点的速率一定会变小?

3-4 一人在帆船上用电动鼓风机正对帆鼓风, 企图使帆船前进, 但他发觉, 船非但不前进, 反面缓慢后退, 这是为什么?

3-5 在大气中, 打开充气气球下方的塞子, 让空气从球中冲出, 气球可在大气中上升. 如果在真空中打开气球的塞子, 气球也会上升吗? 说明其道理.

3-6 两个物体系于轻绳的两端, 绳跨过一定滑轮. 若把两物体和绳视为一个系统, 哪些力是外力? 哪些力是内力?

3-7 在水平光滑的平面上放一长为 L 、质量为 m' 的小车, 车的一端站有质量为 m 的人, 人和车都是静止不动的. 当人以 v 的速率相对地面从车的一端走向另一端, 在此过程中人和小车相对地面各移动了多少距离?

3-8 人从大船上容易跳上岸, 而从小舟上则不容易跳上岸了, 这是为什么?

3-9 合外力对物体所作的功等于物体动能的增量, 而其中某一个分力作的功, 能否大

于物体动能的增量?

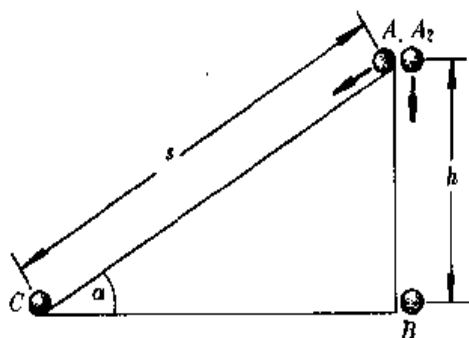
3-10 质点的动量和动能是否与惯性系的选取有关? 功是否与惯性系有关? 质点的动量定理和动能定理是否与惯性系有关? 请举例说明.

3-11 关于质点系的动能定理, 有人认为可以这样得到, 即: “在质点系内, 由于各质点间相互作用的力(内力)总是成对出现的, 它们大小相等方向相反, 因而所有内力做功相互抵消, 这样质点系的总动能增量等于外力对质点系作的功”. 显然这与式(3-20)所表述的质点系动能定理不符. 错误出在哪里呢?

3-12 在弹性限度内, 如果将弹簧的伸长量增加到原来的两倍, 那么弹性势能是否也增加为原来的两倍?

3-13 有两个同样的物体, 处于同一位置, 其中一个水平抛出, 另一个沿斜面无摩擦地自由滑下, 问哪一个物体先到达地面? 到达地面时两者速率是否相等?

3-14 如图所示, 光滑斜面与水平面间的夹角为 α . (1) 一质量为 m 的物体沿斜面从点 A_1 下滑至点 C , 重力所作的功是多少? (2) 若物体从点 A_2 自由下落至点 B , 重力所作的功又为多少? 从所得结果你能得出什么结论(点 A_1 、 A_2 在同一水平线上)?



问题 3-14 图

3-15 保守力作的功总是负的, 对吗? 举例说明. 在式(3-18) $W = -\Delta E_p$ 里, 我们已经知道保守力作功等于势能增量的负值; 若假定为正值, 那又将如何呢?

3-16 把物体抛向空气中, 有哪些力对它做功, 这些力是否都是保守力?

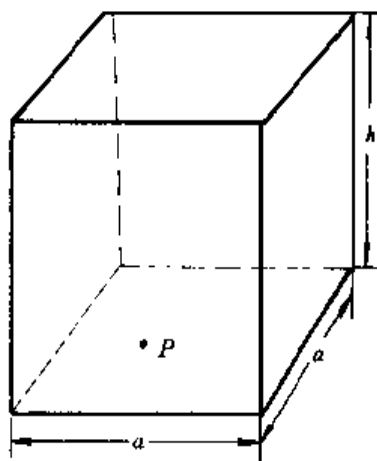
3-17 如果一质点 P 处于如题图所示的方形势阱底部. 若有力作用在质点上, 在什么情形下, 此质点的运动可以不受方形势阱的束缚; 在什么情形下, 质点仍要受束缚.

3-18 举例说明用能量方法和用牛顿定律各自求解哪些力学问题较方便, 哪些力学问题不方便.

3-19 在弹性碰撞中, 有哪些量保持不变, 在非弹性碰撞中又有哪些量保持不变?

3-20 在质点系的质心处, 一定存在一个质点吗?

3-21 假设在宇宙空间站外面, 有两位宇航员甲和乙漂浮在太空中. 起先甲将扳手扔给乙, 过后, 乙又将此扳手扔还给甲. 试问他们的质心要如何运动?



问题 3-17 图

习 题

3-1 一架以 $3.0 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率水平飞行的飞机,与一只身长为 0.20 m 、质量为 0.50 kg 的飞鸟相碰.设碰撞后飞鸟的尸体与飞机具有同样的速度,而原来飞鸟对于地面的速率甚小,可以忽略不计.试估计飞鸟对飞机的冲击力(碰撞时间可用飞鸟身长被飞机速率相除来估算).根据本题计算结果,你对于高速运动的物体(如飞机、汽车)与通常情况下不足以引起危害的物体(如飞鸟、小石子)相碰后会产生什么后果的问题有些什么体会?

3-2 质量为 m 的物体,由水平面上点 O 以初速为 v_0 抛出, v_0 与水平面成仰角 α .若不计空气阻力,求:(1) 物体从发射点 O 到最高点的过程中,重力的冲量;(2) 物体从发射点到落回至同一水平面的过程中,重力的冲量.

3-3 质量为 m 的质点作圆锥摆运动,质点的速率为 v ,圆半径为 R .圆锥母线与轴线之间的夹角为 α ,计算拉力在一周内的冲量.

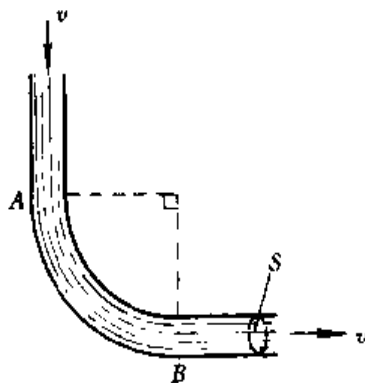
3-4 高空作业时系安全带是非常必要的.假如一质量为 51.0 kg 的人,在操作时不慎从高空竖直跌落下来,由于安全带的保护,最终使他被悬挂起来.已知此时人离原处的距离为 2.0 m ,安全带弹性缓冲作用时间为 0.50 s .求安全带对人的平均冲力.

3-5 如图所示,在水平地面上,有一横截面 $S = 0.20 \text{ m}^2$ 的直角弯管,管中有流速为 $v = 3.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的水通过,求弯管所受力的大小和方向.

3-6 一作斜抛运动的物体,在最高点炸裂为质量相等的两块,最高点距离地面为 19.6 m .爆炸后 1.00 s ,第一块落到爆炸点正下方的地面上,此处距抛出点的水平距离为 $1.00 \times 10^2 \text{ m}$.问第二块落在距抛出点多远的地面上?(设空气的阻力不计.)

3-7 A、B 两船在平静的湖面上平行逆向航行,当两船擦肩相遇时,两船各自向对方平稳地传递 50 kg 的重物,结果是 A 船停了下来,而 B 船以 $3.4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度继续向前驶去. A、B 两船原有质量分别为 $0.5 \times 10^3 \text{ kg}$ 和 $1.0 \times 10^3 \text{ kg}$,求在传递重物前两船的速度.(忽略水对船的阻力.)

3-8 质量为 m' 的人手里拿着一个质量为 m 的物体,此人用与水平面成 α 角的速率 v_0



习题 3-5 图

向前跳去.当他达到最高点时,他将物体以相对于人为 u 的水平速率向后抛出.问:由于人抛出物体,他跳跃的距离增加了多少?(假设人可视为质点.)

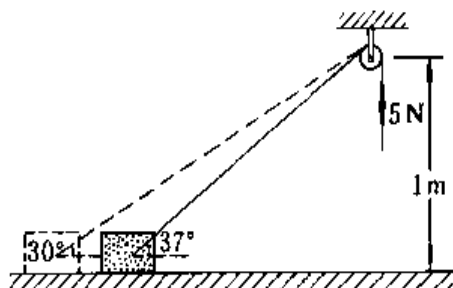
3-9 一质量均匀柔软的绳竖直的悬挂着,绳的下端刚好触到水平桌面上.如果把绳的上端放开,绳将落在桌面上.试证明:在绳下落的过程中的任意时刻,作用于桌面上的压力等于已落到桌面上绳的重量的三倍.

3-10 设在地球表面附近,一初质量为 $5.00 \times 10^5 \text{ kg}$ 的火箭,从尾部喷出气体的速率为 $2.00 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. (1) 试问:每秒需喷出多少气体,才能使火箭最初向上的加速度大小为 $4.90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. (2) 若火箭的质量比为 6.00,求该火箭的最后速率.

3-11 一火箭垂直向上发射,它的气体质量排出率恒为 $5.00 \times 10^{-2} m_0 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$,其中 m_0 是火箭最初的质量.火箭排出的气体相对于火箭的速率为 $5.00 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.求发射 10.0 s 后火箭的速度和高度.(重力略去不计.)

3-12 铁路上有一静止的平板车,其质量为 m' ,设平板车可无摩擦地在水平轨道上运动.现有 N 个人从平板车的后端跳下,每个人的质量均为 m ,相对平板车的速度均为 u .问:在下列两种情况下, (1) N 个人同时跳离; (2) 一个人、一个人地跳离,平板车的末速是多少?所得的结果为何不同,其物理原因是什么?

3-13 如图所示,一绳索跨过无摩擦的滑轮,系在质量为 1.00 kg 的物体上,起初物体



习题 3-13 图

静止在无摩擦的水平平面上.若用 5 N 的恒力作用在绳索的另一端,使物体向右作加速运动.

当系在物体上的绳索从与水平面成 30° 角变为 37° 角时,力对物体所作的功为多少? 已知滑轮与水平面之间的距离为 1 m .

3-14 一物体在介质中按规律 $x = ct^3$ 作直线运动, c 为一常量. 设介质对物体的阻力正比于速度的平方. 试求物体由 $x_0 = 0$ 运动到 $x = l$ 时,阻力所作的功. (已知阻力系数为 k)

3-15 一人从 10.0 m 深的井中提水,起始桶中装有 10.0 kg 的水,由于水桶漏水,每升高 1.00 m 要漏去 0.20 kg 的水. 求水桶被匀速地从井中提到井口,人所作的功.

3-16 一质量为 0.20 kg 的球,系在长为 2.00 m 的细绳上,细绳的另一端系在天花板上. 把小球移至使细绳与竖直方向成 30° 角的位置,然后由静止放开. 求: (1) 在绳索从 30° 角到 0° 角的过程中,重力和张力所作的功; (2) 物体在最低位置时的动能和速率; (3) 在最低位置时的张力.

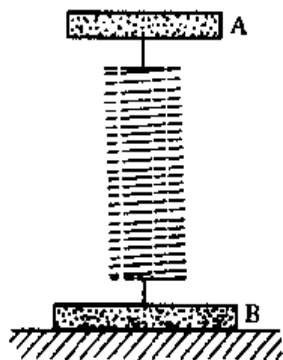
3-17 最初处于静止的质点受到外力的作用,该力的冲量为 $4.00\text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$,在同一时间间隔内,该力所作的功为 2.00 J ,问该质点的质量为多少?

3-18 设两个粒子之间的相互作用力是排斥力,并随它们之间的距离 r 按 $F = k/r^3$ 的规律而变化,其中 k 为常量. 试求两粒子相距为 r 时的势能. (设力为零的地方势能为零.)

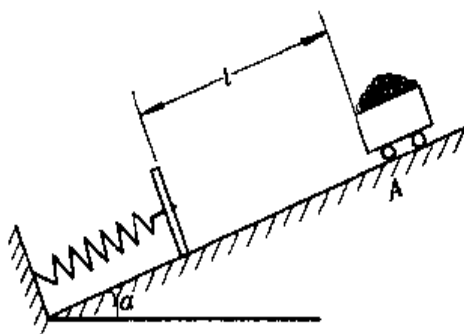
3-19 如果一物体从高为 h_0 处静止下落. 试以 (1) 时间 t 为自变量, (2) 高度 h 为自变量,画出它的动能和势能图线,并证明两曲线中动能和势能之和相等.

3-20 一质量为 m 的质点,系在细绳的一端,绳的另一端固定在平面上. 此质点在粗糙水平面上作半径为 r 的圆周运动. 设质点的最初速度是 v_0 . 当它运动一周时,其速率为 $v_0/2$. 求: (1) 摩擦力作的功; (2) 滑动摩擦因数; (3) 在静止以前质点运动了多少圈?

3-21 如图所示, A 和 B 两块板用一轻弹簧连接起来,它们的质量分别为 m_1 和 m_2 . 问在 A 板上需加多大的压力,方可使力停止作用后,恰能使 A 在跳起来时 B 稍被提起. (设弹簧的劲度系数为 k .)



习题 3-21 图



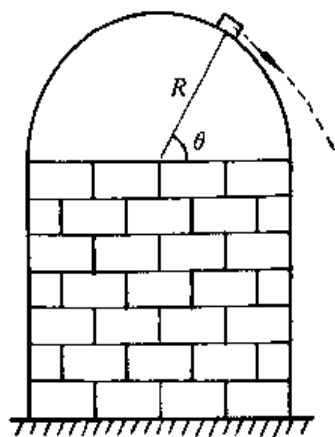
习题 3-22 图

3-22 如图所示,有一自动卸货矿车,满载时的质量的 m' ,从与水平成倾角 $\alpha = 30.0^\circ$ 斜面上的点 A 由静止下滑. 设斜面对车的阻力为车重的 0.25 倍,矿车下滑距离 l 时,矿车与缓冲弹簧一道沿斜面运动. 当矿车使弹簧产生最大压缩形变时,矿车自动卸货,然后矿车借助弹簧的弹性力作用,使之返回原位置 A 再装货. 试问要完成这一过程,空载时与满载时车的质量之比应为多大?

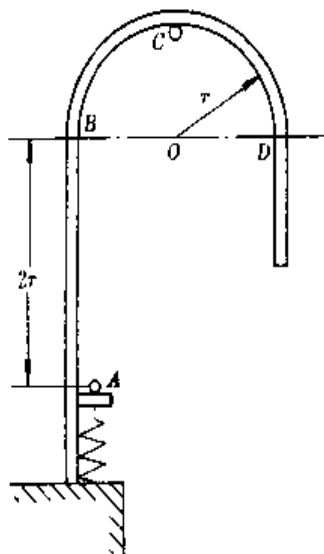
3-23 用铁锤把钉子敲入墙面木板. 设木板对钉子的阻力与钉子进入木板的深度成正比. 若第一次敲击, 能把钉子钉入木板 $1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$. 第二次敲击时, 保持第一次敲击钉子的速度, 那么第二次能把钉子钉入多深?

3-24 一质量为 m 的地球卫星, 沿半径为 $3R_E$ 的圆轨道运动, R_E 为地球的半径. 已知地球的质量为 m_E . 求: (1) 卫星的动能; (2) 卫星的引力势能; (3) 卫星的机械能.

3-25 如图所示, 天文观测台有一半径为 R 的半球形屋面, 有一冰块从光滑屋面的最高点由静止沿屋面滑下, 若摩擦力略去不计, 求此冰块离开屋面的位置以及在该位置的速度.



习题 3-25 图



习题 3-26 图

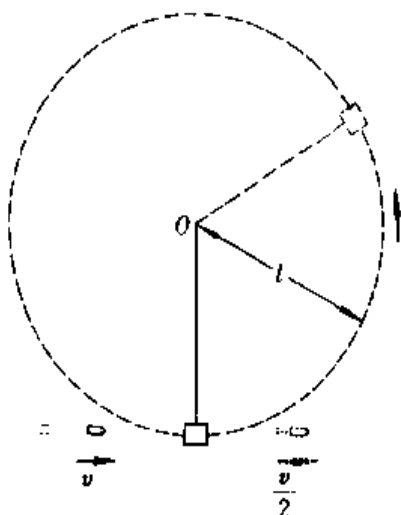
3-26 如图所示, 把质量 $m = 0.20 \text{ kg}$ 的小球放在位置 A 时, 使弹簧被压缩 $\Delta l = 7.5 \times 10^{-2} \text{ m}$. 然后在弹簧的弹性力作用下, 小球从位置 A 由静止被释放, 小球沿轨道 ABCD 运动. 小球与轨道间的摩擦不计. 已知 \widehat{BCD} 为半径 $r = 0.15 \text{ m}$ 的半圆弧, AB 相距为 $2r$. 求弹簧劲度系数的最小值.

3-27 如图所示, 质量为 m 、速度为 v 的钢球, 射向质量为 m' 的靶, 靶中心有一小孔, 内有劲度系数为 k 的弹簧, 此靶最初处于静止状态, 但可在水平面作无摩擦滑动. 求子弹射入靶内弹簧后, 弹簧的最大压缩距离.



习题 3-27 图

3-28 以质量为 m 的弹丸, 穿过如图所示的摆锤后, 速率由 v 减少到 $v/2$. 已知摆锤的质量为 m' , 摆线长度为 l , 如果摆锤能在垂直平面内完成一个完全的圆周运动, 弹丸的速度的最小值应为多少?



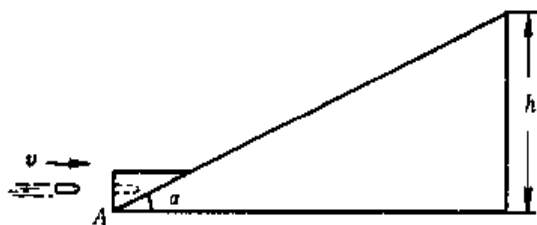
习题 3-28 图

3-29 一个电子和一个原来静止的氢原子发生对心弹性碰撞,试问电子的动能中传递给氢原子的能量的百分数。(已知氢原子质量约为电子质量的 1840 倍)

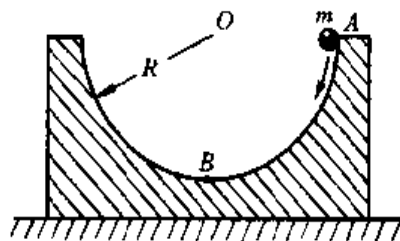
3-30 质量为 $7.2 \times 10^{-23} \text{ kg}$,速率为 $6.0 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的粒子 A,与另一个质量为其一半而静止的粒子 B 发生二维完全弹性碰撞,碰撞后粒子 A 的速率为 $5.0 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.求:(1) 粒子 B 的速率及相对粒子 A 原来速度方向的偏角;(2) 粒子 A 的偏转角.

3-31 有两个带电粒子,它们的质量均为 m ,电荷均为 q ,其中一个处于静止,另一个以初速 v_0 由无限远处向其运动.问这两个粒子最接近的距离是多少?在这瞬时,每个粒子的速率是多少?你能知道这两个粒子的速度将如何变化吗?
(已知库仑定律为 $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$.)

3-32 如图所示,一质量为 m' 的物块放置在斜面的最底端 A 处,斜面的倾角为 α ,高度为 h ,物块与斜面的滑动摩擦因数为 μ ,今有一质量为 m 的子弹以 v_0 速度沿水平方向射入物块并留在其中,且使物块沿斜面向上滑动,求物块滑出顶端时的速度大小.



习题 3-32 图



习题 3-33 图

3-33 如图所示,一个质量为 m 的小球,从内壁为半球形的容器边缘点 A 滑下.设容器质量为 m' ,半径为 R ,内壁光滑,并放置在摩擦可以忽略的水平桌面上.开始时小球和容器都处于静止状态.当小球沿内壁滑到容器底部的点 B 时,受到向上的支持力为多大?

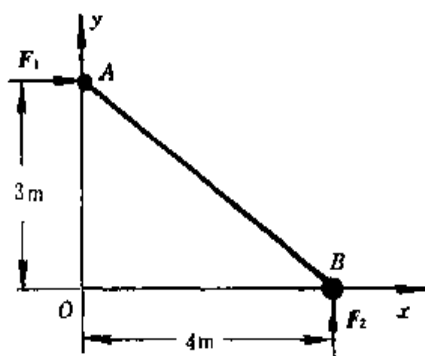
3-34 打桩机锤的质量为 $m = 10 \text{ t}$,将质量为 $m' = 24 \text{ t}$ 、横截面为 $S = 0.25 \text{ m}^2$ (正方形

截面)、长达 $l = 38.5 \text{ m}$ 的钢筋混凝土桩打入地层,单位侧面积上所受泥土的阻力为 $K = 2.65 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$. 问:(1) 桩依靠自重能下沉多深?(2) 在桩稳定后,将锤提升至离桩顶面 1 m 处让其自由下落击桩,假定锤与桩发生完全非弹性碰撞,第一锤能使桩下沉多少?(3) 若桩已下沉 35 m 时,锤再一次下落,此时锤与桩碰撞已不是完全非弹性碰撞了,锤在击桩后反弹起 0.05 m ,这种情况下,桩又下沉多少?

3-35 已知月球质量为地球的 0.013 倍,月球中心与地球中心之间的距离为地球半径的 60 倍. 若取地球的半径为 $6.4 \times 10^6 \text{ m}$,问:由月球和地球所组成的系统,其质心距地球中心多远? 设地球和月球均可看作质量均匀的球体.

3-36 一系统由质量为 3.0 kg 、 2.0 kg 和 5.0 kg 的三个质点组成,它们在同一平面内运动,其中第一个质点的速度为 $(6.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \mathbf{j}$,第二个质点以与 x 轴成 -30° 角、大小为 $8.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度运动. 如果地面上的观察者测出系统的质心是静止的,那么第三个质点的速度是多少?

3-37 如图所示,质量分别为 $m_1 = 10.0 \text{ kg}$ 和 $m_2 = 6.0 \text{ kg}$ 的 A 、 B 两小球,用质量可略去不计的刚性细杆连接,开始时它们静止在 Oxy 平面上,在受到图示的外力 $F_1 = (8.0 \text{ N}) \mathbf{i}$ 和 $F_2 = (6.0 \text{ N}) \mathbf{j}$ 作用下运动. 试求:(1) 它们质心的坐标与时间的函数关系;(2) 系统总动量与时间的函数关系.



习题 3-37 图

第四章 刚体的转动

前几章,我们讲述了质点的运动规律.一般说来,在外力作用下,物体的形状和大小是要发生变化的.但如果在外力作用下,物体的形状和大小不发生变化,也就是说,物体内任意两点间的距离都保持恒定,这种理想化了的物体就叫做刚体.在外力作用下,有些物体的形状和大小变化甚微,以致可忽略不计,这种物体也可近似地看作是刚体.刚体虽然是一个特殊的质点系统,但我们仍然可以运用质点的运动规律来加以研究,从而使牛顿力学的研究范围从质点向刚体拓展开来.本章将着重讲述刚体绕定轴的转动,其主要内容有:角速度和角加速度、转动惯量、力矩、转动动能、角动量等物理量,转动定律和角动量守恒定律.

4-1 刚体的定轴转动

刚体的运动可分为平动和转动两种.而转动又可分为定轴转动和非定轴转动.若刚体中所有点的运动轨迹都保持完全相同,或者说刚体内任意两点间的连线总是平行于它们的初始位置间的连线,如图4-1(a)中的参考线,则刚体的这种运动叫做平动.当刚体中所有的点都绕同一直线作圆周运动时,这种运动叫转动[图4-1(b)],这条直线叫转轴.

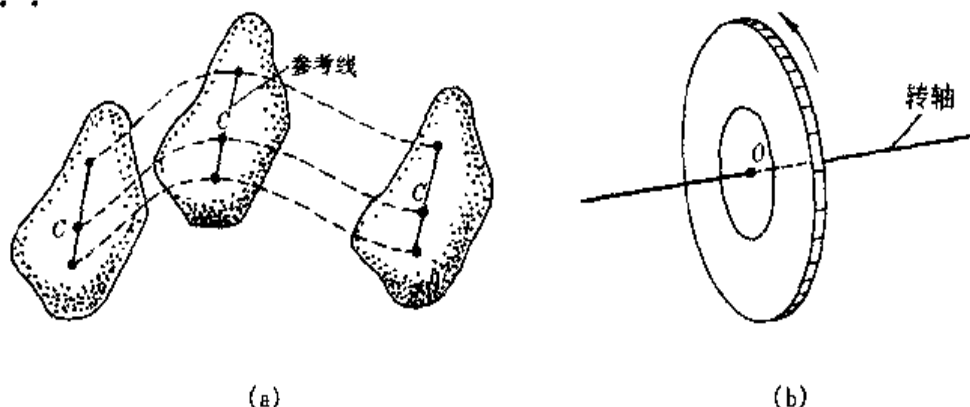


图4-1 刚体的平动(a)与转动(b)

如果转轴的位置或方向是随时间改变的(如旋转陀螺),这个转轴为瞬时转轴.如果转轴的位置或方向是固定不动而不随时间改变的(如车床上工件的转动),这种转轴为固定转轴.此时刚体的运动叫做刚体的定轴转动.

一般刚体的运动可看成是平动和转动的合成运动。如图 4-2 所示,一密度均匀的圆盘在水平面上作无滑动的滚动。从图中可以看出,除圆盘的中心 O 沿

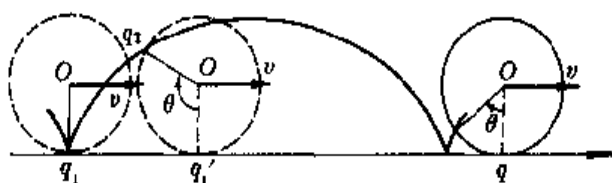


图 4-2 刚体的运动可看成平动与转动的合成运动

直线向前移动外,盘上其它各点既向前移动又绕通过圆盘中心 O 且垂直盘面的轴转动。取圆盘上一点 q ,它在 Δt 时间内,由位置 q_1 运动到位置 q_2 。 q 的运动可看成是先由位置 q_1 向前移动到位置 q_1' ,然后绕通过圆盘中心且垂直盘面的轴转过角 θ ,到达位置 q_2 。由于圆盘是一个刚体,所以圆盘上各点向前移动的情况与圆盘中心(即质心)的运动情况相同,故可用圆盘中心的平动来表示整个盘的平动。

一 刚体转动的角速度和角加速度

如图 4-3(a)所示,有一刚体绕固定轴 z 轴转动。刚体上各点都绕固定轴 z 轴作圆周运动。为描述刚体绕定轴的转动,我们在刚体内选取一个垂直于 Oz 轴的平面作为参考平面,并在此平面上取一参考线,且把这参考线作为坐标轴 Ox ,把转轴与平面的交点作为原点 O ,如图 4-3(b)所示。这样,刚体的方位可由原点 O 到参考平面上的任一点 P 的径矢 r 与 Ox 轴的夹角 θ 确定。角 θ 也叫角坐标。当刚体绕固定轴 Oz 轴转动时,角坐标 θ 要随时间 t 改变。也就是说,角坐标 θ 是时间 t 的函数,即 $\theta = \theta(t)$ 。

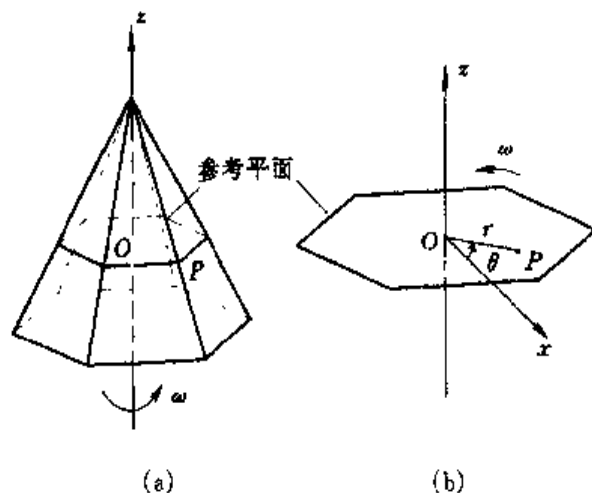


图 4-3 刚体绕定轴转动

刚体绕固定轴 Oz 转动有两种情形,从上向下看,不是顺时针转动就是逆时针转动.因此,为区别这两种转动,我们规定:当径矢 r 从 Ox 轴开始沿逆时针方向转动时,角坐标 θ 为正;当径矢 r 从 Ox 轴开始沿顺时针方向转动时,角坐标 θ 为负.按照这个规定,转动正方向为逆时针转向^①.于是对于绕定轴转动的刚体,可由角坐标 θ 的正负来表示其方位.

设有一刚体绕固定轴 Oz 转动,如图 4-4 所示,在时刻 t ,刚体上点 P 的径矢 r 对 Ox 轴的角坐标为 θ . 经过时间间隔 dt ,刚体上点 P 的角坐标为 $\theta + d\theta$. $d\theta$ 为刚体在 dt 时间内的角位移.于是,刚体对转轴的角速度为

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (4-1)$$

按照上面关于角坐标 θ 正、负的规定,如 $d\theta > 0$,有 $\omega > 0$,这时刚体绕定轴作逆时针转动;如 $d\theta < 0$,有 $\omega < 0$,这时刚体绕定轴作顺时针转动.图 4-5 是两个绕定轴转动的相同的圆盘,它们的角速度 ω 大小相等,但转动方向相反,轮 A 逆时针转动,轮 B 顺时针转动.这表明,角速度是一个有

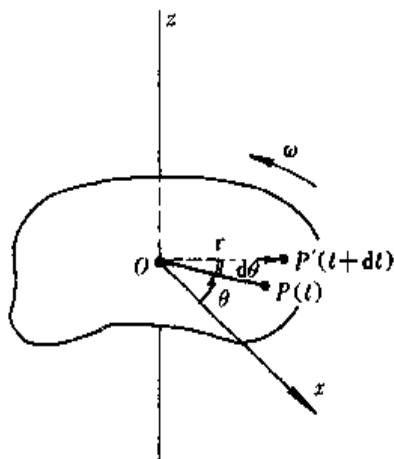


图 4-4 角速度

方向的量.应当指出,只有刚体在绕定轴转动的情况下,其转动方向才可用角速度的正负来表示.在一般情况下,刚体的转轴在空间的方位是随时间改变的(如旋转陀螺),这时刚体的转动方向就不能用角速度的正负来表示,而需用角速度矢量 ω 来表示.

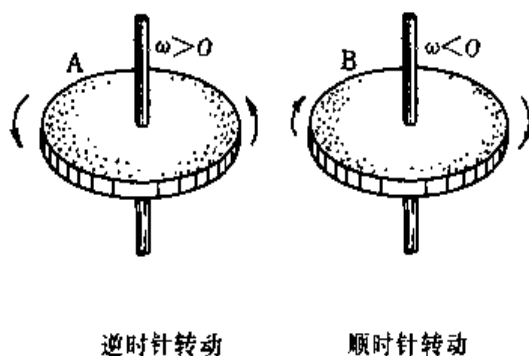


图 4-5 绕定轴转动的刚体,用 ω 的正负
来表示其转动方向

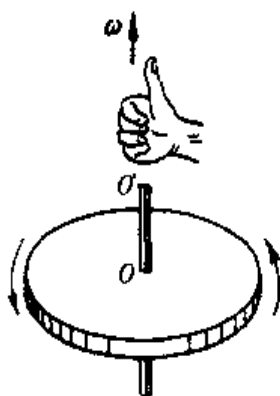


图 4-6 角速度矢量

关于角速度 ω 的方向可由右手法则确定:如图 4-6 所示,把右手的拇指伸直,其余四指弯曲,使弯曲的方向与刚体转动方向一致,这时拇指所指的方向就

^① 我们也可取顺时针转向为转动正方向.但为统一起见,本书取逆时针转向为转动正方向.

是角速度 ω 的方向。角速度的单位名称为弧度每秒,符号为 s^{-1} 或 $rad \cdot s^{-1}$ 。

刚体绕定轴转动时,如果其角速度发生了变化,刚体就具有了角加速度。设在时刻 t_1 ,角速度为 ω_1 ,在时刻 t_2 ,角速度为 ω_2 ,则在时间间隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ 内,此刚体角速度的增量为 $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ 。当 Δt 趋近于零时, $\Delta\omega/\Delta t$ 趋近于某一极限值,它叫做瞬时角加速度,简称角加速度,即

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad (4-2)$$

对于绕定轴转动的刚体,角加速度 α 的方向也可由其正负来表示。在如图 4-7 (a)所示的情况下,角速度 ω_2 的方向与 ω_1 的方向相同,且 $\omega_2 > \omega_1$,那么 $\Delta\omega > 0$, α 为正值,刚体作加速转动;在如图 4-7 (b)所示的情况下, ω_2 的方向虽与 ω_1 的方向相同,但 $\omega_2 < \omega_1$,那么 $\Delta\omega < 0$, α 为负值,刚体作减速转动。

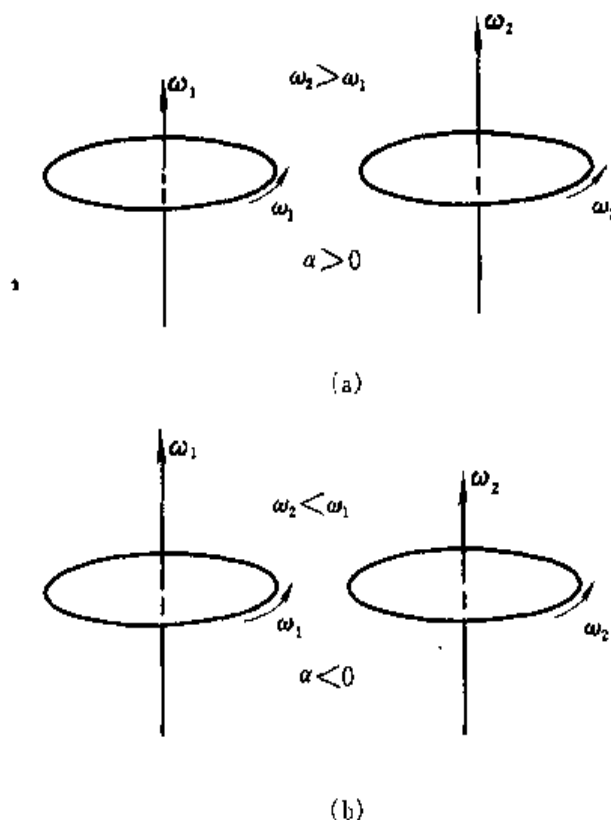


图 4-7 定轴转动的角加速度

角加速度的单位名称为弧度每二次方秒,符号为 s^{-2} 或 $rad \cdot s^{-2}$ 。

二 匀变速转动公式

当刚体绕定轴转动时,如果在任意相等时间间隔 Δt 内,角速度的增量都相等,这种变速转动叫做匀变速转动。匀变速转动的角加速度为一恒量,即 $\alpha = \text{恒量}$ 。

由式(4-1)和式(4-2)可求得刚体绕定轴作匀变速转动时角位移、角速度、

角加速度和时间之间的关系式. 我们把这些公式与质点匀变速直线运动公式列表对比如下:

表 4-1

质点作匀变速直线运动	刚体绕定轴作匀变速转动
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

三 角量与线量的关系

当刚体绕定轴转动时, 组成刚体的所有质点都绕定轴作圆周运动. 因此, 描述刚体运动状态的角量和线量之间的关系, 可以用第一章第 1-3 节有关圆周运动中相应的角量和线量关系来表述.

如图 4-8 所示, 有一刚体以角速度 ω 绕定轴 OO' 转动. 设刚体内有一点 P , 它距转轴的垂直距离为 r . 由第 1-3 节的式(1-13)可知, 点 P 的线速度与角速度大小之间的关系为

$$v = r\omega \quad (4-3)$$

显然, 刚体上各点的线速度 v 与各点到转轴的垂直距离 r 成正比, 距轴越远, 线速度越大.

点 P 的切向加速度和法向加速度则分别为

$$a_t = r\alpha \quad (4-4)$$

$$a_n = r\omega^2 \quad (4-5)$$

由上两式, 同样可以看出, 对一绕定轴转动的刚体, 距轴越远处, 其切向加速度和法向加速度也越大.

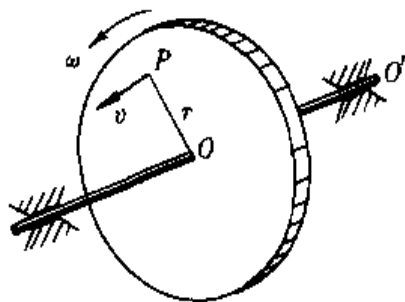


图 4-8 角量和线量的关系

例 1 一飞轮半径为 0.2 m 、转速为 $150 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$, 因受到制动而均匀减速, 经 30 s 停止转动. 试求: (1) 角加速度和在此时间内飞轮所转的圈数; (2) 制动开始后 $t = 6 \text{ s}$ 时飞轮的角速度; (3) $t = 6 \text{ s}$ 时飞轮边缘上一点的线速度、切向加速度和法向加速度.

解 (1) 由题意知 $\omega_0 = \frac{2\pi \times 150}{60} = 5\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $t = 30 \text{ s}$ 时, $\omega = 0$.

设 $t = 0$ 时, $\theta_0 = 0$. 因飞轮作匀减速运动, 由表 4-1 得

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 5\pi}{30} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} = -\frac{\pi}{6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

上式中“-”号表示 α 的方向与 ω_0 的方向相反. 而飞轮在 30 s 内转过的角度为

$$\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} = \frac{-(5\pi)^2}{2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right)} = 75\pi \text{ rad}$$

于是,飞轮共转

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{75\pi}{2\pi} = 37.5 \text{ r}$$

(2) 在 $t = 6 \text{ s}$ 时,飞轮的角速度为

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 5\pi - \frac{\pi}{6} \times 6 = 4\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

(3) 由式(4-3)得 $t = 6 \text{ s}$ 时,飞轮边缘上一点的线速度的大小为

$$v = r\omega = 0.2 \times 4\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 2.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

由式(4-4)和式(4-5)得该点的切向加速度和法向加速度为

$$a_t = r\alpha = 0.2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = -0.105 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_n = r\omega^2 = 0.2 \times (4\pi)^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 31.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

例2 在高速旋转的微型电动机里,有一圆柱形转子可绕垂直其横截面通过中心的轴转动.开始时,它的角速度 $\omega_0 = 0$,经 300 s 后,其转速达到 $18\,000 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$.已知转子的角加速度 α 与时间成正比.问在这段时间内,转子转过多少转?

解 由题意知,转子是绕定轴转动,且角加速度 α 是随时间的延长而增大的,故转子是作变角加速度定轴转动.设转子的角加速度为

$$\alpha = ct$$

其中 c 为比例常数.由角加速度定义及上式,有

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = ct$$

得

$$d\omega = ct dt$$

由题意有

$$\int_0^\omega d\omega = c \int_0^t t dt$$

积分得

$$\omega = \frac{1}{2} ct^2 \quad (1)$$

由题条件知,在 $t = 300 \text{ s}$ 时, $\omega = 18\,000 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1} = 18\,000 \times \frac{2\pi}{60} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 600\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

所以,由式(1)得

$$c = \frac{2\omega}{t^2} = \frac{2 \times 600\pi}{300^2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-3} = \frac{\pi}{75} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-3}$$

于是,式(1)为

$$\omega = \frac{\pi}{150} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-3} t^2$$

由角速度的定义及上式,有

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{150} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-3} t^2$$

$$\text{得} \quad \int_0^{\theta} d\theta = \frac{\pi}{150} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-3} \int_0^t t^2 dt$$

$$\text{有} \quad \theta = \frac{\pi}{150} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-3} t^3$$

在 300 s 内, 转子转过的转数为

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi \times 450} (300)^3 = 3 \times 10^4$$

4-2 力矩 转动定律 转动惯量

在上一节里, 我们只讨论了刚体定轴转动的运动学问题. 这一节, 我们将讨论刚体定轴转动的动力学问题, 即研究刚体获得角加速度的原因以及刚体绕定轴转动时所遵守的定律. 为此, 我们先引进力矩这个物理量.

一 力矩

经验告诉我们, 对绕定轴转动的刚体来说, 外力对刚体转动的影响, 不仅与力的大小有关, 而且还与力的作用点的位置和力的方向有关. 例如, 用同样大小的力推门, 当作用点靠近门轴时, 不容易把门推开; 当作用点远离门轴时, 就容易把门推开; 当力的作用线通过门轴时, 就不能把门推开. 我们用力矩这个物理量来描述力对刚体转动的作用.

图 4-9 是刚体的一个横截平面, 它可绕通过点 O 且垂直于该平面的转轴 Oz 旋转. 作用在刚体内点 P 上的力 F 亦在此平面内^①. 从转轴与截面的交点 O 到力 F 的作用线的垂直距离 d 叫做力对转轴的力臂, 力的大小 F 和力臂 d 的乘积, 就叫做力 F 对转轴的力矩^②, 用 M 表示, 即

$$M = Fd \quad (4-6a)$$

由图 4-9 可以看出, r 为由点 O 到力 F 的作用点 P 的径矢, θ 为径矢 r 与力 F 之间的夹角. 由于 $d = r \sin \theta$, 故上式为

$$M = Fr \sin \theta \quad (4-6b)$$

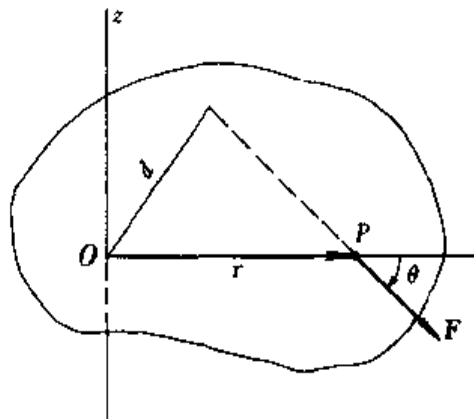


图 4-9 力矩

应当指出, 力矩不仅有大小, 而且有方向. 如图 4-10 所示, 两个一样的可

① 如果作用在刚体上的外力不在此平面内, 那么 F 应当理解为外力在平面内的分矢量, 这样该分矢量才对刚体转动产生影响.

② 下面我们还将讨论质点或刚体对某给定参考点的转动, 这时式 (4-6) 所表示的力矩可理解为质点或刚体对参考点的力矩.

绕定轴转动的圆盘,有大小相等、方向相反的力 F 分别作用于这两个静止圆盘的边缘上. 这两个力的力矩所产生的转动效果是不同的. 在图 4-10(a)中,力矩驱使转盘沿转动正方向即逆时针方向旋转,而在图 4-10(b)中,力矩则驱使转盘沿转动负方向即顺时针方向旋转. 由此可见,力矩是有大小、有方向的矢量. 对于绕定轴转动的刚体,力矩的正负反映了力矩的矢量性.

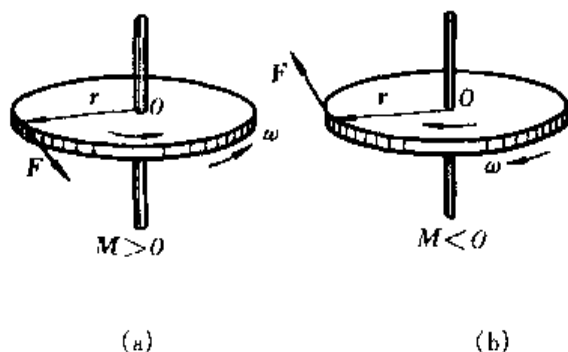


图 4-10 绕定轴转动,力矩的正负

由矢量的矢积定义^①,力矩矢量 M 可用径矢 r 和力 F 的矢积表示,即

$$M = r \times F \quad (4-7)$$

M 的大小为

$$M = Fr \sin \theta$$

M 的方向垂直于 r 与 F 所构成的平面,也可由如图 4-11 所示的右手法则确定:把右手拇指伸直,其余四指弯曲,弯曲的方向是由径矢 r 通过小于 180° 的角 θ 转向力 F 的方向,这时拇指所指的方向就是力矩的方向.

对定轴转动来说,用矢积表示力矩的方向,与先规定转动正方向再按力矩的正负来确定力矩方向是一致的.

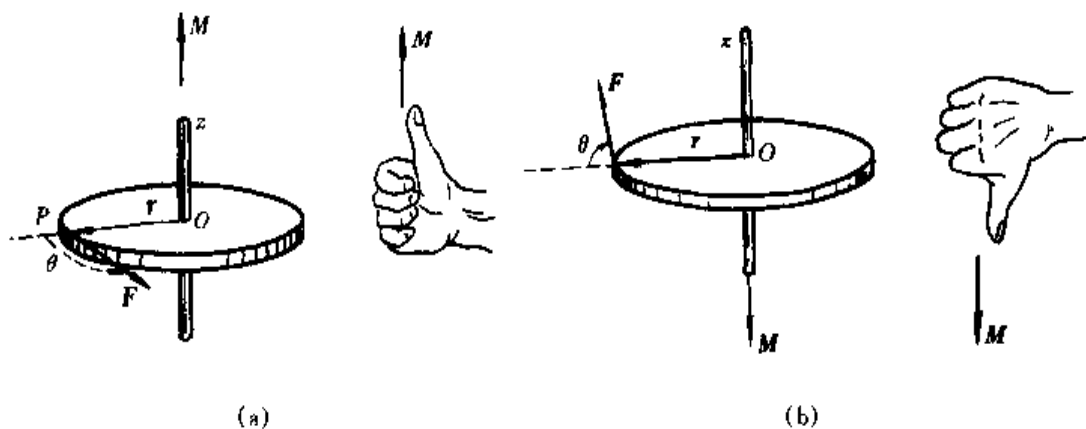


图 4-11 确定力矩方向的右手法则

如图 4-12 所示,如果有几个外力同时作用在一个绕定轴转动的刚体上,而

^① 参阅附录一中矢量的矢积式(14).

且这几个外力都在与转轴相垂直的平面内,则它们的合外力矩等于这几个外力矩的代数和,即

$$M = -F_1 r_1 \sin \theta_1 + F_2 r_2 \sin \theta_2 + F_3 r_3 \sin \theta_3$$

若 $M > 0$, 合力矩的方向沿 Oz 轴正向; 若 $M < 0$, 合力矩方向则与 Oz 轴正向相反。

在国际单位制中, 力矩的单位名称为牛顿米, 符号为 $\text{N} \cdot \text{m}$. 力矩的量纲为 ML^2T^{-2} .

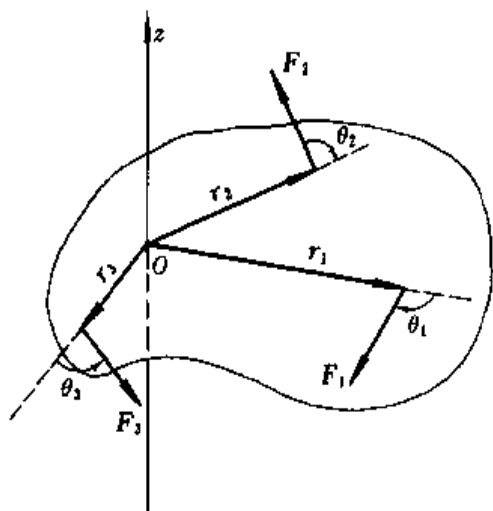


图 4-12 几个力作用在绕定轴转动刚体上的合力矩

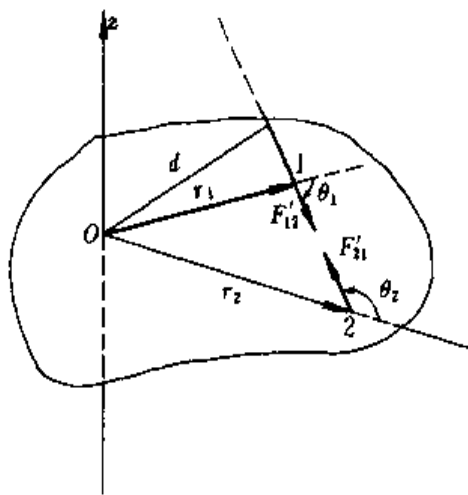


图 4-13 内力对转轴的力矩

上面我们仅讨论了作用于刚体的外力的力矩, 而实际上, 刚体内各质点间还有内力作用, 在讨论刚体的定轴转动时, 这些内力的力矩要不要计算呢?

设刚体由 n 个质点组成, 其中第 1 个质点和第 2 个质点间相互作用力在与转轴 Oz 垂直的平面内的分力各为 F'_{12} 和 F'_{21} , 它们大小相等、方向相反, 且在同一直线上, 即 $F'_{12} = -F'_{21}$ (图 4-13). 如取刚体为一系统, 那么这两个力属系统内力. 从图 4-13 中可以看出, $r_1 \sin \theta_1 = r_2 \sin \theta_2 = d$. 这两个力对转轴 Oz 的合内力矩为

$$M = M_{21} - M_{12} = F'_{21} r_2 \sin \theta_2 - F'_{12} r_1 \sin \theta_1 = 0$$

上述结果表明, 沿同一作用线的大小相等、方向相反的两个质点间相互作用力对转轴的合力矩为零。

由于刚体内质点间的作用力总是成对出现的, 并遵守牛顿第三定律, 故刚体内各质点间的作用力对转轴的合内力矩亦应为零, 即

$$M = \sum M_i = 0$$

例 1 有一大型水坝高 110 m, 长 1 000 m, 水深 100 m, 水面与大坝表面垂直, 如图 4-14 (a) 所示. 求水作用在大坝上的力, 以及这个力对通过大坝基点 Q 且与 x 轴平行的轴的力矩。

解 如图 4-14(b) 所示, 设水深为 h 、坝长为 L , 在坝面上取一面积元 $dA = L dy$. 若在

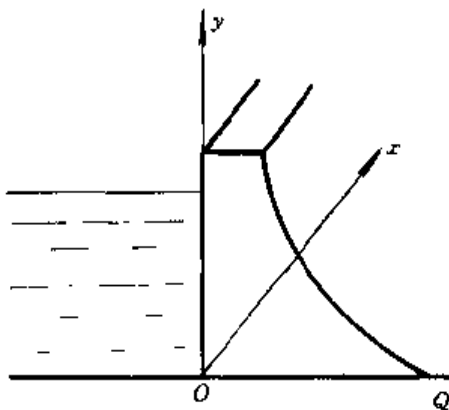
此面积元上的压强为 p , 则作用在此面积元上的力为

$$dF = p dA = p L dy \quad (1)$$

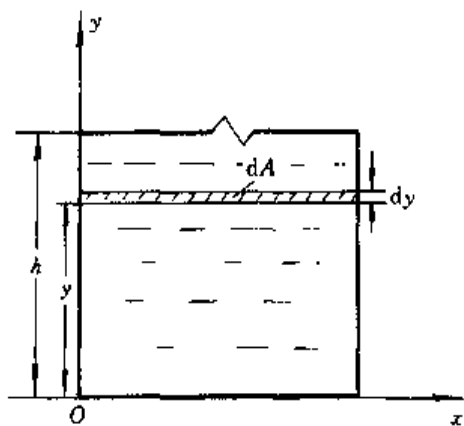
dF 的方向与坝面(即 Oxy 平面)垂直. 如果大气压为 p_0 , 则有

$$p = p_0 + \rho g(h - y)$$

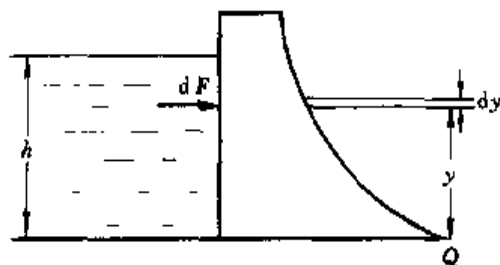
式中 ρ 为水的密度. 把上式代入式(1), 有



(a)



(b)



(c)

图 4-14

$$dF = p_0 L dy + \rho g(h - y) L dy \quad (2)$$

由于作用在坝面上力的方向均相同, 所以垂直作用在大坝坝面上的合力为

$$F = \int_0^h p_0 L dy + \int_0^h \rho g(h - y) L dy$$

得

$$F = p_0 L h + \frac{1}{2} \rho g L h^2 \quad (3)$$

式中 $p_0 = 1.01 \times 10^5$ Pa, 代入已知数据, 有

$$F = (1.01 \times 10^{10} + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 10^{10}) \text{ N} = 5.91 \times 10^{11} \text{ N}$$

下面我们来计算此作用力对通过坝基点 Q , 且与 x 轴平行的轴的力矩.

如图 4-14(c)所示, dF 对通过点 Q 的轴的力矩为

$$dM = ydF$$

把式(2)代入上式,有

$$dM = y[\rho_0 L dy + \rho g(h-y)L dy]$$

由于水作用在大坝上各处的力矩都是顺时针方向,故其合力矩为

$$M = \int dM = \int_0^h \rho_0 L y dy + \int_0^h \rho g(h-y)y dy$$

得

$$M = \frac{1}{2} \rho_0 L h^2 + \frac{1}{6} \rho g L h^3$$

代入已知数据,得 $M = 2.14 \times 10^{12} \text{ N}\cdot\text{m}$.

如遇特大洪水袭击,为保证大坝安全,你认为用什么措施可减少水坝所受的力矩.

二 转动定律

在研究质点运动时,我们知道,在外力的作用下,质点会获得加速度,外力和加速度之间的关系由牛顿第二定律给出为 $F = ma$, 式中 m 为质点的质量. 在外力矩的作用下,绕定轴转动的刚体的角速度也会发生变化,即具有角加速度. 下面来讨论外力矩和角加速度之间的关系.

如图 4-15 所示,刚体可看成由 n 个质点组成,此刚体可绕固定轴 Oz 转动,于是刚体上每一质点都绕 Oz 轴作圆周运动. 在刚体上取质点 i , 其质量为 Δm_i , 绕 Oz 轴作半径为 r_i 的圆周运动. 设质点 i 受两个力作用,一个是外力 F_i , 另一是刚体中其它质点作用的内力 F'_i , 并设外力 F_i 和内力 F'_i 均在与 Oz 轴相垂直的同一平面内. 由牛顿第二定律,质点 i 的运动方程为

$$F_i + F'_i = \Delta m_i a_i$$

如以 F_{ti} 和 F'_{ti} 分别表示外力 F_i 和内力 F'_i 在切向的分力,那么质点 i 的切向运动方程为

$$F_{ti} + F'_{ti} = \Delta m_i a_{ti}$$

a_{ti} 为质点 i 的切向加速度. 由式(4-4)知切向加速度与角加速度 α 之间的关系 $a_{ti} = r_i \alpha$. 所以上式为

$$F_{ti} + F'_{ti} = \Delta m_i r_i \alpha$$

上式两边各乘以 r_i , 得

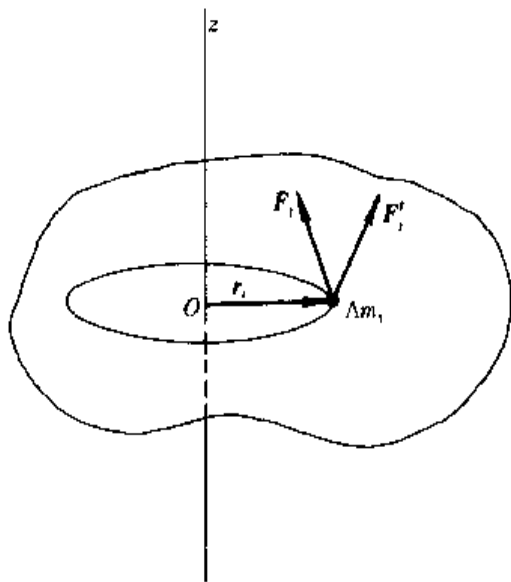


图 4-15 转动定律

$$F_{\alpha} r_i + F'_{\alpha} r_i = \Delta m_i r_i^2 \alpha \quad (4-8)$$

式中 $F_{\alpha} r_i$ 和 $F'_{\alpha} r_i$ 分别是外力 F_i 和内力 F'_i 切向分力的力矩。考虑到外力和内力在法向的分力 F_{in} 和 F'_{in} 均通过转轴 Oz , 所以其力矩为零。故上式左边也可理解为作用在质点 i 上的外力矩与内力矩之和。

若遍及所有质点, 由式(4-8)可得

$$\sum F_{\alpha} r_i + \sum F'_{\alpha} r_i = \sum (\Delta m_i r_i^2) \alpha$$

由上节已知, 刚体内各质点间的内力对转轴的合内力矩为零, 即 $\sum F'_{\alpha} r_i = 0$ 。故上式为

$$\sum F_{\alpha} r_i = \sum (\Delta m_i r_i^2) \alpha$$

而 $\sum F_{\alpha} r_i$ 则为刚体内所有质点所受的外力对转轴的力矩的代数和, 即合外力矩, 用 M 表示, 有 $M = \sum F_{\alpha} r_i$ 。这样上式为

$$M = \sum (\Delta m_i r_i^2) \alpha$$

式中的 $\sum \Delta m_i r_i^2$ 只与刚体的形状、质量分布以及转轴的位置有关, 也就是说, 它只与绕定轴转动的刚体本身的性质和转轴的位置有关, 叫转动惯量。对于绕定轴转动的刚体, 它为一恒量, 以 J 表示, 即

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2 \quad (4-9)$$

这样, 就有

$$M = J\alpha \quad (4-10)$$

式(4-10)表明, 刚体绕定轴转动时, 刚体的角加速度与它所受的合外力矩成正比, 与刚体的转动惯量成反比, 这个关系叫做定轴转动时刚体的转动定律, 简称转动定律。如同牛顿第二定律是解决质点运动问题的基本定律一样, 转动定律是解决刚体定轴转动问题的基本方程。

三 转动惯量

把式(4-10)与描述质点运动的牛顿第二定律的数学表达式相对比可以看出, 它们的形式很相似: 外力矩 M 和外力 F 相对应, 角加速度 α 与加速度 a 相对应, 转动惯量 J 与质量 m 相对应。转动惯量的物理意义也可以这样理解: 当以相同的力矩分别作用于两个绕定轴转动的不同刚体时, 它们所获得的角加速度一般是不一样的。转动惯量大的刚体所获得的角加速度小, 即角速度改变得慢, 也就是保持原有转动状态的惯性大; 反之, 转动惯量小的刚体所获得的角加速度大, 即角速度改变得快, 也就是保持原有转动状态的惯性小。因此我们说, 转动惯量是描述刚体在转动中的惯性大小的物理量。

由 $J = \sum (\Delta m_i r_i^2)$ 可以看出, 转动惯量 J 等于刚体上各质点的质量与各质点到转轴的距离平方的乘积之和。如果刚体上的质点是连续分布的, 则其转动

惯量可以用积分进行计算,即

$$J = \int r^2 dm \quad (4-11)$$

在国际单位制中,转动惯量的单位名称是千克二次方米,符号是 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. 转动惯量的量纲是 ML^2 .

下面计算两种简单形状刚体的转动惯量.

例 2 一质量为 m 、长为 l 的均匀细长棒,求通过棒中心并与棒垂直的轴的转动惯量.

解 设细棒的线密度为 λ . 如图 4-16 所示,取一距离转轴 OO' 为 r 处的质量元 $dm = \lambda dr$,由式(4-11)可得

$$J = \int r^2 dm = \int \lambda r^2 dr$$

由于转轴通过棒的中心,有

$$J = 2\lambda \int_0^{l/2} r^2 dr = \frac{1}{12} \lambda l^3 = \frac{ml^2}{12}$$

如以通过棒的端点且平行于 OO' 的 AA' 轴为转轴,用同样的方法,可计算出棒对此转轴的转动惯量为 $ml^2/3$. 它比转轴为 OO' 时的转动惯量要大. 试说明原因.

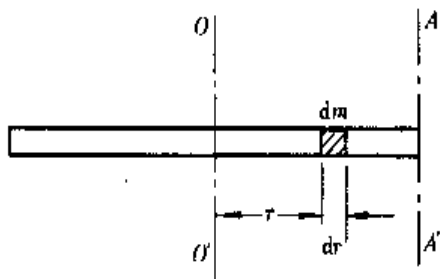


图 4-16

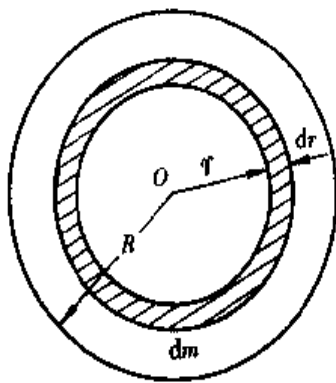


图 4-17

例 3 一质量为 m 、半径为 R 的均匀圆盘,求通过盘中心 O 并与盘面垂直的轴的转动惯量.

解 设圆盘的质量面密度为 σ . 如图 4-17 所示,在圆盘上取一半径为 r 、宽度为 dr 的圆环,圆环的面积为 $2\pi r dr$. 此圆环质量元 $dm = \sigma 2\pi r dr$. 由式(4-11)可以求得通过盘面中心,垂直盘面的轴的转动惯量为

$$J = \int r^2 dm = 2\pi\sigma \int r^3 dr$$

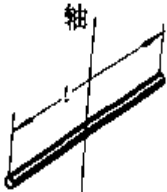

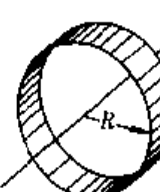

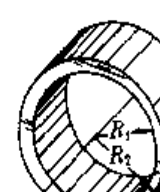

由于圆盘的半径为 R ,有

$$J = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\sigma R^4}{2} = \frac{1}{2} mR^2$$

必须指出,实际上只有对于几何形状简单、质量连续且均匀分布的刚体,才能用积分的方法算出它们的转动惯量.对于任意刚体的转动惯量,通常是用实验的方法测定出来的.表4-2给出了几种刚体的转动惯量.

如以 ρ 代表刚体的体密度, dV 为质量元 dm 的体积元,于是转动惯量可写成 $J = \int_V \rho r^2 dV$. 从该式和表4-2可以看出,刚体的转动惯量与以下三个因素有关.

表4-2 几种刚体的转动惯量

 <p>细棒(转动轴通过中心与棒垂直)</p> $J = \frac{ml^2}{12}$ <p>(a)</p>	 <p>圆柱体(转动轴沿几何轴)</p> $J = \frac{mR^2}{2}$ <p>(b)</p>	 <p>薄圆环(转动轴沿几何轴)</p> $J = mR^2$ <p>(c)</p>
 <p>球体(转动轴沿球的任一直径)</p> $J = \frac{2mR^2}{5}$ <p>(d)</p>	 <p>圆筒(转动轴沿几何轴)</p> $J = \frac{m}{2}(R_1^2 + R_2^2)$ <p>(e)</p>	 <p>细棒(转动轴通过棒的一端与棒长垂直)</p> $J = \frac{ml^2}{3}$ <p>(f)</p>

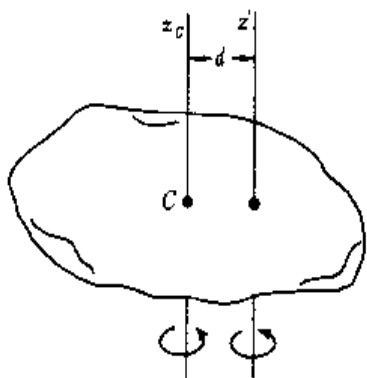
(1) 与刚体的体密度 ρ 有关(几何形状简单的刚体,则与质量 m 有关).如半径相同、厚薄相同的两个圆盘,铁质的转动惯量比木质的大.

(2) 与刚体的几何形状(及体密度 ρ 的分布)有关.从上表中也可以看出,不同形状的刚体,即使质量相同,它们的转动惯量也是不同的.质量分布得离轴越远,物体的转动惯量越大.制造飞轮时,通常采用大而厚的轮缘,就是为了尽可能使其质量分布在边缘上,藉以增大飞轮的转动惯量.

(3) 刚体的转动惯量还与转轴的位置有关.如表4-2中,细棒对通过它中心点的轴和通过它一端的轴的转动惯量是不同的.转轴通过质心的转动惯量可用 J_c 表示.

四 平行轴定理

如图 4-18 所示, 设通过刚体质心的轴线为 z_c 轴, 刚体相对这个轴线的转动惯量为 J_c . 如果有另一轴线 z 与通过质心的轴线 z_c 相平行, 可以证明, 刚体



对通过 z 轴的转动惯量为

$$J = J_c + md^2 \quad (4-12)$$

式中 m 为刚体的质量, d 为两平行轴之间的距离.

上述关系叫做转动惯量的平行轴定理. 由式(4-12)可以看出, 刚体对通过质心轴线的转动惯量最小, 而对任何与质心轴线相平行的轴线的转动惯量 J 都大于 J_c , 即 $J > J_c$. 平行轴定理不仅有助于计算转动惯量, 而且对研究刚体的滚动也是很有帮助的.

图 4-18 平行轴定理

利用平行轴定理, 我们可以求得通过细棒端点且与棒垂直的轴线的转动惯量为

$$J = J_c + md^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

例 4 如图 4-19 所示, 质量为 m_A 的物体 A 静止在光滑水平面上, 它和一质量不计的绳索相连接, 此绳索跨过一半径为 R 、质量为 m_C 的圆柱形滑轮 C, 并系在另一质量为 m_B 的物体 B 上, B 竖直悬挂. 圆柱形滑轮可绕其几何中心轴转动. 当滑轮转动时, 它与绳索间没有滑动, 且滑轮与轴承间的摩擦力可略去不计. 问: (1) 这两物体的线加速度为多少? 水平和竖直两段绳索的张力各为多少? (2) 物体 B 从静止落下距离 y 时, 其速率为多少? (3) 若滑轮与轴承间的摩擦不能略去不计, 并设它们之间的摩擦阻力矩为 M_f . 再求线加速度及绳的张力.

解 (1) 在质点动力学中, 当牵涉到有关滑轮的问题时, 为简单起见, 都假设滑轮的质量可以忽略不计. 如第二章第 2.5 节的例 1 等. 然而, 在很多实际问题中, 滑轮的质量是不能忽略的. 在计及滑轮的质量时, 就应考虑它的转动. 物体 A 和 B 是作平动, 它们加速度 a 的大小取决于每个物体所受的合力. 滑轮 C 作转动, 它的角加速度 α 取决于作用在它上面的合外力矩. 首先将三个物体隔离出来, 并作如图 4-19 所示的示力图. 张力 F_{T1} 和 F_{T2} 的大小是不能假定相等的, 但 $F_{T2} = F'_{T2}$, $F_{T1} = F'_{T1}$.

应用牛顿第二定律, 并考虑到绳索不伸长, 故对 A、B 两物体, 得

$$F_{T1} = m_A a \quad (1)$$

$$m_B g - F_{T2} = m_B a \quad (2)$$

在上式中, 我们选择物体 B 加速度的正方向是竖直向下的, 物体 A 加速度的正方向是向右的. 按题意略去滑轮与轴承间的摩擦力, 故滑轮 C 受到重力 P_C 、张力 F'_{T1} 和 F'_{T2} 以及轴对它

的力 F_T 等的作用, 由于转轴通过滑轮的中心, 所以仅有张力 F'_{T1} 和 F'_{T2} 对它有力矩作用, 因为 $F'_{T1} = F_{T1}$, 由转动定律有

$$RF_{T2} - RF_{T1} = J\alpha \quad (3)$$

滑轮 C 以其中心为轴的转动惯量是 $J = \frac{1}{2} m_C R^2$. 因为绳索在滑轮上无滑动, 在滑轮边缘上一点的切向加速度与绳索和物体的加速度大小相等, 它与滑轮转动的角加速度的关系为 $a = R\alpha$. 把上述各量代入式(3), 有

$$F_{T2} - F_{T1} = \frac{1}{2} m_C a \quad (4)$$

解式(1)、式(2)和式(4), 得

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_B g}{m_A + m_B + \frac{1}{2} m_C} \\ F_{T1} &= \frac{m_A m_B g}{m_A + m_B + \frac{1}{2} m_C} \\ F_{T2} &= \frac{\left(m_A + \frac{1}{2} m_C\right) m_B g}{m_A + m_B + \frac{1}{2} m_C} \end{aligned}$$

在上述方程中, 如令 $m_C = 0$, 或滑轮的质量较之物体 A 和 B 的质量很小, 即 m_C 可以略去不计时, 就可得

$$F_{T1} - F_{T2} = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} g \quad (5)$$

若略去滑轮的质量, 利用与第二章第 2-5 节例 1 相类似的解法, 可以得到与上式相似的结果.

(2) 因为物体 B 是由静止出发作匀加速直线运动, 所以它下落距离 y 时的速率为

$$v = \sqrt{2ay} = \sqrt{\frac{2m_B g y}{m_A + m_B + \frac{1}{2} m_C}}$$

(3) 如果滑轮与轴承间的摩擦力不能略去不计, 这时滑轮还要受到摩擦阻力矩 M_f 作用, 转动定律应写成

$$RF_{T2} - RF_{T1} - M_f = J\alpha$$

或

$$RF_{T2} - RF_{T1} - M_f = \frac{1}{2} m_C R^2 \frac{a}{R} = \frac{1}{2} m_C R a \quad (6)$$

解式(1)、式(2)和式(6), 得

$$a = \frac{m_B g - M_f/R}{(m_A + m_B) + \frac{1}{2} m_C}$$

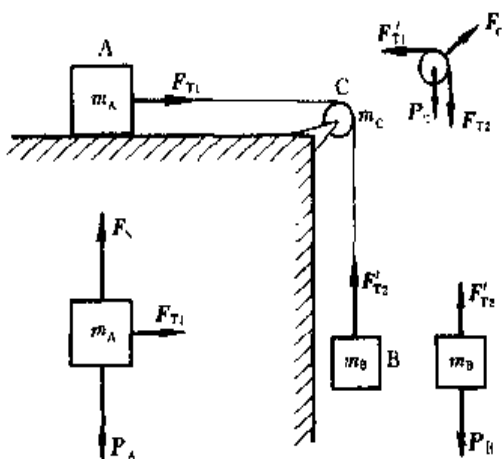


图 4-19

$$F_{T1} = \frac{m_A(m_B g - M_t/R)}{(m_A + m_B) + \frac{1}{2}m_C}$$

$$F_{T2} = \frac{m_B \left[\left(m_A + \frac{1}{2}m_C \right) g + M_t/R \right]}{m_A + m_B + \frac{1}{2}m_C}$$

若可略去滑轮的质量 m 、滑轮与轴承间的摩擦阻力矩 M_t , 那么由上式可得与式(5)相同的结果. 可见运用式(5)时, 必须考虑到它的适用条件.

例 5 如图 4-20 所示, 一长为 l 、质量为 m 的匀质细杆竖直放置, 其下端与一固定铰链 O 相接, 并可绕其转动. 由于此竖直放置的细杆处于非稳定平衡状态, 当其受到微小扰动时, 细杆将在重力作用下由静止开始绕铰链 O 转动. 试计算细杆转到与竖直线呈 θ 角时的角加速度和角速度.

解 细杆受到两个力作用, 一个是重力 P , 另一个是铰链对细杆的约束力 F_N . 由于细杆是匀质的, 所以重力 P 可视为作用于杆的重心. 以铰链 O 为转轴, 当杆与竖直线成 θ 角时, 重力 P 对铰链 O 的重力矩为 $\frac{1}{2}mgl \sin \theta$. 而约束力 F_N 始终通过转轴 O , 其力矩为零. 故由转动定律, 有

$$\frac{1}{2}mgl \sin \theta = J\alpha$$

式中细杆绕轴 O 的转动惯量 $J = \frac{1}{3}ml^2$. 于是细杆与竖直线成 θ 角时的角加速度为

$$\alpha = \frac{3g}{2l} \sin \theta$$

由角加速度定义, 有

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3g}{2l} \sin \theta$$

进行如下变换

$$\frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{3g}{2l} \sin \theta$$

由于 $\omega = d\theta/dt$, 上式为

$$\omega d\omega = \frac{3g}{2l} \sin \theta d\theta$$

对上式积分, 并利用起始条件: $t=0$ 时, $\theta_0=0$, $\omega_0=0$, 得

$$\int_0^\omega \omega d\omega = \frac{3g}{2l} \int_0^\theta \sin \theta d\theta$$

积分后化简, 细杆转到与竖直线成 θ 角时的角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1 - \cos \theta)}$$

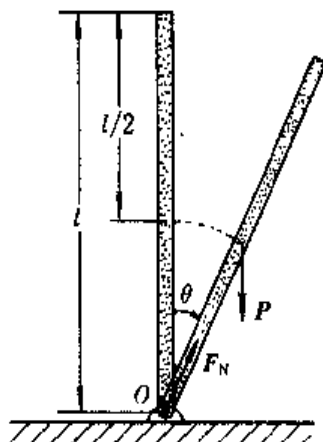


图 4-20

例 6 设有一个圆盘形的飞轮, 其质量为 $m=10.0 \text{ kg}$, 半径为 $r=0.20 \text{ m}$. 飞轮可绕通

过盘心垂直盘面的轴转动. 由于制造上的原因, 飞轮的质心不在转轴上, 质心距转轴的距离为 $d = 0.001 \text{ m}$. 设飞轮在恒外力矩 $M = 5.0 \text{ N}\cdot\text{m}$ 的作用下由静止开始转动, 经 $t = 10.0 \text{ s}$ 后撤去外力矩, 飞轮作匀速转动. 求由于飞轮的质心偏离转轴而引起的对转轴的力.

解 因飞轮的质心距转轴的距离远小于飞轮的半径, 即 $d \ll r$, 故飞轮绕转轴的转动惯量仍可视为 $J = \frac{1}{2} mr^2$. 由转动定律可得

$$M = J\alpha = \frac{1}{2} mr^2 \alpha \quad (1)$$

由于在 $0 < t \leq 10 \text{ s}$ 的时间间隔内, 飞轮在恒外力矩 M 作用下作匀角加速转动, 且考虑到在 $t = 0$ 时, $\omega_0 = 0$, 所以有

$$\omega = \alpha t \quad (2)$$

将式(1)代入式(2), 有

$$\omega = \frac{2Mt}{mr^2}$$

将已知数据代入, 可得飞轮作匀速转动时的角速度为

$$\omega = \frac{2 \times 5.0 \times 10.0}{10.0 \times (0.20)^2} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} = 250 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

质心也随飞轮一道以 $\omega = 250 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ 的角速度绕转轴作圆周运动, 其向心加速度为 $a_c = v_c^2/d = d\omega^2$. 由质心的运动定律知, 作用在质心上的力为

$$F_c = ma_c = md\omega^2$$

力 F_c 的方向是指向转轴的. 把已知数据代入, 得

$$F_c = 10.0 \times 0.001 \times (250)^2 \text{ N} = 625 \text{ N}$$

所以, 由于飞轮偏心而作用于转轴的力 F_c' 为 625 N . 因为飞轮在转动过程中, 质心绕转轴作圆周运动, 故 F_c' 的方向也随时间作周期性变化. 在工业生产中, 飞轮的偏心常常会引起机器的振动, 从而影响加工的精度和使用寿命, 为此, 常常要化许多时间把飞轮的质心调整到转轴上, 以达到所谓“静平衡”. 然而在有些工业生产中, 又常利用飞轮偏心而引起的振动, 如振动打夯机、振动筛和振动泵等.

4-3 角动量 角动量守恒定律

在第三章中, 我们研究了力对改变质点运动状态所起的作用. 我们曾从力对时间的累积作用出发, 引出动量定理, 从而得到动量守恒定律; 还从力对空间的累积作用出发, 引出动能定理, 从而得到机械能守恒定律和能量守恒定律. 对于刚体, 上一节我们讨论了在外力矩作用下刚体绕定轴转动的转动定律, 同样, 力矩作用于刚体总是在一定的时间和空间里进行的. 为此, 这一节将讨论力矩对时间的累积作用, 得出角动量定理和角动量守恒定律. 下一节讨论力矩对空间的累积作用, 得出刚体的转动动能定理.

根据本课程的教学要求, 这一节着重讨论绕定轴转动的刚体的角动量定理

和角动量守恒定律,为此,我们先讨论质点对给定点的角动量定理和角动量守恒定律.

一 质点的角动量定理和角动量守恒定律

1 质点的角动量

如图 4-21 所示,设有一个质量为 m 的质点位于直角坐标系中点 A ,该点相对原点 O 的位矢为 r ,并具有速度 v (即动量为 $p = mv$). 我们定义,质点 m

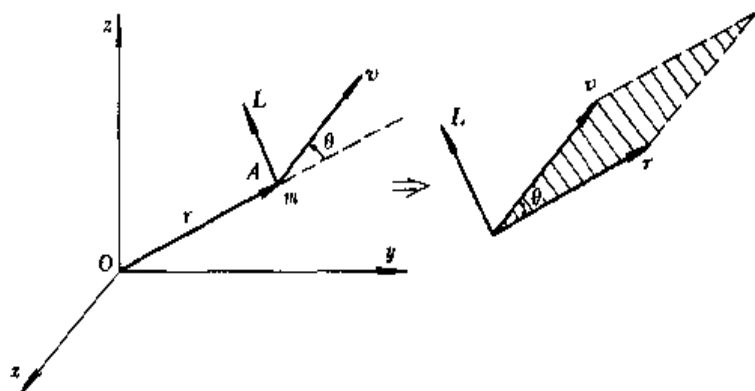


图 4-21 质点的角动量

对原点 O 的角动量为

$$L = r \times p = mr \times v \quad (4-13)$$

质点的角动量 L 是一个矢量,它的方向垂直于 r 和 v (或 p)的平面,并遵守右手法则:右手拇指伸直,当四指由 r 经小于 180° 的角 θ 转向 v (或 p)时,拇指的指向就是 L 的方向.至于质点角动量 L 的值,由矢量的矢积法则知

$$L = rmv \sin \theta \quad (4-14)$$

式中 θ 为 r 与 v (或 p)之间的夹角.

应当指出,质点的角动量是与位矢 r 和动量 p 有关的,也就是与参考点 O 的选择有关.因此在讲述质点的角动量时,必须指明是对哪一点的角动量.

若质点在半径为 r 的圆周上运动(图 4-22),在某一时刻,质点位于点 A ,速度为 v .如以圆心 O 为参考点,那么 r 与 v (或 p)总是相垂直的.于是质点对圆心 O 的角动量 L 的大小为

$$L = rmv \quad (4-15a)$$

因为 $v = r\omega$,上式亦可写成

$$L = mr^2 \omega \quad (4-15b)$$

至于 L 的方向应平行于 z 轴,且与 ω 的方向相同.

2 质点的角动量定理

现在我们来讨论力矩对质点转动的作用,并导出质点的角动量定理.

设质量为 m 的质点, 在合力 F 作用下, 其运动方程为

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

由于质点对参考点 O 的位矢为 r , 故以 r 叉乘上式两边, 有

$$r \times F = r \times \frac{d}{dt}(mv) \quad (4-16)$$

考虑到

$$\frac{d}{dt}(r \times mv) = r \times \frac{d}{dt}(mv) + \frac{dr}{dt} \times mv$$

而且

$$\frac{dr}{dt} \times v = v \times v = 0$$

故式(4-16)可写成

$$r \times F = \frac{d}{dt}(r \times mv)$$

比照(4-7)的情形, 式中 $r \times F$ 称为合力 F 对参考点 O 的合力矩 M . 于是上式为

$$M = \frac{d}{dt}(r \times mv) = \frac{dL}{dt} \quad (4-17)$$

上式表明, 作用于质点的合力对参考点 O 的力矩, 等于质点对该点 O 的角动量随时间的变化率. 这与牛顿第二定律 $F = \frac{dp}{dt}$ 在形式上是相似的, 只是用 M 代替了 F , 用 L 代替了 p .

上式还可写成

$$M dt = dL$$

$M dt$ 为力矩 M 与作用时间 dt 的乘积, 叫做冲量矩. 上式取积分有

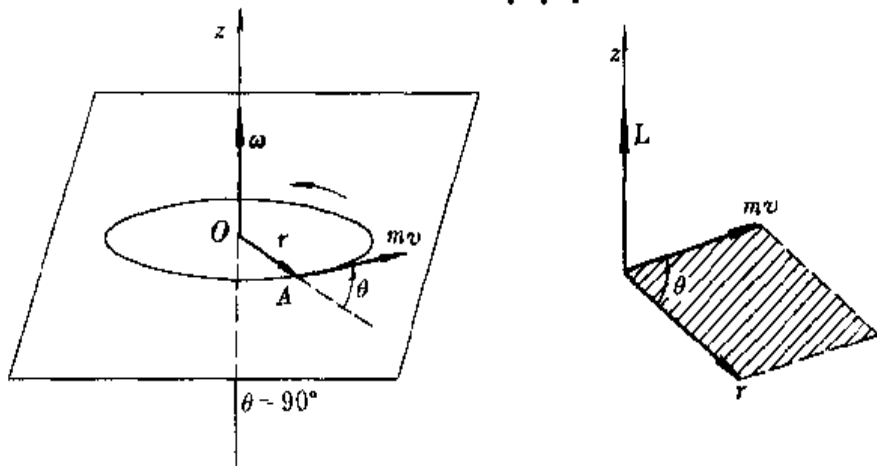


图 4-22 质点作圆周运动的角动量

$$\int_{t_1}^{t_2} M dt = L_2 - L_1 \quad (4-18)$$

式中 L_1 和 L_2 分别为质点在时刻 t_1 和 t_2 对参考点 O 的角动量, $\int_{t_1}^{t_2} M dt$ 为质点在时间间隔 $t_2 - t_1$ 内参考点 O 所受的冲量矩. 因此, 上式的物理意义是: 对同一参考点 O , 质点所受的冲量矩等于质点角动量的增量. 这就是质点的角动量定理.

3 质点的角动量守恒定律

由式(4-18)可以看出, 若质点所受合力矩为零, 即 $M=0$, 则有

$$L = r \times m v = \text{恒矢量} \quad (4-19)$$

上式表明, 当质点所受对参考点 O 的合力矩为零时, 质点对该参考点 O 的角动量为一恒矢量. 这就是质点的角动量守恒定律.

应当注意, 质点的角动量守恒的条件是合力矩 $M=0$. 这可能有两种情况: 一种是合力 $F=0$; 另一种是合力 F 虽不为零, 但合力 F 通过参考点 O , 致使合力矩为零. 质点作匀速圆周运动就是这种例子. 质点作匀速圆周运动时, 作用于质点的合力是指向圆心的所谓有心力^①, 故其力矩为零, 所以质点作匀速圆周运动时, 它对圆心的角动量是守恒的. 不仅如此, 只要作用于质点的力是有心力, 有心力对力心的力矩总是零, 所以, 在有心力作用下质点对力心的角动量都是守恒的. 太阳系中行星的轨道为椭圆, 太阳位于两焦点之一, 太阳作用于行星的引力是指向太阳的有心力, 因此如以太阳为参考点 O , 则行星的角动量是守恒的^②.

在国际单位制中, 角动量的单位是千克二次方米每秒, 符号为 $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, 角动量的量纲为 ML^2T^{-1} .

例1 如图4-23所示, 一半径为 R 的光滑圆环置于竖直平面内. 有一质量为 m 的小球穿在圆环上, 并可在圆环上滑动. 小球开始时静止于圆环上的点 A (该点在通过环心 O 的水平面上), 然后从点 A 开始下滑. 设小球与圆环间的摩擦略去不计. 求小球滑到点 B 时对环心 O 的角动量和角速度.

解 小球受支持力 F_N 和重力 P 的作用. 支持力 F_N 指向环心 O , 对点 O 的力矩为零, 故小球所受的力矩仅为重力矩, 其大小为

$$M = mgR \cos \theta$$

由右手法则可确定, 重力矩的方向垂直纸面向里. 此外, 小球从 A 向 B 滑动的过程中, 角动

① 如果质点在运动过程中所受的力, 总是指向某一给定点, 那么这种力就称为有心力, 而该点就叫力心. 显然质点作圆周运动时所受的向心力, 就可称之为有心力.

② 参阅第五章第5-5节面积定律的论证.

量的大小是随时间改变的,但其方向总是垂直纸面向里.因此,由式(4-17),有

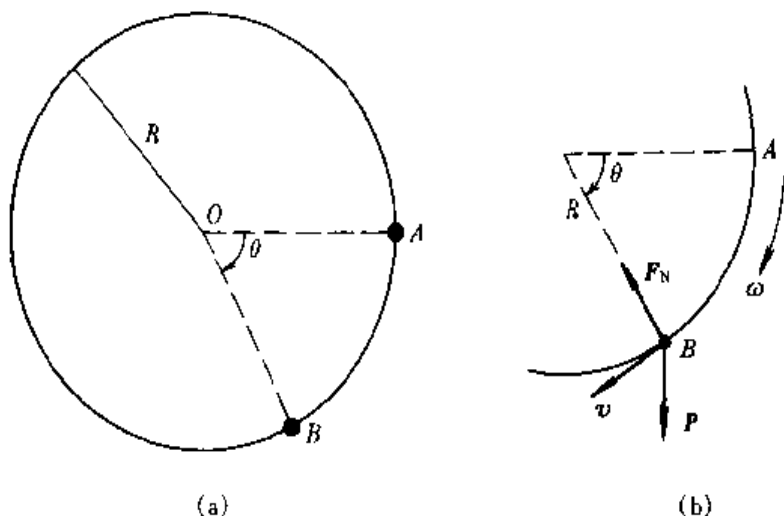


图 4-23

$$mgR \cos \theta = \frac{dL}{dt}$$

$$dL = mgR \cos \theta dt \quad (1)$$

考虑到 $\omega = d\theta/dt$ 及 $L = mRv = mR^2\omega$, 有

$$dt = \frac{mR^2}{L} d\theta \quad (2)$$

将式(2)代入式(1),得

$$LdL = m^2 g R^3 \cos \theta d\theta$$

由题设条件,有 $t=0$ 时, $\theta_0=0$, $L_0=0$. 故上式的积分为

$$\int_0^L LdL = m^2 g R^3 \int_0^\theta \cos \theta d\theta$$

$$\text{即} \quad L = mR^{3/2} (2g \sin \theta)^{1/2} \quad (3)$$

$$\text{由} \quad L = mR^2 \omega$$

$$\text{代入(3)式得} \quad \omega = \left(\frac{2g}{R} \sin \theta \right)^{1/2} \quad (4)$$

应当指出,这道题也可以用质点的功能原理先求解出速度,再求出角速度,并根据角动量的定义再求出 L 的值. 你不妨一试.

例 2 如图 4-24 所示,一质量 $m = 1.20 \times 10^4 \text{ kg}$ 的登月飞船,在离月球表面高度 $h = 100 \text{ km}$ 处绕月球作圆周运动. 飞船采用如下登月方式:当飞船位于图中点 A 时,它向外侧(即沿月球中心 O 到点 A 的位矢方向)短时间喷气,使飞船与月球相切地到达点 B,且 \overline{OA} 与 \overline{OB} 垂直. 飞船所喷气体相对飞船的速度为 $u = 1.00 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. 已知月球的半径 $R = 1700 \text{ km}$;在飞船登月过程中,月球的重力加速度可视为常量 $g = 1.62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. 试问登月飞船在登月过程中所需消耗燃料的质量 Δm 是多少?

解 如图所示,飞船在点 A 的速度为 v_0 ,由万有引力定律和牛顿定律,有

$$G \frac{m_M m}{(R+h)^2} = m \frac{v_0^2}{R+h}$$

式中 m_M 为月球的质量, 又月球表面附近的重力加速度为

$$g = G \frac{m_M}{R^2}$$

由上两式可得

$$v_0^2 = \left(\frac{R^2 g}{R+h} \right)$$

代入已知数据, 有

$$v_0 = \left[\frac{(1700 \times 10^3)^2 \times 1.62}{1700 \times 10^3 + 100 \times 10^3} \right]^{1/2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 1612 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (1)$$

当飞船在点 A 以相对速度 u 向外侧喷气的短时间里, 飞船的质量减少了 Δm 而为 m' , 并获得速度的增量 Δv , 其方向与 u 相反, 且使飞船的速度变为 v_A , 其值为

$$v_A = (v_0^2 + \Delta v^2)^{1/2} \quad (2)$$

在飞船即将喷气时, 其质量由 m' 和 Δm 两部分组成, 其中的 m' 于点 A 和点 B 处只受有心力作用, 故由角动量守恒定律, 有

$$m' v_0 (R+h) = m' v_B R$$

代入已知数据, 得

$$v_B = \frac{R+h}{R} v_0 = 1709 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (3)$$

飞船在点 A 喷出气体后, 在到达月球表面的过程中, 飞船和月球系统的机械能是守恒的, 故得

$$\frac{1}{2} m' v_A^2 - G \frac{m_M m'}{R+h} = \frac{1}{2} m' v_B^2 - G \frac{m_M m'}{R}$$

即有

$$v_A^2 = v_B^2 + 2G \frac{m_M}{R+h} - 2G \frac{m_M}{R}$$

式中引力常数 G 取 $6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, 月球质量 m_M 取 $7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$, 并将已知量值代入上式, 得

$$v_A = 1615 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4)$$

将式(1) v_0 的值和式(4) v_A 的值, 代入式(2)可得

$$\Delta v = (v_A^2 - v_0^2)^{1/2} = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

若在飞船喷气的短暂时间内, 不计月球的引力作用, 则可认为飞船在喷气过程中动量是守恒的, 于是, 由式(3-6)有

$$(\Delta m) u = m \Delta v$$

可得

$$\Delta m = \frac{m \Delta v}{u}$$

代入已知数据, 即得登月飞船从轨道上登上月球所需消耗燃料的质量为

$$\Delta m = \frac{1.20 \times 10^4 \times 100}{1.00 \times 10^4} \text{ kg} = 120 \text{ kg}$$

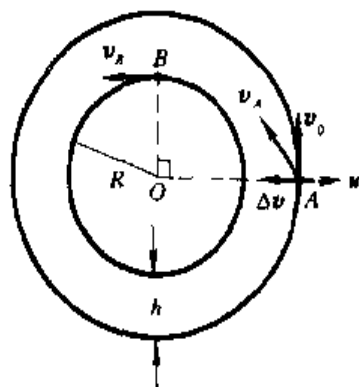


图 4-24

二 刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

1 刚体定轴转动的角动量

如图 4-25 所示,有一刚体以角速度 ω 绕定轴 Oz 转动. 由于刚体绕定轴转动,刚体上每一个质点都以相同的角速度绕轴 Oz 作圆周运动. 其中质点 m_i 对轴 Oz 的角动量为 $m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega$, 于是刚体上所有质点对轴 Oz 的角动量,即刚体对定轴 Oz 的角动量为

$$L = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega$$

式中 $\sum_i m_i r_i^2$ 为刚体绕轴 Oz 的转动惯量 J . 于是刚体对定轴 Oz 的角动量为

$$L = J\omega \quad (4-20)$$

2 刚体定轴转动的角动量定理

从式(4-17)可以知道,作用在质点 m_i 上的合力矩 M_i 应等于质点的角动量随时间的变化率,即

$$M_i = \frac{dL_i}{dt} = \frac{d}{dt}(m_i r_i^2 \omega)$$

而合力矩 M_i 中含有外力作用在质点 m_i 的力矩,即外力矩 M_i^{ex} ,以及刚体内质点间作用力的力矩,即内力矩 M_i^{in} .

对绕定轴 Oz 转动的刚体来说,刚体内各质点的内力矩之和应为零,即 $\sum M_i^{\text{in}} = 0$. 故由上式,可得作用于绕定轴 Oz 转动刚体的合外力矩 M 为

$$M = \sum_i M_i^{\text{ex}} = \frac{d}{dt}(\sum_i L_i) = \frac{d}{dt}(\sum_i m_i r_i^2 \omega)$$

亦可写成

$$M = \frac{d}{dt}(J\omega) = \frac{dL}{dt} \quad (4-21)$$

上式表明,刚体绕某定轴转动时,作用于刚体的合外力矩等于刚体绕此定轴的角动量随时间的变化率. 对照式(4-10)可见,式(4-21)是转动定律的另一表达方式,但其意义更加普遍. 即使在绕定轴转动物体的转动惯量 J 因内力作用而发生变化时,式(4-10)已不适用,但式(4-21)仍然成立. 这与质点动力学中,牛顿第二定律的表达式 $F = dp/dt$ 较之 $F = ma$ 更普遍是一样的.

在日常生活中,经常会遇到有关绕定轴转动的角动量随时间变化的问题,同

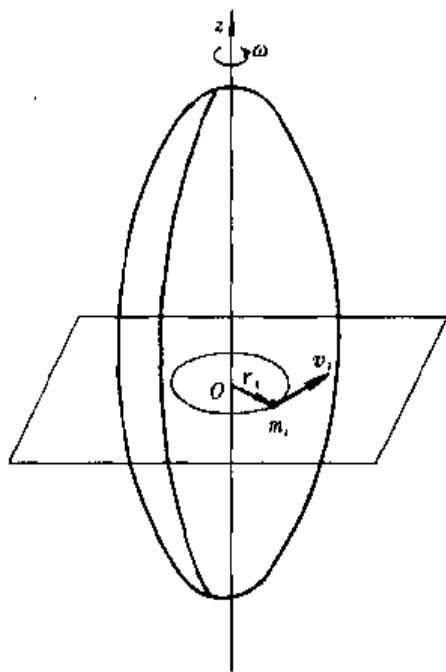


图 4-25 刚体的角动量

学们应学会如何应用绕定轴转动的角动量定理来说明之^①.

设有一转动惯量为 J 的刚体绕定轴转动, 在合外力矩 M 的作用下, 在时间 $\Delta t = t_2 - t_1$ 内, 其角速度由 ω_1 变为 ω_2 . 由式(4-21)积分得

$$\int_{t_1}^{t_2} M dt = \int_{L_1}^{L_2} dL = L_2 - L_1 = J\omega_2 - J\omega_1 \quad (4-22a)$$

式中 $\int_{t_1}^{t_2} M dt$ 是外力矩与作用时间的乘积, 叫做力矩对给定轴的冲量矩, 又叫角冲量.

如果物体在转动过程中, 其内部各质点相对于转轴的位置发生了变化, 那么物体的转动惯量 J 也必然随时间变化. 若在 Δt 时间内, 转动惯量由 J_1 变为 J_2 , 则式(4-22a)中的 $J\omega_1$ 应改为 $J_1\omega_1$, $J\omega_2$ 应改为 $J_2\omega_2$. 于是下面的关系式是成立的, 即

$$\int_{t_1}^{t_2} M dt = J_2\omega_2 - J_1\omega_1 \quad (4-22b)$$

式(4-22)表明, 当转轴给定时, 作用在物体上的冲量矩等于角动量的增量. 这一结论叫做角动量定理. 它与质点的角动量定理在形式上很相似.

顺便注意一下, 在物理学中, 量纲相同的物理量, 多数有物理意义上的内在联系, 但有的则没有. 例如, 冲量矩和角动量的量纲相同, 而且冲量矩是角动量增量的量度. 同理, 功和能的量纲相同, 而且功是能量增量的量度. 上述例子, 它们在物理意义上都有内在联系. 另外, 功和力矩, 量纲虽然相同, 但物理意义不同. 对于量纲虽相同, 而物理意义不同的物理量, 应特别注意它们之间的区别.

3 刚体定轴转动的角动量守恒定律

当作用在质点上的合力矩等于零时, 由质点的角动量定理可以导出质点的角动量守恒定律. 同样, 当作用在绕定轴转动的刚体上的合外力矩等于零时, 由角动量定理也可导出角动量守恒定律.

由式(4-22)可以看出, 当合外力矩为零时, 可得

$$J\omega = \text{恒量} \quad (4-23)$$

这就是说, 如果物体所受的合外力矩等于零, 或者不受外力矩的作用, 物体的角动量保持不变. 这个结论叫做角动量守恒定律.

必须指出, 上面在得出角动量守恒定律的过程中受到刚体、定轴等条件的限制, 但它的适用范围却远远超出这些限制.

^① 可参阅马文蔚等主编《物理学原理在工程技术中的应用》之“门的制动器”(高等教育出版社出版).

有许多现象都可以用角动量守恒来说明. 如在图 4-26 中, 有一人坐在能绕竖直轴转动的凳子上(摩擦忽略不计). 开始时, 人平举两臂, 两手各握一哑铃, 并使人与凳一道以一定的角速度旋转. 由于在水平面内没有外力矩作用, 人与凳的角动量之和应当保持不变, 因此, 当人放下两臂, 使转动惯量变小时, 人与凳的转动角速度就要加快. 又如芭蕾舞演员跳舞时, 先把两臂张开, 并绕通过足尖的垂直转轴以角速度 ω_0 旋转, 然后迅速把两臂和腿朝身边靠拢, 这时由于转动惯量变小, 根据角动量守恒定律, 角速度必增大, 因而旋转更快. 跳水运动员常在空中先把手臂和腿蜷缩起来, 以减小转动惯量而增大转动角速度, 在快到水面时, 则又把手、腿伸直, 以增大转动惯量而减小转动角速度, 并以一定的方向落入水中.

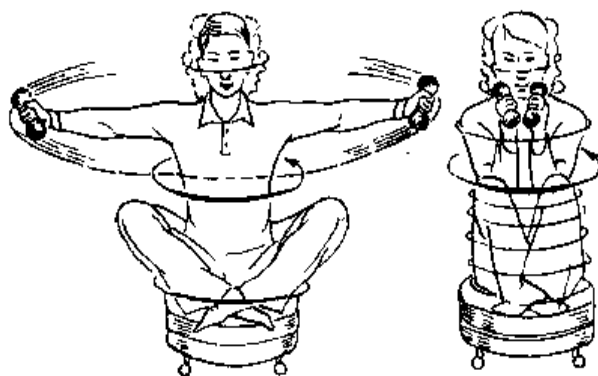


图 4-26 角动量守恒定律的演示

最后还应再次指出, 前面关于角动量守恒定律、动量守恒定律和能量守恒定律, 都是在不同的理想化条件(如质点、刚体……)下, 用经典的牛顿力学原理“推证”出来的. 但它们的使用范围, 却远远超出原有条件的限制. 它们不仅适用于牛顿力学所研究的宏观、低速(远小于光速)领域, 而且通过相应的扩展和修正后也适用于牛顿力学失效的微观、高速(接近光速)的领域, 即量子力学和相对论之中. 这就充分说明, 上述三条守恒定律不但比牛顿力学理论更基本、更普遍, 而且也是近代物理理论的基础, 是更为普适的物理定律.

例 3 如图 4-27 所示, 有一根质量很小的长度为 l 的均匀细杆, 可绕通过其中心点 O 并与纸平面垂直的轴在竖直平面内转动. 当细杆静止于水平位置时, 有一只小虫以速率 v_0 垂直落在距点 O 为 $l/4$ 处, 并背离点 O 向细杆的端点 A 爬行. 设小虫的质量与细杆的质量均为 m . 问: 欲使细杆以恒定的角速度转动, 小虫应以多大速率向细杆端点爬行.

解 小虫落在细杆上, 可视完全非弹性碰撞, 且碰撞时间极短, 重力的冲量矩可略去不计. 于是, 细杆带着小虫一起以角速度 ω 转动. 在碰撞前后, 小虫和细杆系统的角动量守恒, 故有

$$mv_0 \frac{l}{4} = \left[\frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{4} \right)^2 \right] \omega$$

由上式可得细杆的角速度为

$$\omega = \frac{12}{7} \frac{v_0}{l}$$

因细杆对轴 O 的重力矩始终为零, 当小虫爬到距点 O 为 r 的点 P 时, 作用在细杆和小虫系统的外力矩仅为小虫所受的重力矩, 即

$$M = mgr \cos \theta \quad (2)$$

由于要求角速度恒定, 故从角动量定理可得

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(J\omega) = \omega \frac{dJ}{dt} \quad (3)$$

而小虫在点 P 时, 细杆和小虫系统绕轴的转动惯量为

$$J = \frac{1}{12} ml^2 + mr^2$$

即得

$$\frac{dJ}{dt} = 2mr \frac{dr}{dt} \quad (4)$$

将式(2)和式(4)代入式(3), 有

$$mgr \cos \theta = 2mr\omega \frac{dr}{dt}$$

考虑到 $\theta = \omega t$, 上式为

$$\frac{dr}{dt} = \frac{g}{2\omega} \cos \omega t = \frac{7lg}{24v_0} \cos \left(\frac{12v_0}{7l} t \right)$$

式中 dr/dt 即为保持细杆以恒定角速度 ω 转动时, 小虫必须具有的爬行速率。从上式可以看出小虫的爬行速率是时间的周期函数, 小虫必须不断按上式的规律调整其速率才能既到达端点 A , 又能保持细杆以恒定角速度转动。当然, 对小虫来说这是难以做到的, 但对用现代微电子技术制造的微型机器人来说却是不难实现的。

例 4 一杂技演员 M 由距水平跷板高为 h 处自由下落到跷板的一端 A , 并把跷板另一端的演员 N 弹了起来。设跷板是匀质的, 长度为 l , 质量为 m' , 支撑点在板的中部点 C , 跷板可绕点 C 在竖直平面内转动, 演员 M 、 N 的质量都是 m 。假定演员 M 落在跷板上, 与跷板的碰撞是完全非弹性碰撞。问演员 N 可弹起多高。

解 为使讨论简化, 把演员视为质点。演员 M 落在板 A 处的速率为 $v_M = (2gh)^{1/2}$, 这个速率也就是演员 M 与板 A 处刚碰撞时的速率, 此时演员 N 的速率 $v_N = 0$ 。在碰撞后的瞬时, 演员 M 、 N 具有相同的线速率 u , 其值为 $u = \frac{l}{2} \omega$, ω 为演员和板绕点 C 的角速率。现把演员 M 、 N 和跷板作为一个系统, 并以通过点 C 垂直纸平面的轴为转轴。由于 M 、 N 两演员的质量相等, 所以当演员 M 碰撞板 A 处时, 作用在系统上的合外力矩为零, 故系统的角动量守恒, 有

$$mv_M \frac{l}{2} = J\omega + 2mu \frac{l}{2} = J\omega + \frac{1}{2} ml^2 \omega$$

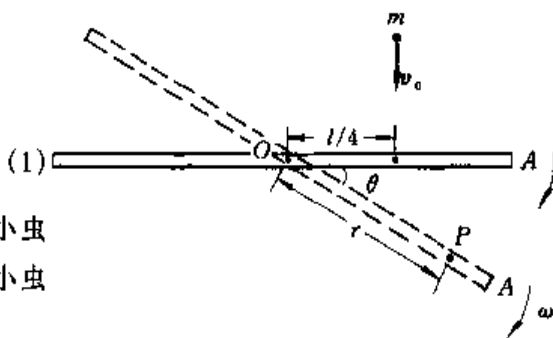


图 4-27

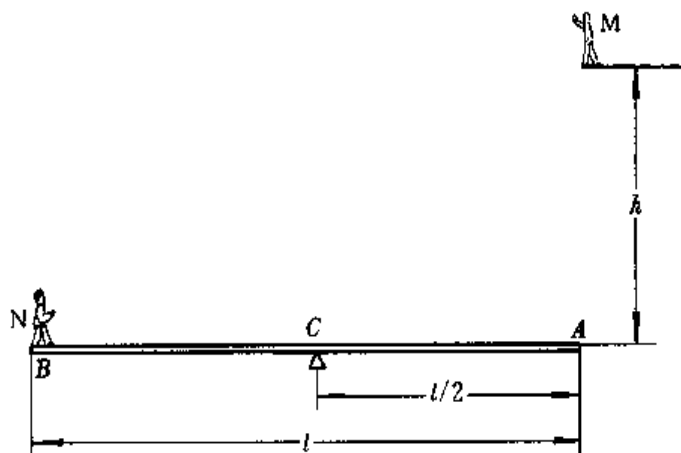


图 4-28

其中 J 为跳板的转动惯量,若把板看成是窄长条形状的,则 $J = \frac{1}{12} m' l^2$. 于是由上式可得

$$\omega = \frac{mv_M \frac{l}{2}}{\frac{1}{12} m' l^2 + \frac{1}{2} m l^2} = \frac{6m(2gh)^{1/2}}{(m' + 6m)l}$$

这样演员 N 将以速率 $u = \frac{1}{2} \omega$ 跳起,达到的高度 h' 为

$$h' = \frac{u^2}{2g} = \frac{l^2 \omega^2}{8g} = \left(\frac{3m}{m' + 6m} \right)^2 h$$

4-4 力矩做功 刚体绕定轴转动的动能定理

一 力矩做功

质点在外力作用下发生位移时,我们说力对质点作了功. 当刚体在外力矩的作用下绕定轴转动而发生角位移时,我们就说力矩对刚体作了功. 这就是力矩的空间累积作用.

如图 4-29 所示,设刚体在切向力 F_t 的作用下,绕转轴 OO' 转过的角位移为 $d\theta$. 这时力 F_t 的作用点位移的值为 $ds = r d\theta$. 根据功的定义,力 F_t 在这段位移内所作的功为

$$dW = F_t ds = F_t r d\theta$$

由于力 F_t 对转轴的力矩为 $M = F_t r$, 所以

$$dW = M d\theta$$

上式表明,力矩所作的元功 dW 等于力矩 M 与角位移 $d\theta$ 的乘积.

如果力矩的大小和方向都不变,则当刚体在此力矩作用下转过角 θ 时,力

矩所作功为

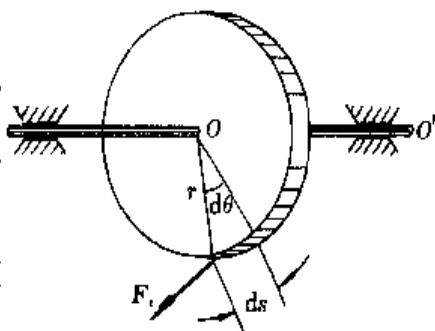
$$W = \int_0^\theta dW = M \int_0^\theta d\theta = M\theta \quad (4-24)$$

即恒力矩对绕定轴转动的刚体所作的功, 等于力矩的大小与转过的角度 θ 的乘积.

如果作用在绕定轴转动的刚体上的力矩是变化的, 那么, 变力矩所作的功则为

$$W = \int M d\theta \quad (4-25)$$

图 4-29 力矩做功



应当指出, 式(4-24)和式(4-25)中的 M 是作用在绕定轴转动刚体上诸外力的合力矩. 故上述两式应理解为合外力矩对刚体所作的功.

二 力矩的功率

我们知道, 力对质点做功的快慢是用单位时间力对质点做功的多少来表示的. 同样, 我们用单位时间内力矩对刚体所作的功来表示力矩做功的快慢, 并把它叫做力矩的功率, 用 P 表示.

设刚体在恒力矩作用下绕定轴转动时, 在时间 dt 内转过 $d\theta$ 角, 则力矩的功率为

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega \quad (4-26)$$

即力矩的功率等于力矩与角速度的乘积. 当功率一定时, 转速越低, 力矩越大; 反之, 转速越高, 力矩越小.

三 转动动能

刚体可看成是由许许多多的质点所组成. 刚体的转动动能等于各质点动能的总和. 设刚体上各质元的质量与线速率分别为 $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_i$ 与 v_1, v_2, \dots, v_i , 各质量元到转轴的垂直距离为 r_1, r_2, \dots, r_i . 当刚体以角速率 ω 绕定轴转动时, 第 i 个质量元的动能为

$$\frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2$$

整个刚体的动能为

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

式中 $\sum_i \Delta m_i r_i^2$ 为刚体的转动惯量, 故

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (4-27)$$

即刚体绕定轴转动的转动动能等于刚体的转动惯量与角速度二次方的乘积的一半。这与质点的动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, 在形式上是完全相似的。

四 刚体绕定轴转动的动能定理

设在合外力矩 M 的作用下, 刚体绕定轴转过角位移为 $d\theta$, 合外力矩对刚体所作的元功为

$$dW = M d\theta$$

由转动定律 $M = J\alpha = J \frac{d\omega}{dt}$, 上式亦可写成

$$dW = J \frac{d\omega}{dt} d\theta = J \frac{d\theta}{dt} d\omega = J\omega d\omega$$

若设上式中的 J 为常量, 那么在 Δt 时间内, 由合外力矩对刚体做功, 使得刚体的角速率从 ω_1 变到 ω_2 , 合外力矩对刚体所作的功为

$$W = \int dW = J \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega d\omega$$

$$\text{即} \quad W = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2 \quad (4-28)$$

上式表明, 合外力矩对绕定轴转动的刚体所作的功等于刚体转动动能的增量。这就是刚体绕定轴转动的动能定理。^①

例 1 如图 4-30 所示, 一质量为 m' 、半径为 R 的圆盘, 可绕一垂直通过盘心的无摩擦的水平轴转动。圆盘上绕有轻绳, 一端悬挂质量为 m 的物体。问物体由静止下落高度 h 时, 其速度的大小为多少? 设绳的质量略去不计。

解 按图 4-30 所示的示力图, 对圆盘来说, 它受到重力 P' 、支持力 F_N 和拉力 F_T 的作用。由于 P' 和 F_N 均通过转轴 O , 故作用于圆盘的外力矩仅是拉力 F_T 的力矩。当物体下落高度 h 时, 圆盘的转角由 θ_0 改变为 θ , 且 $h = \int_{\theta_0}^{\theta} R d\theta$ 。由刚体绕定轴转动的动能定理式 (4-28) 可得, 拉力 F_T 的力矩所作的功为

$$\int_{\theta_0}^{\theta} F_T R d\theta = R \int_{\theta_0}^{\theta} F_T d\theta = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 \quad (1)$$

式中 $\Delta\theta$ 为在力矩作用下圆盘转过的角度, ω_0 和 ω 为圆盘在起始和终止时的角速度。

对物体来说, 它受到拉力 F'_T 和重力 P 的作用, 且 $F'_T = F_T$ 。考虑到绳与圆盘间无相对

^① 在研究车辆的运动时, 不是都能把车辆当作质点看待的。在许多情形下, 必须考虑车轮的转动动能和车辆的载重。同学们如有兴趣可参阅马文蔚等主编《物理学在工程技术中的应用》之“重车与空车同时到吗?”(高等教育出版社出版)。

滑动时,重物下落的距离等于圆盘边缘上任意点所经过的弧长.故由质点的动能定理式(3-12)可得,这两个力所作的功为

$$mgh - R \int_{\theta_0}^{\theta} F_1 d\theta = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 \quad (2)$$

式中 v_0 和 v 是物体在起始和终了时的速度.

此外,物体是由静止开始下落,有 $v_0 = 0$, $\omega_0 = 0$, 且 $v = R\omega$. 于是由式(1)和式(2)可得

$$v = \sqrt{\frac{m}{m + \frac{J}{R^2}} 2gh}$$

已知圆盘的转动惯量 $J = \frac{1}{2} m' R^2$, 故上式为

$$v = 2\sqrt{\frac{mgh}{\frac{m'}{2} + 2m}} = \sqrt{\frac{m}{\frac{m'}{2} + m} 2gh}$$

我们知道,物体由高 h 处自由下落的末速为 $v' = \sqrt{2gh}$, 由于 $\frac{1}{2} m' + m > m$, 故 $v' > v$. 这个道理可从机械能守恒定律来理解, 因为物体在下落的过程中, 圆盘也随之转动, 物体重力势能有一部分转换为圆盘的转动动能了, 所以 $v' > v$.

例 2 如图 4-31 所示, 一长为 l 、质量为 m' 的杆可绕支点 O 自由转动. 一质量为 m 、速率为 v 的子弹射入杆内距支点为 a 处, 使杆的偏转角为 30° . 问子弹的初速率为多少?

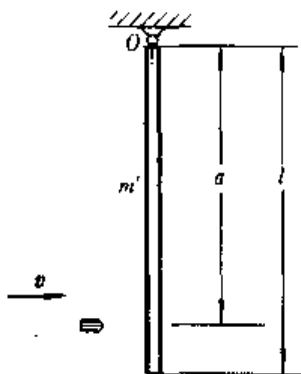


图 4-31

解 把子弹和杆看作一个系统. 系统所受的外力有重力和轴对细杆的约束力. 在子弹射入杆的极短时间里, 重力和约束力均通过轴 O , 因此它们对轴 O 的力矩均为零, 系统的角动量应当守恒. 于是有

$$mva = \left(\frac{1}{3} m' l^2 + ma^2 \right) \omega \quad (1)$$

子弹射入杆后, 细杆在摆动过程中只有重力做功, 故如以子弹、细杆和地球为一系统, 则此系统机械能守恒. 于是有

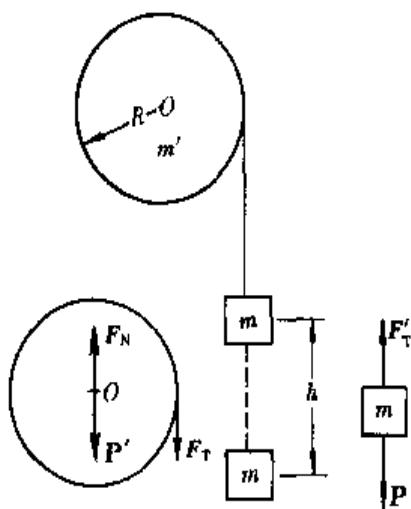


图 4-30

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m' l^2 + m a^2 \right) \omega^2 = m g a (1 - \cos 30^\circ) + m' g \frac{l}{2} (1 - \cos 30^\circ) \quad (2)$$

解式(1)和式(2),得

$$v = \frac{1}{m a} \sqrt{\frac{R}{6} (2 - \sqrt{3}) (m' l + 2 m a) (m' l^2 + 3 m a^2)}$$

为了便于理解刚体绕定轴转动的规律性,必须注意规律形式和研究思路的类比方法,下面我们把质点运动与刚体定轴转动的一些重要物理量和重要公式、类比列成表4-3,供大家采用。

表4-3 质点运动与刚体定轴转动对照表

质 点 运 动	刚体定轴转动
速度 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$	角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
加速度 $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$	角加速度 $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
力 \mathbf{F}	力矩 M
质量 m	转动惯量 $J = \int r^2 dm$
动量 $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$	角动量 $L = J\omega$
牛顿第二定律 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$	转动定律 $M = J\alpha$ $M = \frac{dL}{dt}$
动量定理 $\int \mathbf{F} dt = m \mathbf{v}_2 - m \mathbf{v}_1$	角动量定理 $\int M dt = J\omega_2 - J\omega_1$
动量守恒定律 $\mathbf{F} = 0, m \mathbf{v} = \text{恒矢量}$	角动量守恒定律 $M = 0, J\omega = \text{恒量}$
动能 $\frac{1}{2} m v^2$	转动动能 $\frac{1}{2} J \omega^2$
功 $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$	力矩的功 $W = \int M d\theta$
动能定理 $W = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$	转动动能定理 $W = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2$

* 4-5 刚体的平面平行运动

在本章一开始我们曾指出,刚体的运动可看作是质心的平动,再加上刚体绕质心的转动,如果质心被限制在一平面上运动,则这种刚体的运动就称为刚体的平面平行运动。如火车车轮在直线轨道上的滚动,就属刚体的平面平行运动。

由第3-9节的质心运动定律已知,质心的运动方程为

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}_C = m \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} \quad (4-29)$$

式中 F 为作用在刚体上的合外力, v_c 和 a_c 为质心的速度和加速度, m 为刚体的质量.

另外, 可以证明, 刚体绕通过质心的轴的转动, 也遵守式(4-10)表述的转动定律, 即

$$M_{Cz} = J_C \alpha = J_C \frac{d\omega}{dt} \quad (4-30)$$

式中 M_{Cz} 为对通过质心而垂直于运动平面的轴 z 的合外力矩, J_C 和 α 为对通过质心而垂直运动平面的轴 z 的转动惯量和角加速度.

除上面两式外, 对于刚体的动能亦可写成

$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2 \quad (4-31)$$

式中 $\frac{1}{2} m v_c^2$ 为质心的平动动能, $\frac{1}{2} J_C \omega^2$ 为刚体绕质心的转动动能. 对于刚体的势能则可视作是质心的势能, 即

$$E_p = mgh_c$$

利用上面四个式子, 可以求解刚体的平面平行运动问题.

例 1 一绳索缠绕在半径为 R 、质量为 m 的均匀圆盘的圆周上, 绳的另一端悬挂在天花板上(图 4-32). 设绳的质量忽略不计, 求: (1) 圆盘质心的加速度; (2) 绳的张力.

解 作用在圆盘上的力有重力 P 和绳索的张力 F_T . 选竖直向下的方向为 y 轴的正向. 对于质心的平动, 由式(4-29)有

$$P - F_T = ma_c \quad (1)$$

其中 a_c 是圆盘质心相对天花板的加速度.

如果以通过垂直圆盘质心的轴为转轴, 由式(4-30)有

$$F_T R = \frac{1}{2} m R^2 \alpha \quad (2)$$

其中 α 为通过圆盘质心的转轴的角加速度. 当圆盘滚动时, 绳索相对于圆盘质心的加速度为 $a = R\alpha$, 这个加速度与圆盘的质心相对天花板的加速度 a_c 相同, 即 $a = a_c$. 把以上各量代入式(2), 有

$$F_T R = \frac{1}{2} m R^2 \frac{a_c}{R}$$

即

$$F_T = \frac{1}{2} m a_c$$

代入式(1)可得

$$a_c = \frac{2}{3} g, \quad F_T = \frac{1}{3} mg$$

例 2 有一半径为 r 的匀质圆柱体, 从其质心距地面高为 h 的滑道上由静止滚动而下, 进入半径为 R 的圆环行滑道, 如图 4-33 所示. 设圆柱体在两段滑道上均作纯滚动. 试问此圆柱体能在圆环形滑道内完成圆周运动, h 至少需有多大的值?

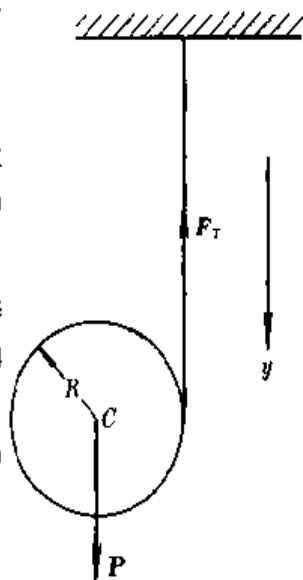


图 4-32

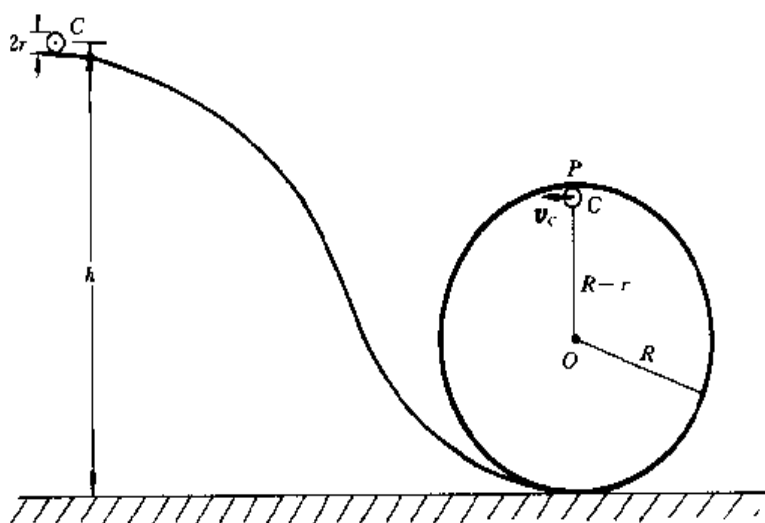


图 4-33

解 设圆柱体滚到圆环形滑道的顶点 P 处时, 圆柱体质心的速率为 v_c , 它绕圆柱体质心的角速度为 ω , 并设圆柱体质量为 m . 由于圆柱体在下滚过程中, 只作滚动没有滑动, 故摩擦力不作功. 如取圆柱体、弯形和圆形滑道以及地球为一个系统, 在圆柱体下滑过程中机械能应守恒, 有

$$mgh = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + mg(2R-r)$$

式中 $\frac{1}{2}mv_c^2$ 是圆柱体的动能, $\frac{1}{2}J\omega^2$ 是圆柱体绕过质心轴的转动惯量, 且 $J = \frac{1}{2}mr^2$, $mg(2R-r)$ 是圆柱体在圆环形轨道顶点的势能. 由于是纯滚动, 有 $v_c = r\omega$. 由上式可得

$$v_c^2 = \frac{4}{3}g(h - 2R + r) \quad (1)$$

另外, 圆柱体在圆形滑道顶点时的质心运动方程为

$$F_N + mg = m \frac{v_c^2}{R-r}$$

式中 F_N 为圆环形滑道作用于圆柱体的压力, 由上式有

$$F_N = -mg + m \frac{v_c^2}{R-r} = m \left(\frac{v_c^2}{R-r} - g \right)$$

而圆柱体能完成圆周运动的条件应当是

$$F_N \geq 0, \quad \text{即} \quad \frac{v_c^2}{R-r} - g \geq 0$$

或

$$v_c^2 \geq g(R-r) \quad (2)$$

由式(2)和式(1), 可得圆柱体在圆环形滑道上完成圆周运动的条件为

$$\frac{4}{3}(h - 2R + r) \geq R - r$$

故得

$$h \geq \frac{11}{4}R - \frac{7}{4}r$$

4-6 经典力学的成就和局限性

前述的质点力学和刚体力学都是在牛顿定律的基础上建立起来的。此外,在牛顿定律基础上还建立了诸如流体力学、弹性力学、结构力学等多门工程力学学科,所有这些在理论体系上都属于牛顿力学或经典力学的范畴。经典力学是物理学中较早地发展成为理论严密、体系完整、应用广泛的一门学科,并且还是经典电磁学和经典统计力学的基础。因此,经典力学的应用极为广泛,取得的成就也非常巨大。它曾促进了蒸汽机和电机的发明,为产业革命和电力技术革命奠定了基础。当今科学技术发展很快,尤其是智能技术和信息技术正飞速发展,而材料科学已深入到分子和原子层次,形成了所谓纳米材料技术。然而时至今日,小到微型机器人,大到宇宙飞船,经典力学还是极为重要的基础之一;而且可以肯定,在科学技术今后的发展中,它仍将发挥其不可替代的作用。

但是,在经典力学不断取得辉煌成就的同时,在物理学的发展中,特别是从20世纪初叶以来,就已发现一些现象是与经典力学的一些概念和定律相抵触的。这说明经典力学只具有相对的真理性,或者说经典力学是有局限性的。

概括地讲,牛顿力学在20世纪中受到了三次具有革命性的严重挑战,这就是1905年爱因斯坦建立的狭义相对论、1925年前后建立起来的量子力学和20世纪60年代发现的混沌现象。这就向人们明确地揭示了牛顿力学局限性之所在。本节对此仅作简略的介绍,即关于物体作高速运动时的力学行为,运动规律的确定性和随机性——混沌现象,以及能量量子化的概念。至于对狭义相对论和量子力学的较详细的介绍,将在本书第十八、十九两章进行。

一 经典力学只适用于处理物体的低速运动问题,而不能用于处理高速运动问题

经典力学把时间和空间看作是彼此无关的;把时间和空间的基本属性也看作与物质的运动没有任何关系而是绝对的、永远不变的。这就是所谓经典力学中的“绝对时间”和“绝对空间”的观点,也称作牛顿绝对时空观。

但是,随着物理学的发展,特别是19世纪末叶有了新的实验发现,结果使经典力学和经典电磁理论遇到了很大的困难,牛顿的绝对时空观和建立在这一基础上的经典力学开始陷入了无法解决的困境。

在这种情况下,20世纪初的1905年,爱因斯坦提出了狭义相对论。这一理论描述了一种新的时空观,认为时间和空间是相互联系的,而且时间的流逝和空间的延拓也与物质和运动有不可分割的联系。例如运动物体的长度和所经历的时间,就与它相对于惯性系的运动速度有密切的关联,这种关联在物体的速度 v

接近光速 c 时尤为显著^①。下面我们仅概略地介绍几个力学中的物理量,在高速运动与低速运动时的差异。

1 高速运动时速度的相对性

如图 4-34 所示,有两个惯性参考系 S 和 S' ,它们的 Ox 轴和 Ox' 轴相重合, Oy 轴与 Oy' 轴相平行, Oz 轴与 Oz' 轴亦平行。其中 S' 系沿 Ox 轴以速度 v_x 相对 S 系运动。若在 S' 系中有一质点 P ,以速度 u'_x 沿 Ox' 轴运动。这个质点在 S 系中沿 Ox 轴的速度 u_x 是多少呢?按照爱因斯坦的狭义相对论可知^②

$$u_x = \frac{u'_x + v_x}{1 + \frac{u'_x v_x}{c^2}} \quad (4-32)$$

式中 c 为光速。上式为狭义相对论的速度变换式也称洛伦兹速度变换式。

如果质点 P 在 S' 系中的速度远小于光速,即 $u'_x \ll c$,那么式(4-32)中, $1 + (u'_x v_x)/c^2 \approx 1$ 。于是,由式(4-32)有

$$u_x = u'_x + v_x \quad (4-33)$$

此式即是第一章第 1-4 节所提到的伽利

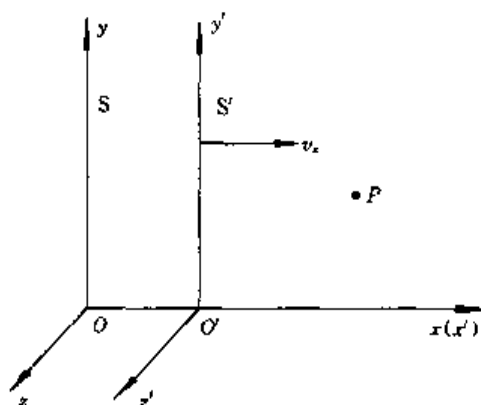


图 4-34 速度的相对性

略速度变换式。显然式(4-33)所表达的经典力学的伽利略速度变换式,是洛伦兹速度变换式在 $u'_x \ll c$ 下的近似情形。这也表明,经典力学关于不同惯性参考系间的速度变换式,并没有正确地表达出物体运动间的时空关系;它只能近似的(尽管是相当令人满意的近似)适用于质点的速度远小于光速时的低速运动情况。若质点的运动速度可与光速相比较时,式(4-33)就根本不能适用了,必须用式(4-32)来进行惯性参考系间的速度变换。

2 高速运动时的动量和质量

在经典力学中,质量为 m_0 、速度为 v 的质点,其动量为 $p = m_0 v$ 。但是,当质点的速度 v 接近于光速 c 时,爱因斯坦的狭义相对论则指出,质点的动量应为

$$p = \frac{m_0 v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \quad (4-34)$$

① 可参阅本书第 18-3 节狭义相对论的基本原理和洛伦兹变换式。

② 可参阅第 18-3 节中洛伦兹速度变换式。

若质点的速度 v 远小于光速 c , 即 $v \ll c$, 上式中的二项式 $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1$ 。于是, 由式(4-34)可得, 质点在远小于光速的低速运动情况下, 质点的动量为

$$p = m_0 v \quad (4-35)$$

这就是经典力学中动量表达式。它是在 $v \ll c$ 时, 狭义相对论性动量式(4-34)的近似值。

由式(4-34)可知, 质点在高速运动时的质量为

$$m = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \quad (4-36)$$

式中 m_0 称为静质量, m 可称为动质量或相对论性质量。从式(4-36)可以看出, 质点的质量是依赖于其运动速度的, 也就是说, 物质的基本属性是与运动紧密相联的。只有在 $v \ll c$ 时, $m \approx m_0$, 质点的质量才可近似视为常量, 这就是经典力学中将物体的质量视为常量, 而与实际情况没有可察觉差异的缘故。然而, 现代已有许多粒子加速器可使电子、质子等微观粒子的速度达到 $0.8c$ 以上, 这时粒子的质量就必须用式(4-36)来表述了。

3 高速运动时的动能

在经典力学中, 质量为 m_0 、速度为 v 的质点, 其动能为 $\frac{1}{2} m_0 v^2$ 。但是, 当质点的速度 v 接近于光速 c 时, 狭义相对论指出质点的动能应为

$$E_k = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} - 1 \right] \quad (4-37)$$

由前面的脚注①可得 $(1 - v^2/c^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots$, 将它代入式(4-37), 可得

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (4-38)$$

若质点的速度 v 远小于光速 c , 即 $v \ll c$, 那么式(4-38)中的 $(1 + 3v^2/4c^2) \approx 1$ 。于是, 由式(4-38)可得

$$E_k \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (4-39)$$

这就是经典力学的动能表达式。它是在 $v \ll c$ 时, 狭义相对论性动能式(4-37)

① 二项式 $(1 - x^2)^{-1/2}$ 在 $x^2 \ll 1$ 的情形下, 可展开为 $\left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} x^4 + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} x^6 + \dots\right)$ 。现 $x = v/c$, 且 $v \ll c$, 所以可有 $(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \approx 1$ 。

的近似值。

现在我们来考虑这样一个问题:如果一个物体以声速运动,即 $v = 300 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$,这时物体的动能是必须用狭义相对论的动能式(4-38)来计算呢,还是可以用经典力学的动能式(4-39)来计算?在我们日常生活中, $300 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 这个速度是不算小的了,如火车以这个速度运行,1小时多一些就可从南京到达北京了。但这个速度与光速($3 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$)相比那就小得多了,有 $v^2/c^2 \approx 10^{-12}$ 。将它代入式(4-38),得

$$E_k \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{3 \times 10^2}{3 \times 10^8} \right)^2 \right] \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 (1 + 10^{-12})$$

显然 10^{-12} 与 1 相比较,完全可以略去不计。顺便指出,甚至某些电子速度达到 $10^6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$,其动能也完全可以用经典力学动能表达式来计算,而不会发生不能允许的误差。读者可以试算一下。

4 质量与能量之间的关系

从狭义相对论还可以得出另一重要结果,即质量与能量的关系为

$$E = mc^2 \quad (4-40)$$

式中 E 是物体的能量, m 是物体的质量, c 是光速,上式又可写成

$$m = \frac{E}{c^2}$$

这个关系式深刻地反映了物质与其运动的不可分割性;有质量必有能量,有能量必有质量,任何物体都具有质量和与之相对应的能量。

应当指出,质量和能量是表示物质不同属性的物理量,质能关系式给出的是它们之间的联系。它说明,质量和能量并不是相互独立的量,物质有什么样的运动状态,它就必然具有与之相应的质量和能量。因此,任何能量的改变同时有对应的质量的改变,或任何质量的改变同时必有相应的能量的改变。也就是说,这两种改变永远是同时发生的。因而我们不能把质量与能量的这种联系误解为质量与能量间的相互转变。

由式(4-40)可得物体的质量有 Δm 的变化时,其能量的相应变化为

$$\Delta E = c^2 \Delta m \quad (4-41)$$

下面我们举一个例子,以说明上式的应用。设太阳向外辐射的能量为 $4 \times 10^{26} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$,那么太阳因对外辐射而每秒减少的质量为

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{4 \times 10^{26}}{(3 \times 10^8)^2} \text{ kg} \approx 4 \times 10^9 \text{ kg}$$

这样,每年太阳因辐射而减少的质量约为 $1.3 \times 10^{17} \text{ kg}$ 。据估计太阳的质量约为 $2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$,那么,因对外辐射能量,太阳在 1 a 内减少的质量与原有质量的比率约为 6.5×10^{-14} 。可见,太阳因辐射而每年减少的质量是很少很少的,或者说

若太阳一直按此规模向外辐射,它将能持续 10^{13} a 以上.

二 确定性与随机性

经典力学的研究对象是宏观低速运动的物体,遵循的研究思想是确定论.所谓确定论是指:如果我们知道物体初始的运动状态(即 r_0 和 v_0),又知道物体在运动过程中的受力情况,那么,就可以根据牛顿运动定律列出物体的运动方程,从而可以确知物体在任意时刻的运动状态(即 r 和 v).换句话说,经典力学认为,运动物体今后的行为,是由过去(或现在)的运动状态以及物体所受的作用力决定的,这就是牛顿力学(或经典力学)的确定性.事实上,确定性是取得了大量令人感动的成就的,特别是对哈雷彗星回归时间的预测、海王星的发现、宇宙飞船与空间站的对接和返回地球等等这样一系列的大课题,都得到完美的解决.正因为经典力学的确定性取得了如此辉煌的成就,于是有人就认为,如果得知所有作用于物体系统的力,而且知道组成这个系统所有物体的初始状态,那么,大到宇宙,小到分子、原子的运动都可以凝聚到经典力学之中,也就是说,不仅机械运动,而且分子热运动、原子运动等等都可以涵盖在牛顿力学的确定性之中,而没有什么事是不能被确知的.在相当一段时期里,特别是 19 世纪中叶以前,许多人认为牛顿力学确定性的观点是绝无疑义的.

然而事实上,物体的运动并非都是只按照确定性进行的,在许多情况下,物体的运动还表现出相当明显的偶然性、随机性.也就是说,像经典力学那样仅仅承认运动规律的必然性是不够的;绝对的确定性并不足以囊括运动规律的全部内容.例如,即使初始条件给定的抛体,它的运动轨迹仍然是多变的,究其原因,乃是由于诸如空气的阻力、温度和湿度、风速等等一些因素在抛体运动过程中的偶然变化引起的.表现物体运动随机性的最典型的例子是布朗运动.图 4-35 是藤黄粒子在水中运动的轨迹图线.从图中可看到藤黄粒子的轨迹是一些无规则的折线.

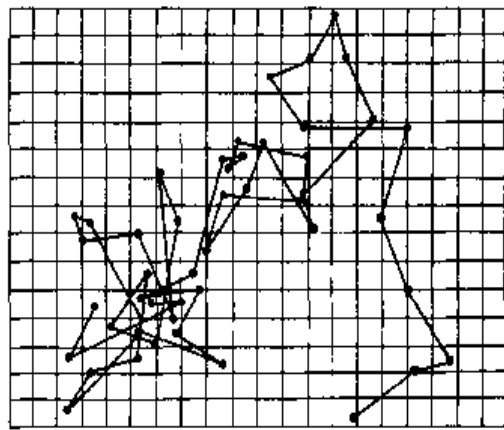


图 4-35 藤黄粒子在水中运动的随机性

这表明,藤黄粒子的运动除了与其起始运动状态,以及所受的浮力、粘滞力有关外,更重要的是与水分子对其碰撞有关.由于水分子对藤黄粒子碰撞的偶然性,致使其因碰撞而受到冲力的大小和方向也都具有偶然性.这就告诉我们,藤黄粒子在水中运动轨迹的无规性,既反映了确定性,又反映了随机性.或者说藤黄粒子的运动既不是完全确定性的,也不是完全随机性的.由此可见,自然界存在

的运动应是确定性和随机性兼而有之的.人们把确定性运动具有的这种不确定性的现象称之为混沌^①.

在自然界中混沌现象是很普遍的,除了上面所述的以外,还可以举出许多.例如,给定摆长的单摆的运动是遵守牛顿力学方程的,但其周期常因偶然的因素影响而在一定范围内振荡^②;甚至有人说墨西哥的飓风,也许只是由于一只蝴蝶拍一下翅膀而发生的.混沌虽是20世纪60年代才提出的,然而关于混沌的研究对象,却已远远超出物理学的范围,在生物学、天文学、社会学等领域内一些现象都显示出混沌的存在.

三 能量的连续性与能量量子化

经典力学是在研究宏观物体(在 $v \ll c$ 下)的机械运动时总结出来的.在经典力学中,物体的运动状态是用它的位置和速度(或动量)来描述的,而且物体的位置和动量在任何时刻都可具有各种可能的数值,即它们的变化是连续的.由此可知,在经典力学中,物体的能量变化亦是连续的.这就是经典力学的能量连续性.在生活中,这方面的例子很多.如图4-36所示,有一单摆,开始时其摆角为 θ_0 ,然后任其自由摆动.由于单摆在运动过程中受到空气阻力等耗散力作功,使单摆的能量连续不断地减少,从而使其摆角也连续不断地减小,直至能量全部耗散掉,摆角为零.

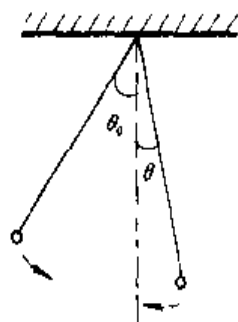


图4-36 经典力学的单摆能量连续性

1900年以前,能量连续性一直没有遇到有力的挑战.可是刚进入20世纪,普朗克在说明黑体辐射的规律时,就首先冲破了能量连续性这一传统观念的束缚,提出了能量量子化的设想^③,并因而获得诺贝尔物理学奖金.他认为频率为 ν 的一维振子的能量,只能是其基元能量 $h\nu$ 的整数倍,即

$$E = nh\nu \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4-42)$$

式中 h 称为普朗克常量.按照普朗克的说法,频率为 ν 的一维振子,其能量只能具有 $h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots$ 中的任意一值,也就是说一维振子的能量是不连续的,一份一份的,即量子化的.普朗克运用上述设想解决了当时经典物理学遇到的一个重大难题——“紫外光灾难”.在一般计算时,取 $h = 6.33 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$.这个值是非常之小的.对宏观领域的谐振子来说,如能引起人们听觉的最高频率约

① 有关这方面的知识,可参阅蔡枢等编《大学物理(当代物理前沿专题部分)》中“混沌现象”(高等教育出版社出版).

② 有关大角度单摆所引起的混沌现象,可参阅本书第十四章第14-4节.

③ 可参阅第十九章第19-1节.

为 $\nu = 20\,000\text{ s}^{-1}$. 那么, 具有 $\nu = 20\,000\text{ s}^{-1}$ 的一维谐振子的基元能量为 $h\nu = 6.33 \times 10^{-34} \times 20\,000 = 1.27 \times 10^{-29}\text{ J}$. 这个能量值确实是太小了. 因此, 声波的能量变化就可视为连续变化的. 然而, 当我们深入到微观领域中去时, 能量量子化却是不能不考虑的了. 在普朗克提出能量量子化之后不久, 1905 年, 爱因斯坦在研究光与物质相互作用时, 他更前进了一步, 提出光是由光子组成的学说, 并指出光子的能量为 $\epsilon = h\nu$. 爱因斯坦据此完满地解释了光电效应现象, 并为此而获得诺贝尔物理学奖. 不久, 1913 年, 玻尔提出了原子的能级概念, 即原子能量的高低犹如阶梯那样是不连续的, 是量子化的. 他还提出当原子从高能级 E_i 向低能级 E_j 跃迁时, 发射出光子的能量为

$$h\nu = E_i - E_j \quad (4-43)$$

据此玻尔解释了氢原子光谱的规律性. 这是运用能量量子化思想的又一重大成果.

能量量子化是微观粒子的重要性质之一. 它指出经典物理不能用来描述像电子、光子、质子等微观粒子的运动. 这样, 继狭义相对论之后, 经德布罗意、薛定谔等人的工作逐步建立了符合微观粒子特点的新的力学——量子力学^①.

量子力学还指出, 描述物体(微观粒子)运动状态的位置和动量有相互联系, 但不能同时精确确定, 而且一般作不连续的变化. 对于诸如电子、光子等微观粒子, 一般要用量子力学来描述它们的运动规律. 但是, 对于宏观物体, 用量子力学和用经典力学所得的结果则相差极微. 所以说, 经典力学一般不适用于微观粒子, 而只适用于宏观物体.

由上可知, 以牛顿定律为基础建立起来的经典力学, 只对宏观物体, 且其运动速度比较小时才适用. 幸而, 在一般工程技术问题中, 物体的运动速度与光速相比都很小, 而且如果采取适当修正, 以尽可能减小由随机性带来的不确定度, 那么经典力学是可以适用的. 不仅如此, 人们完全有理由相信, 经典力学还会在科学技术的新进展中继续发挥其简捷处理问题的特长, 取得更大的成就和发展.

问 题

4-1 以恒定角速度转动的飞轮上有两个点, 一个点在飞轮的边缘, 另一个点在转轴与边缘之间的一半处. 试问: 在 Δt 时间内, 哪一个点运动的路程较长? 哪一个点转过的角度较大? 哪一个点具有较大的线速度、角速度、线加速度和角加速度?

4-2 如果一个刚体所受合外力为零, 其合力矩是否也一定为零? 如果刚体所受合外力矩为零, 其合外力是否也一定为零?

^① 有关量子力学简介的内容, 请参阅第十九章第 19-8 节.

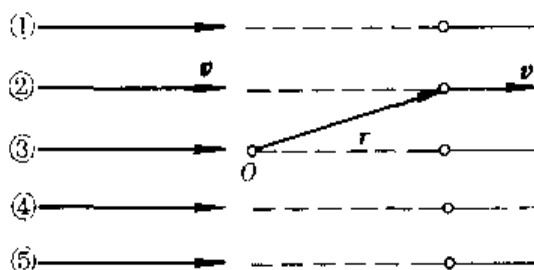
4-3 在某一瞬时,物体在力矩作用下,其角速度可以为零吗?其角加速度可以为零吗?

4-4 有两个飞轮,一个是木制的,周围镶上铁制的轮缘,另一个是铁制的,周围镶上木制的轮缘.若这两个飞轮的半径相同,总质量相等,以相同的角速度绕通过飞轮中心的轴转动,哪一个飞轮的动能较大?

4-5 为什么质点系动能的改变不仅与外力有关,而且也与内力有关,而刚体绕定轴转动动能的改变只与外力矩有关,而与内力矩无关呢?

4-6 一人手持长为 l 的棒的一端打击岩石,但又要避免手受到剧烈的冲击.请问:此人应当用棒的哪一点去打击岩石?

4-7 如本题图所示,有 5 个质点,它们具有相同的质量 m 和速度 v .对参考点 O ,它们的角动量的大小和方向是否相同?



问题 4-7 图

4-8 如果一个质点系的总角动量等于零,能否说此质点系中每一个质点都是静止的?如果一质点系的总角动量为一常量,能否说作用在质点系上的合外力为零?

4-9 一人坐在角速度为 ω_0 的转台上,手持一个旋转着的飞轮,其转轴垂直地面,角速度为 ω' .如果突然使飞轮的转轴倒转,将会发生什么情况?设转台和人的转动惯量为 J ,飞轮的转动惯量为 J' .

4-10 下面几个物理量中,哪些与原点的选择有关,哪些与原点的选择无关:(1) 位矢、(2) 位移、(3) 速度、(4) 角动量.

4-11 卫星绕地球运动,设想卫星上有一个窗口,此窗口远离地球.若欲使卫星中的宇航员依靠自己的能力,从窗口看到地球,这位宇航员怎样做才能使窗口朝向地球呢?

4-12 一密度均匀的小球,沿两个高度相同、倾角不同的斜面上无滑动地滚下.在这两种情况下,它们到达斜面下端的速率是否相同?

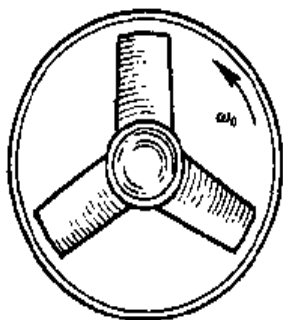
习 题

4-1 一汽车发动机曲轴的转速在 12 s 内由 $1.2 \times 10^3 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$ 均匀的增加到 $2.7 \times 10^3 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$.(1) 求曲轴转动的角加速度;(2) 在此时间内,曲轴转了多少转?

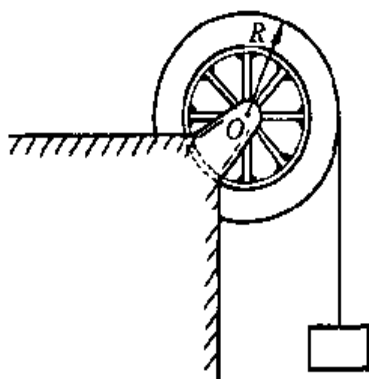
4-2 某种电动机启动后转速随时间变化的关系为 $\omega = \omega_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, 式中 $\omega_0 = 9.0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\tau = 2.0 \text{ s}$. 求:(1) $t = 6.0 \text{ s}$ 时的转速;(2) 角加速度随时间变化的规律;(3) 启动后 6.0 s 内转过的圈数.

4-3 如图所示,一通风机的转动部分以初角速度 ω_0 绕其轴转动,空气的阻力矩与角

速度成正比,比例系数 c 为一常量.若转动部分对其轴的转动惯量为 J ,问:(1) 经过多少时间后其转动角速度减少为初角速度的一半?(2) 在此时间内共转过多少转?



习题 4-3 图



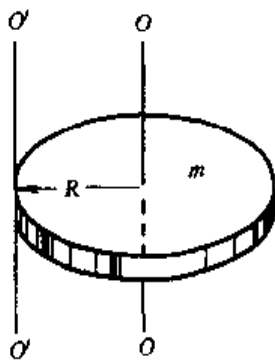
习题 4-5 图

4-4 一燃气轮机在试车时,燃气作用在涡轮上的力矩为 $2.03 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}$,涡轮的转动惯量为 $25.0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.当轮的转速由 $2.80 \times 10^3 \text{ r}\cdot\text{min}^{-1}$ 增大到 $1.12 \times 10^4 \text{ r}\cdot\text{min}^{-1}$,所经历的时间 t 为多少?

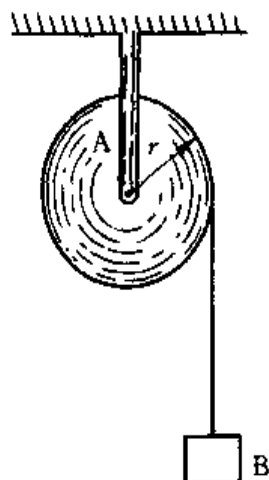
4-5 用落体观察法测定飞轮的转动惯量,是将半径为 R 的飞轮支承在 O 点上,然后在绕过飞轮的绳子的一端挂一质量为 m 的重物,令重物以初速度为零下落,带动飞轮转动(如图).记下重物下落的距离和时间,就可算出飞轮的转动惯量.试写出它的计算式.(假设轴承间无摩擦)

4-6 一飞轮由一直径为 30 cm ,厚度为 2.0 cm 的圆盘和两个直径都为 10 cm ,长为 8.0 cm 的共轴圆柱体组成,设飞轮的密度为 $7.8 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$,求飞轮对轴的转动惯量.

4-7 如图所示,圆盘的质量为 m ,半径为 R .求它对 $O'O'$ 轴(即通过圆盘边缘且平行于盘中心轴)的转动惯量.



习题 4-7 图



习题 4-10 图

4-8 试证明质量为 m ,半径为 R 的均匀球体,以直径为转轴的转动惯量为 $\frac{2}{5} mR^2$. 如

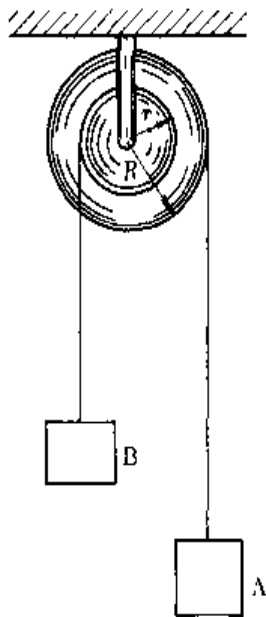
以和球体相切的线为轴,其转动惯量又为多少?

4-9 质量面密度为 σ 的均匀矩形板,试证通过与板面垂直的几何中心轴线的转动惯量为 $\frac{\sigma}{12}lb(l^2+b^2)$,其中 l 为矩形板的长, b 为它的宽.

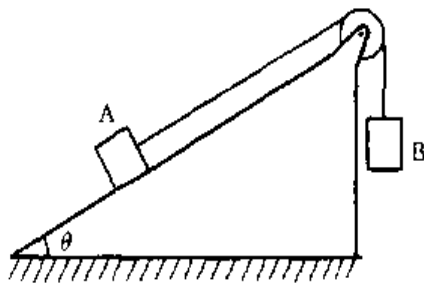
4-10 如图所示,质量 $m_1 = 16 \text{ kg}$ 的实心圆柱体 A,其半径为 $r = 15 \text{ cm}$,可以绕其固定水平轴转动,阻力忽略不计.一条轻的柔绳绕在圆柱体上,其另一端系一个质量为 $m_2 = 8.0 \text{ kg}$ 的物体 B,求:(1) 物体 B 由静止开始下降 1.0 s 后的距离;(2) 绳的张力.

4-11 质量为 m_1 和 m_2 的两物体 A、B 分别悬挂在如图所示的组合轮两端.设两轮的半径分别为 R 和 r ,两轮的转动惯量分别为 J_1 和 J_2 ,轮与轴承间、绳索与轮间的摩擦力均略去不计,绳的质量也略去不计.试求两物体的加速度和绳的张力.

4-12 如图所示装置,定滑轮的半径为 r ,绕转轴的转动惯量为 J ,滑轮两边分别悬挂质量为 m_1 和 m_2 的物体 A、B, A 置于倾角为 θ 的斜面上,它和斜面间的摩擦因数为 μ ,若 B 向下作加速运动时,求:(1) 其下落的加速度大小;(2) 滑轮两边绳子的张力.(设绳的质量及伸长均不计,绳与滑轮间无滑动,滑轮轴光滑.)



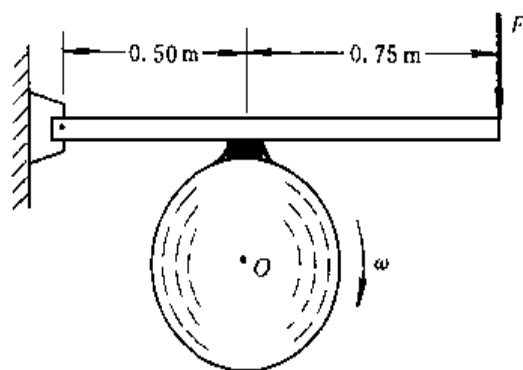
习题 4-11 图



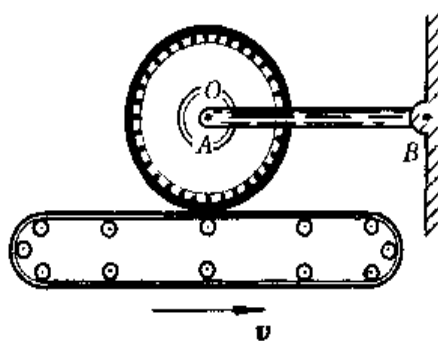
习题 4-12 图

4-13 如图所示,飞轮的质量为 60 kg ,直径为 0.50 m ,转速为 $1.0 \times 10^3 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$,现用闸瓦制动使其在 5.0 s 内停止转动,求制动力 F . 设闸瓦与飞轮之间的摩擦因数 $\mu = 0.40$; 飞轮的质量全部分布在轮缘上.

4-14 本题图是测试汽车轮胎滑动阻力的装置. 轮胎最初为静止,且被一轻质框架支承着,轮轴可绕点 O 自由转动,其转动惯量为 $0.75 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,质量为 15.0 kg ,半径为 30.0 cm . 今将轮胎放在以速度 $12.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 移动的传送带上,并使框架 AB 保持水平.(1) 如果轮胎与传送带之间的动摩擦因数为 0.60 ,则需要经过多长时间车轮才能达到最终的角速度?(2) 在传送带上轮胎滑动的痕迹长度是多少?



习题 4-13 图



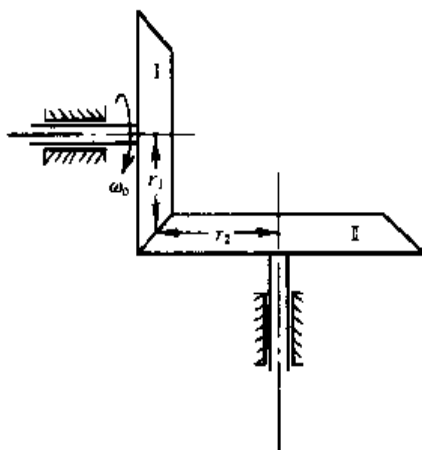
习题 4-14 图

4-15 一半径为 R 、质量为 m 的匀质圆盘,以角速度 ω 绕其中心轴转动,现将它平放在一水平板上,盘与板表面的摩擦因数为 μ 。(1) 求圆盘所受的摩擦力矩。(2) 问经多少时间后,圆盘转动才能停止?

4-16 一质量为 m' 、半径为 R 的均匀圆盘,通过其中心且与盘面垂直的水平轴以角速度 ω 转动,若在某时刻,一质量为 m 的小碎块从盘边缘裂开,且恰好沿垂直方向上抛,问它可能达到的高度是多少? 破裂后圆盘的角动量为多大?

4-17 在光滑的水平面上有一木杆,其质量 $m_1 = 1.0 \text{ kg}$,长 $l = 40 \text{ cm}$,可绕通过其中点并与之垂直的轴转动。一质量为 $m_2 = 10 \text{ g}$ 的子弹,以 $v = 2.0 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度射入杆端,其方向与杆及轴正交。若子弹陷入杆中,试求所得到的角速度。

4-18 半径分别为 r_1 、 r_2 的两个薄伞形轮,它们各自对通过盘心且垂直盘面转轴的转动惯量为 J_1 和 J_2 。开始时轮 I 以角速度 ω_0 转动,问与轮 II 成正交啮合后(如图所示),两轮的角速度分别为多大?

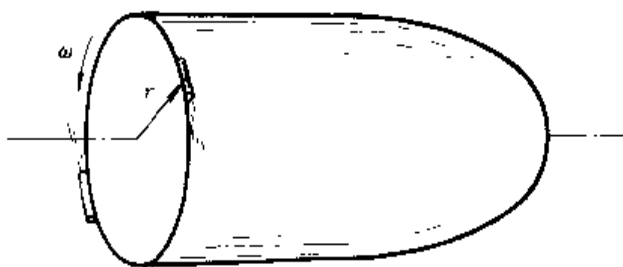


习题 4-18 图

4-19 一质量为 20.0 kg 的小孩,站在一半径为 3.00 m 、转动惯量为 $450 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 的静止水平转台边缘上,此转台可绕通过转台中心的竖直轴转动,转台与轴间的摩擦不计。如果此小孩相对转台以 $1.00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率沿转台边缘行走,问转台的角速率有多大?

4-20 一转台绕其中心的竖直轴以角速度 $\omega_0 = \pi \text{ s}^{-1}$ 转动,转台对转轴的转动惯量为 $J_0 = 4.0 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。今有砂粒以 $Q = 2 \text{ t} \cdot \text{g} \cdot \text{s}^{-1}$ 的流量竖直落至转台,并粘附于台面形成一圆环,若环的半径为 $r = 0.10 \text{ m}$,求砂粒下落 $t = 10 \text{ s}$ 时,转台的角速度。

4-21 为使运行中的飞船停止绕其中心轴的转动,可在飞船的侧面对称地安装两个切向控制喷管(如图所示),利用喷管高速喷射气体来制止旋转。若飞船绕其中心轴的转动惯量 $J = 2.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,旋转的角速度 $\omega = 0.2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$,喷口与轴线之间的距离 $r = 1.5 \text{ m}$;喷气以恒定的流量 $Q = 1.0 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ 和速率 $u = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 从喷口喷出,问为使该飞船停止旋转,喷气应喷射多长时间?



习题 4-21 图

4-22 一质量为 m' 、半径为 R 的转台,以角速度 ω_0 转动,转轴的摩擦略去不计,(1) 有一质量为 m 的蜘蛛垂直地落在转台边缘上,此时,转台的角速度 ω_1 为多少?(2) 若蜘蛛随后慢慢地爬向转台中心,当它离转台中心的距离为 r 时,转台的角速度 ω_2 为多少? 设蜘蛛下落前距离转台很近。

4-23 一质量为 1.12 kg 、长为 1.0 m 的均匀细棒,支点在棒的上端点,开始时棒自由悬挂。当以 100 N 的力打击它的下端点,打击时间为 0.02 s 时,(1) 若打击前棒是静止的,求打击时其角动量的变化;(2) 求棒的最大偏转角。

4-24 (1) 设氢原子中电子在圆形轨道中以速率 v 绕质子运动。作用在电子上的向心力为电作用力,其大小为 $e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$,其中 e 为电子、质子的电量, r 为轨道半径, ϵ_0 为恒量。试证轨道半径为

$$r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2}$$

(2) 假设电子绕核的角动量只能为 $h/2\pi$ 的整数倍,其中 h 为普朗克恒量。试证电子的可能轨道半径由下式确定:

$$r = \frac{nh}{2\pi mv}$$

(3) 试由以上两式消去 v ,从而证明符合这两个要求的轨道半径必须满足以下关系式:

$$r = \frac{n^2 \epsilon_0 h^2}{\pi m v^2}$$

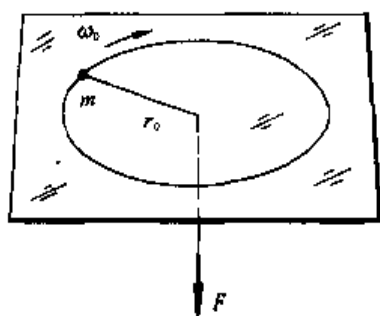
式中 n 可取正整数 $1, 2, 3, \dots$ 。

4-25 我国 1970 年 4 月 24 日发射的第一颗人造卫星,其近地点为 $4.39 \times 10^5 \text{ m}$ 、远地点为 $2.38 \times 10^6 \text{ m}$ 。试计算卫星在近地点和远地点的速率。(设地球半径为 $6.38 \times 10^6 \text{ m}$ 。)

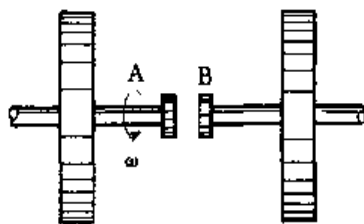
4-26 地球对自转轴的转动惯量为 $0.33 m_E R^2$,其中 m_E 为地球的质量, R 为地球的半径。(1) 求地球自转时的动能;(2) 由于潮汐的作用,地球自转的速度逐渐减小,一年内自转周期增加 $3.5 \times 10^{-5} \text{ s}$,求潮汐对地球的平均力矩。

4-27 如图所示,一质量为 m 的小球由一绳索系着,以角速度 ω_0 在无摩擦的水平面上,绕以半径为 r_0 的圆周运动。如果在绳的另一端作用一竖直向下的拉力,小球则以半径为 $r_0/2$ 的圆周运动。试求:(1) 小球新的角速度;(2) 拉力所作的功。

4-28 质量为 0.50 kg 、长为 0.40 m 的均匀细棒,可绕垂直于棒一端的水平轴转动。如将此棒放在水平位置,然后任其落下,求:(1) 当棒转过 60° 时的角加速度和角速度;(2) 下落到竖直位置时的动能;(3) 下落到竖直位置时的角速度。



习题 4-27 图

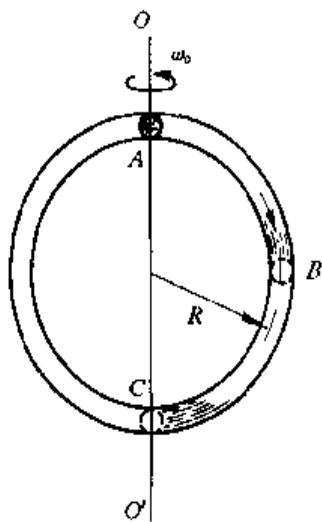


习题 4-29 图

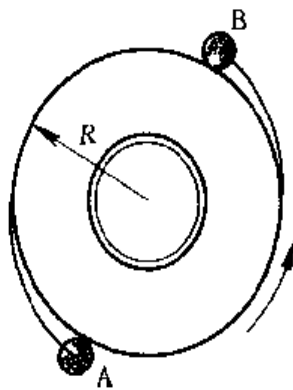
4-29 如图所示, A 与 B 两飞轮的轴杆可由摩擦啮合器使之连接, A 轮的转动惯量 $J_A = 10.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 开始时 B 轮静止, A 轮以 $n_1 = 600 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$ 的转速转动, 然后使 A 与 B 连接, 因而 B 轮得到加速而 A 轮减速, 直到两轮的转速都等于 $n = 200 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$ 为止. 求: (1) B 轮的转动惯量; (2) 在啮合过程中损失的机械能.

4-30 在题 3-28 的冲击摆问题中, 若以质量为 m' 的均匀细棒代替柔绳, 子弹速度的最小值应是多少?

4-31 如图所示, 有一空心圆环可绕竖直轴 OO' 自由转动, 转动惯量为 J_0 , 环的半径为 R , 初始的角速度为 ω_0 , 今有一质量为 m 的小球静止在环内 A 点, 由于微小扰动使小球向下滑动, 问小球到达 B、C 点时, 环的角速度与小球相对于环的速度各为多少? (假设环内壁光滑.)



习题 4-31 图

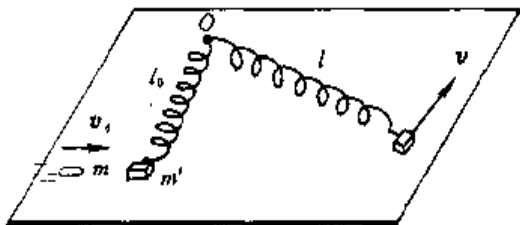


习题 4-32 图

4-32 为使运行中飞船停止绕其中心轴转动, 一种可能方案是将质量均为 m 的两质点 A、B, 用长为 l 的两根轻线系于圆盘状飞船的直径两端 (如图所示). 开始时轻线拉紧两质点靠在圆盘的边缘, 圆盘与质点一起以角速度旋转; 当质点离开圆盘边逐渐伸展至连线沿径向拉直的瞬时, 割断质点与飞船的连线. 为使此时的飞船正好停止转动, 连线应取何长度? (设飞船可看作质量为 m' 、半径为 R 的匀质圆盘.)

4-33 如图所示, 在光滑的水平面上有一轻质弹簧 (其劲度系数为 k), 它的一端固定,

另一端系一质量为 m' 的滑块。最初滑块静止时,弹簧呈自然长度 l_0 ,今有一质量为 m 的子弹以速度 v_0 沿水平方向并垂直于弹簧轴线射向滑块且留在其中,滑块在水平面内滑动,当弹簧被拉伸至长度 l 时,求滑块速度的大小和方向。

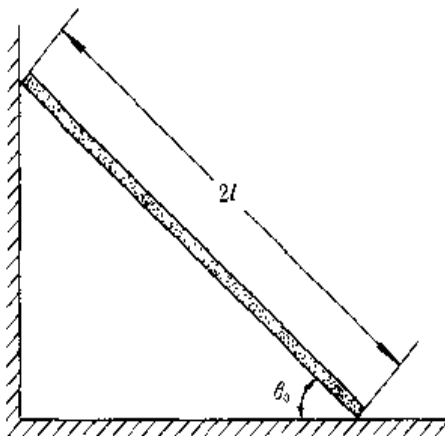


习题 4-33 图

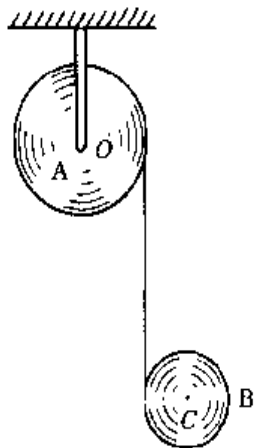
4-34 一质量为 m 、半径为 R 的匀质圆柱体,从倾角为 θ 的斜面上无滑动地滚下,求其质心的加速度。

4-35 一长为 l 、质量为 m 的均匀细棒,在光滑的平面上绕质心作无滑动的转动,其角速度为 ω ,若棒突然改绕其一端转动;求:(1) 以端点为转轴的角速度 ω' ;(2) 在此过程中转动动能的改变。

4-36 一长为 $2l$ 的均匀细杆,一端靠在摩擦略去不计的垂直墙上,另一端放在摩擦亦略去不计的水平地板上,如图所示。开始时细杆静止并与地板成角 θ_0 。当松开细杆后,细杆开始滑下。问细杆脱离墙壁时,细杆与地面的夹角 θ 为多大?



习题 4-36 图



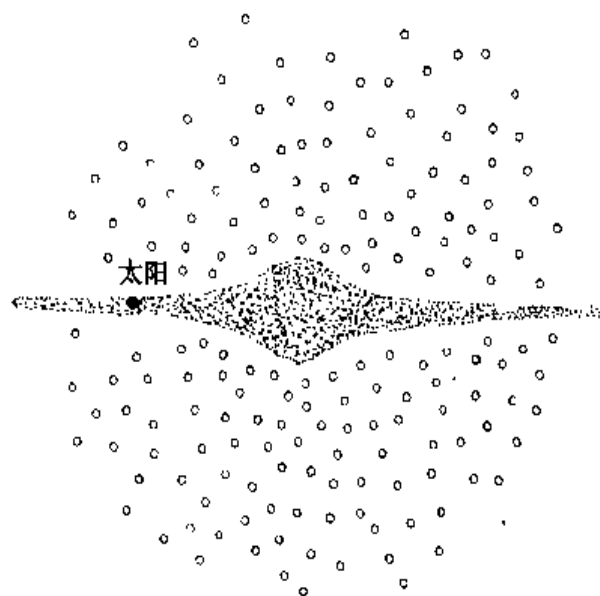
习题 4-37 图

4-37 如图所示,A、B 两个轮子的质量分别为 m_1 和 m_2 ,半径分别为 r_1 和 r_2 。另有一细绳绕在两轮上,并按图所示连接。其中轮 A 绕固定轴 O 转动。试求:(1) 轮 B 下落时,其轮心的加速度;(2) 细绳的拉力。

* 第五章 万有引力场^①

在科学史上,人类对太阳系内行星运动规律的认识也许是最重要和最值得回忆的事件之一.它促进了实验物理学和理论物理学的发展,为经典力学奠定了基础;也促进了天体物理学的发展,使宇宙航行事业成为人类跨世纪的伟大活动之一;而且人类对万有引力的认识,是与人类观察和探索行星与太阳的运动规律密切相关的.在古希腊,把地球作为宇宙的几何中心,所有的星体都围绕着地球运动,这就是所谓的地心说.16世纪,波兰天文学家哥白尼(N. Copernicus, 1473—1543)提出日心说.按照哥白尼的思想,太阳^②为中心,行星轨道的排列次序为水星、金星、地球、火星、木星和土星,而月球则是绕地球运动的卫星.后来经过伽利略、开普勒和牛顿等人的研究,进一步认识了行星运动的规律,并由牛顿提出了万有引力定律.

我们在第二章牛顿运动定律中,对万有引力定律曾简略地介绍了其主要内容,本章拟作较深入的讨论.本章涉及行星运动的开普勒定律;牛顿早期对引力的二次方反比定律的考虑;在万有引力定律的基础上引出引力场强度和引力势能等概念;用万有引力定律证明开普勒定律和行星的椭圆轨道等.



太阳在银河系中真所谓沧海一粟.

① 本章为选学内容,请根据具体教学情况决定取舍,可以不学,也可只学其中一部分内容.

② 现在已经清楚地知道,太阳只是银河系中的一个恒星,银河系中有数以千亿计的恒星.银河系的形状如同中间凸起的光盘,其跨度约为 85 000 l.y. (光年),太阳距银河系中心约 26 000 l.y. (约 2.5×10^{21} m).

5-1 开普勒定律

17世纪初,德国天文学家开普勒分析了前人从天文观测中得来的数据,提出了描述行星运动的三条定律,也叫做开普勒定律.这三条定律的主要内容是:

- (1) 每一行星沿椭圆轨道绕太阳运行,太阳位于椭圆轨道的一个焦点上(图 5-1).
- (2) 行星运动时,太阳到行星的径矢 r 在相等的时间间隔内,扫过同样大小的面积(图 5-2).这也叫做面积定律.

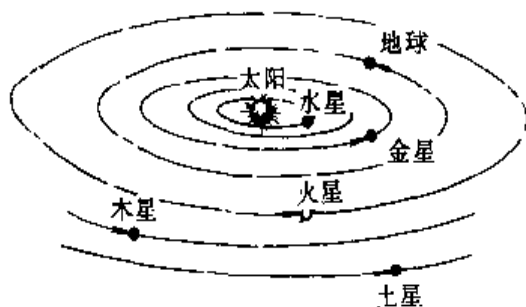


图 5-1 太阳为焦点的行星椭圆轨道

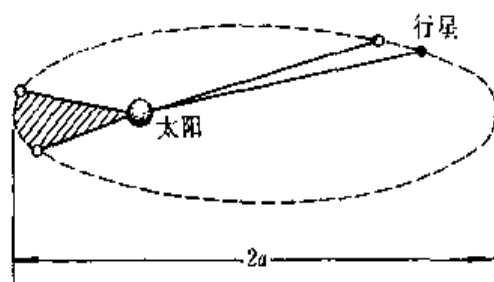


图 5-2 行星的面积定律

- (3) 行星绕太阳公转周期 T 的二次方正比于行星椭圆轨道半长轴 a 的三次方,且它们的比值为一恒量,即

$$\frac{a^3}{T^2} = C \quad (5-1)$$

C 为恒量.表 5-1 给出了几个行星有关开普勒第三定律的数据.

应当指出,第一定律仅描述了行星在太阳系中运动轨道的形状,它是一条纯粹的几何定律;第二定律指出了行星在太阳系中运动时遵守角动量守恒定律;第三定律是对第一、第二两条定律的补充,它给出了行星绕太阳运动的周期与行星和太阳之间距离的关系.开普勒的第一、第二两定律是 1609 年发表在《新天文学》上的.10 年后,他才发现第三定律,并在《宇宙的和谐》一书中向世人介绍.

表 5-1 有关开普勒第三定律的几个行星的数据

行星	轨道运动周期 T/s	轨道半长轴 a/m	$(a^3/T^2)/(m^3 \cdot s^{-2})$
水星	7.513×10^6	5.795×10^{10}	3.448×10^{18}
金星	1.941×10^7	1.0811×10^{11}	3.354×10^{18}
地球	3.154×10^7	1.496×10^{11}	3.366×10^{18}
火星	5.937×10^7	2.2784×10^{11}	3.355×10^{18}
木星	3.735×10^8	7.781×10^{11}	3.377×10^{18}
土星	9.297×10^8	1.427×10^{12}	3.362×10^{18}



开普勒(Johannes Kepler, 1571—1630), 德国天体物理学家和数学家。他在第谷·布拉赫关于行星运动观测的基础上, 发现了行星运动的三条定律。他的工作给哥白尼的日心说以有力的支持, 也为牛顿发现万有引力定律提供了基础。

5-2 万有引力定律

无论是宇宙中两质点之间, 或者是地球上两质点之间, 或者是宇宙中质点与地球上质点之间, 都存在一种具有相同性质的引力, 这种引力称之为万有引力。万有引力定律为

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (5-2)$$

它发表在 1687 年出版的牛顿的名著《自然哲学的数学原理》一书中。万有引力定律的发现是人类认识自然、了解宇宙天体运动规律、理解开普勒定律的一项伟大而具有里程碑性质的重大事件, 也是人们首次用统一的观点研究宇宙万物之间引力作用所取得的重大成果。

牛顿关于引力问题的研究始于 1665 年。这一年, 英国伦敦发生大瘟疫, 牛顿就读的剑桥大学被迫停学, 牛顿中断学业回到故乡, 前后在母亲的农庄待了 18 个月, 渡过了他在科学研究上最旺盛的时期。但他直到 20 年后(1687 年)才把万有引力理论公诸于世。在这期间, 牛顿为了完善引力理论, 创立了微积分。下面我们先介绍牛顿关于万有引力的早期(1665 年—1666 年)研究成果。

1666 年, 当时人们从对月球运动观测的数据中已经知道, 月球绕地球运动的周期 $T_M = 27.3 \text{ d} = 2.36 \times 10^6 \text{ s}$, 地球与月球间平均距离 $R_M = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$ 。如把地球近似当作球体, 当时已知道地球的半径为 $R_E = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$, 即 $R_M \approx 60R_E$ 。此外, 实验物理学家还用摆测出地球表面的重力加速度为 $g = 9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。这些观测和实验结果为牛顿研究月球和地球间的引力与它们间距离之间的关系, 提供了坚实基础。

荷兰数学家、物理学家惠更斯(C. Huygens, 1629—1695)在研究摆的运动规律时, 于 1659 年就发现质点欲维持匀速圆周运动时需受到向心力作用, 其值为

$$F = m \frac{v^2}{r}$$

其中 $a = v^2/r$ 为向心加速度。牛顿利用惠更斯的向心力公式, 并假设月球绕地球运动的轨道近似为圆, 此外还考虑到月球与地球的直径较之它们间的距离要小得多, 故把月球和地球视为质点, 于是他得到月球绕地球运动的向心加速度为

$$a_M = \frac{v_M^2}{R_M} = \frac{(2\pi R_M/T_M)^2}{R_M} = \frac{4\pi^2 R_M}{T_M^2}$$

代入前述已知数据, 有

$$a_M = \frac{4\pi^2 \times 3.84 \times 10^8}{(2.36 \times 10^6)^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 2.72 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

把它与地球表面附近的重力加速度 $a_g = g = 9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 相比,有

$$\frac{a_M}{a_F} = \frac{a_M}{g} = \frac{2.72 \times 10^{-3}}{9.80} \approx \frac{1}{3600} = \left(\frac{1}{60}\right)^2 \quad (5-3)$$

即月球绕地球运动的向心加速度约为地球表面附近物体下落加速度的 $1/3600$. 怎样来说明这个结果呢?

当时从光的强度研究中已经知道,光的强度 I 是与距光源距离的二次方成反比的,即

$$I \propto \frac{1}{r^2}$$

牛顿假设月球与地球之间的引力如同光的强度一样,也与距离的二次方成反比关系,并且只要用加速度来替代上式中的光强度就可以了. 于是,有

$$\frac{a_M}{a_E} = \frac{I/R_M^2}{I/R_E^2} = \left(\frac{R_E}{R_M}\right)^2$$

前面已述地球与月球之间的距离为地球半径的 60 倍,即 $R_M/R_E \approx 60$,故上述加速度的比值为

$$\frac{a_M}{a_F} \approx \left(\frac{1}{60}\right)^2 = \frac{1}{3600} \quad (5-4)$$

比较上述两种计算加速度比值的方法以后,牛顿认为关于质点间引力作用的二次方反比假设是合理的. 然后他从开普勒第三定律和惠更斯的向心力公式出发,导出引力的二次方反比定律^①. 作为初步研究,设行星以半径 r 绕太阳作近似的匀速圆周运动(其实是速率不等的椭圆轨道). 按开普勒第三定律即式(5-1),有

$$T = (Cr^3)^{1/2}$$

另外,如设行星以速率 v 作匀速圆周运动,有

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

把上面两式代入太阳作用在行星上的向心力公式

$$F = m \frac{v^2}{r}$$

式中 m 为行星的质量,可得

$$F = \frac{4\pi^2 m}{Cr^2} \quad (5-5)$$

牛顿认为这个力就是太阳作用在行星上的引力. 他还认为行星作用于太阳的引力与太阳作用于行星的引力在数量上应相等. 如以 m' 代表太阳的质量,则应有

$$F = \frac{4\pi^2 m'}{C'r^2} \quad (5-6)$$

^① 当时,也在探索这个定律的还有哈雷(E. Halley, 1656—1742)和胡克(R. Hooke, 1635—1702)等人,但均不及牛顿深入. 哈雷是英国天文学家,哈雷彗星即是以他的名字命名的. 1687年出版的牛顿所著《自然哲学的数学原理》就是在哈雷推动和赞助下面世的.

由于上述两式相等,故可令 $4\pi^2/(Cm') = 4\pi^2/(C'm) = G$,那么式(5-5)和式(5-6)均可写成

$$F = G \frac{mm'}{r^2} \quad (5-7)$$

G 为新的常量,上述方程给出了太阳与行星之间的引力表达式。

宇宙中的星体,其大小较之星体间的距离总是小得多,可以把它们视为质点,故宇宙星体间的引力可用上式计算。也就是说,式(5-7),只能计算可视为质点的物体间的引力。那么地球上的物体之间的引力,地球与地球表面附近物体间的引力是如何计算的呢?式(5-7)所反映的规律,除了能用于计算天上(宇宙)的引力,是否也适应于地上的呢?天上的引力和地上的引力是否统一于一个定律呢?此外,牛顿在1666年得出的式(5-7)是从行星绕太阳的轨道为圆形出发的,但开普勒所提出的椭圆轨道并不是凭空想当然的,而是分析了第谷留给他的数千张星象图得出的,第谷为从观测中得出这些星象图耗去了长达20年的时间。因此,必须从椭圆轨道得到引力二次方反比律,或者从引力的二次方反比律得到椭圆轨道,只有做到这点,万有引力定律才是符合客观实际的规律。

1666年—1687年间,牛顿在引力理论方面有哪些研究成果呢?

1669年,牛顿接替他的导师巴罗(I. Barrow, 1630—1677)担任卢卡斯数学讲座教授职务。他在巴罗的影响下开始进行微积分方面的研究工作,直到1687年后,才以《流数学》^①为名发表在《自然哲学的数学原理》中。牛顿研究微积分的一个显著特点是把它与物理问题结合起来,特别是致力于万有引力理论的完善和应用。1687年,在哈雷的推动下,他的万有引力理论才公诸于世,并与《流数学》一起发表。这时,他应用《流数学》,从万有引力定律导出了开普勒第三定律,证明行星绕太阳的运动轨道为椭圆轨道;他还证明薄匀质球壳对外部质点的吸引力等于球壳的质量集中在球心时产生的引力,并由此得到匀质球体对球外质点的引力等于球体的质量集中在球心时所产生的引力;他还进一步证明了,两匀质球体的引力就好像两球体的质量集中在球心所产生的引力一样(这些问题自1666年以来一直困扰着牛顿,只有当运用了微积分后才获得完满的解决,在历史上,有人称之为“牛顿命题”)。这样,万有引力理论才逐步完善起来,下面几节将简略地介绍这几个问题。此外,牛顿还用他的引力理论解释了月球引力引起的岁差,说明了潮汐的起因,并论证了彗星是在太阳引力作用下运动的等等。

^① 与牛顿同时各自独立发明流数学的还有德国数学家和哲学家莱布尼兹(G.W.F. Von Leibniz, 1646—1716),莱布尼兹称它为微积分。

5-3 引力场 引力势能

一 引力场

万有引力定律指出,两质点间的引力与它们之间距离的二次方成反比,而与质点周围是否有介质无关.于是,人们自然会有这样的问题:引力是如何传递的呢?自万有引力定律发表并取得一系列成果以来,这个问题始终困扰着人们.有人认为引力作用是瞬时的、超距的,然而超距作用又使人不可思议,其他的一些说法也无法使人接受.直到20世纪爱因斯坦才在引力理论中明确指出,任何物体周围都存在着引力场,处在引力场中的物体都将受到引力作用,故引力是依赖于引力场来传递的,且传递速度为光速.因此,可以说两质点间的引力是通过引力场的作用来实现的.地球对物体作用的引力,通常也叫做重力,所以地球的引力场又可叫做重力场.

目前人们已经知道,除了引力场外,还有电磁场和其他形式的场.场与实物(例如粒子)一样是客观的存在,是物质的一种形式.另一方面,场又与实物有明显区别,实物占有一定的空间,而且此空间不再被其他实物所占有.但是在同一空间可以同时存在许多场,不但场与场可以处于同一空间,而且场与实物还可以占有同一空间.当它们相互渗透时,实物会对场施以影响,场也会对实物施以影响.以引力场为例,场对实物的影响表现在两个方面:(1)引力场对处于其中的物体施以力的作用;(2)引力场能对处于其中运动的物体做功,这说明引力场与一般物体一样,也具有能量.

下面我们进一步考察引力场这两方面的性质.

二 引力场强度

把一个质量为 m 的质点放到引力场中可以发现,它在引力场中各点所受引力的大小和方向都不相同.这就说明,引力场中各点对 m 的作用强度的大小和方向是不同的.

为了比较引力场中各点的强度,我们引进引力场强度 g 这个物理量.若把质量为 m 的质点放在引力场中某一点时,它受到的引力为 F ,那么 F/m 就表示单位质量的质点所受到的引力,叫做引力场强度 g ,即

$$g = \frac{F}{m} \quad (5-8)$$

引力场强度是矢量,其方向与 F 一致.若知道了引力场中各点的引力场强度,那么就可以说知道了整个引力场的强度分布情况.

就地球的引力场而言,质量为 m 的质点在地球表面以外所受的引力为

$$F = -G \frac{m m_E}{r^2} e_r$$

式中 m_E 为地球质量; r 是由地球中心到质点 m 处的径矢,其大小为 r ; e_r 为沿径矢的单位矢量.根据式(5-8)可得引力场强度为

$$g = -G \frac{m_E}{r^2} e_r \quad (5-9)$$

从上式可以看出,引力场强度 g 只与场源的质量 m_F 和场点的位置有关,而与场点是否具有质量为 m 的质点无关,所以说,引力场强度可以反映引力场的强度.此外,从上式还可以看出,如以 r 为半径作一球面,球面上各点的引力场强度 g 的大小都相等,但引力场强度的方向与沿径矢的单位矢量 e_r 的方向相反.图 5-3 表示地球引力场各处场强分布的概略情况,图中带箭头线段的长短与该点引力场强度的大小成比例.

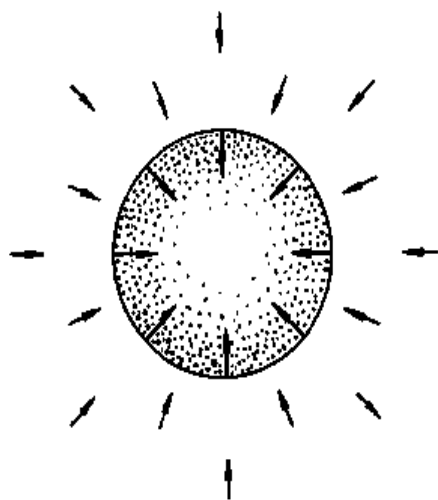


图 5-3 地球引力场的概貌

三 引力势能 引力势

在第三章中,我们已给出质点 m 在质点 m' 的引力场中某点的引力势能为

$$E_p = -Gmm' \frac{1}{r} \quad (5-10)$$

r 为 m 与 m' 之间的距离,而且我们是选取距质点 m' 无限远处作为引力势能为零的参考点的.

我们定义:引力场中某点单位质量的引力势能叫做该点的引力势.引力势用符号 V 表示,有

$$V = \frac{E_p}{m} \quad (5-11)$$

那么,距质点 m' 的距离为 r 处的引力势为

$$V = -G \frac{m'}{r} \quad (5-12)$$

从式(5-12)可以看出,引力势是一标量,在无限远处,引力势为零.如以质点 m' 为球心, r 为半径作一球面,那么在球面上各点的引力势都相同.这个球面是一等势面.

上面讨论了单个质点的引力场中的引力场强度和引力势.下面我们讨论由 n 个质点所产生的引力场强度和引力势.

若在质量分别为 $m'_1, m'_2, \dots, m'_i, \dots, m'_n$ 的 n 个质点的引力场中的点 P 有一质点 m ,作用在 m 上的引力为

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 + \dots + F_i + \dots + F_n \\ &= \dots - G \frac{mm'_1}{r_1^2} e_{r1} - G \frac{mm'_2}{r_2^2} e_{r2} - \dots - G \frac{mm'_i}{r_i^2} e_{ri} - \dots - G \frac{mm'_n}{r_n^2} e_{rn} \end{aligned}$$

由式(5-9),上式为

$$F = m(g_1 + g_2 + \dots + g_i + \dots + g_n) = mg$$

其中

$$g = g_1 + g_2 + \dots + g_i + \dots + g_n \quad (5-13)$$

g 为诸质点在点 P 的合引力场强度,它是各个质点在点 P 的引力场强度的矢量和(图 5-4).

此外,很容易得到点 P 的引力势为

$$V = -G \frac{m'_1}{r_1} - G \frac{m'_2}{r_2} - \dots - G \frac{m'_i}{r_i} - \dots - G \frac{m'_n}{r_n}$$

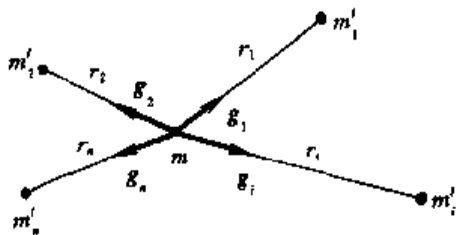


图 5-4 诸质点的引力场强度

即
$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_i + \cdots + V_n \quad (5-14)$$

上式表明,诸质点在点 P 产生的引力势等于各个质点在点 P 的引力势的代数和。

四 引力与引力势能的关系

如图 5-5 所示,设有一质量为 m 的质点位于引力场中的点 P ,点 P 相对场源点 O 的径矢为 r ,质点所受的引力为 F ,质点在该点所具有的引力势能为 E_p 。若使质点位移 dr ,引力所作的功为 $F \cdot dr$ 。在第三章中已讲述过万有引力为保守力,因此它所作的功等于引力势能增量的负值,即

$$F \cdot dr = -dE_p$$

对于图 5-5 所示的情形,由上式有

$$F = -\frac{dE_p}{dr} e_r \quad (5-15a)$$

在直角坐标系中, E_p 一般是 x 、 y 和 z 的函数。若质点仅沿 Ox 轴移动微小位移 dx ,则 $dy=0$ 和 $dz=0$,那么由上式可得

$$F_x = -\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{y=c, z=c}$$

在数学上,这个变化率称为偏微商,符号记为 $\partial E_p / \partial x$ 。故上式亦可写成

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \quad (5-15b)$$

用同样方法可求得,作用在质点 m 上的引力 F 在 Oy 和 Oz 轴上的分量为

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \quad (5-15c)$$

关于计算质点 m 在引力场中所受引力,有两种计算方法:第一种是,按照万有引力定律先分别求出 n 个质点的每一个对质点 m 的引力,再求这些引力的矢量和。如果这 n 个质点是连续分布的,这就要进行积分运算。第二种是,按式(5-10)先求出 n 个质点的每一个对质点 m 的引力势能,再求这些引力势能的代数和,然后根据式(5-15)求出 F_x 、 F_y 和 F_z ,这样引力 F 就可求出了。对比这两种计算引力 F 的方法可以看出,第一种直接应用万有引力定律,但要进行矢量求和或积分计算。第二种是先求引力势能,再对引力势能求导数,而引力势能是标量,它的和是代数和而非矢量和,然后求导数而非积分。因此用第二种方法,在数学

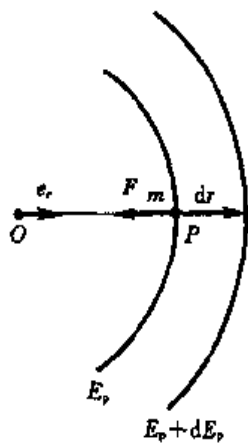


图 5-5 引力与引力势能的关系

上要简便些。

由式(5-8)关于引力场强度的定义式 $g = F/m$, 以及式(5-11)关于引力势的定义式 $V = E_p/m$, 式(5-15)可写成

$$g_x = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right), \quad g_y = -\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right), \quad g_z = -\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad (5-16)$$

引力场强度和引力势都是描述引力场特性的物理量, 上式反映了引力场强度与引力势之间的关系^①。

5-4 物体间的引力势能和引力

前面已指出, 在万有引力定律

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} e_r$$

中, m_1 和 m_2 均系质点的质量, r 是两质点间的距离, 因此, 它只对质点才是成立的。星体间的引力可以用这个定律去计算, 是因为星体可视为质点。然而地面上的物体之间, 或者地球与地球表面附近的物体之间的引力是否也可用上式去计算呢? 计算出来的结果能否与事实相符? 这就是前面所提及的所谓“牛顿命题”。

一 匀质球壳与质点间的引力

如图 5-6 所示, 有一半径为 R 、质量为 m' 的匀质薄球壳, 在距球心 O 为 r 的点 P 处放置一质量为 m 的质点。点 P 可以在球壳内或在球壳外。我们先讨论点 P 在球壳外的情况。

在图 5-6 中, 从球壳上取一细环带, 环带的宽度为 $Rd\theta$ 。环带所在的平面与 OP 垂直。此环带的面积为

$$dA = 2\pi(R \sin \theta) R d\theta = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$

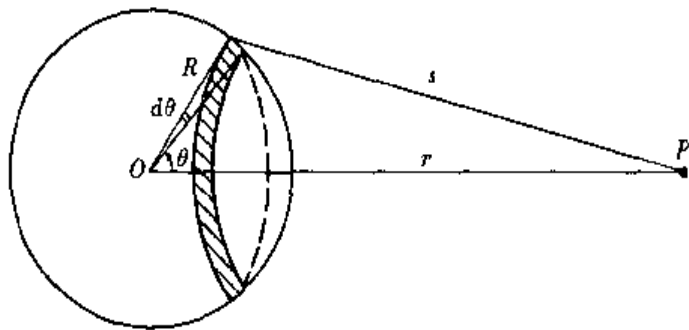


图 5-6 匀质球壳与球外质点间的引力

由于球壳是匀质的, 故若以 σ 代表球壳质量面密度, 则此环带的质量为

^① 在第八章中, 我们将讨论静电场, 由于静电场力(即库仑力)亦属保守力, 故静电场的电场强度和电势也有如式(5-16)一样的关系。由此可见, 引力场和静电场特性上的相似性, 也就必然导致场量关系描述上的相似性。这恰是物质世界统一性的一种表现。

$$dm' = 2\pi R^2 \sigma \sin \theta d\theta$$

由于环带上各点到点 P 的距离都为 s , 故由式(5-10)可得, 质点 m 在环带所产生的引力场中点 P 处的引力势能为

$$dE_p = -G \frac{m dm'}{s}$$

把上式代入, 有

$$dE_p = -Gm2\pi R^2 \sigma \frac{\sin \theta d\theta}{s} \quad (5-17)$$

式中 s 与 θ 随所取环带不同而改变, 由图 5-6 可以看出, R, r 与 s 之间有如下关系

$$s^2 = R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta$$

取微商, 有

$$\frac{\sin \theta d\theta}{s} = \frac{ds}{Rr}$$

代入式(5-17), 得

$$dE_p = -\frac{Gm2\pi R\sigma}{r} ds$$

于是, 质点 m 在匀质球壳外的引力场中点 P 处的引力势能为

$$E_p = -\frac{Gm2\pi R\sigma}{r} \int ds$$

上式积分的上下限可以这样来确定. 当点 P 在球壳外面时, 从图 5-6 中可以看出, 环带到点 P 的距离 s 的变化范围随 θ 而变化. 当 $\theta=0$ 时, s 的值最小为 $r-R$; 当 $\theta=\pi$ 时, s 的值最大为 $r+R$. 故上式的积分为

$$E_p = -\frac{Gm2\pi R\sigma}{r} \int_{r-R}^{r+R} ds$$

即

$$E_p = -\frac{Gm2\pi R\sigma}{r} 2R = -G \frac{m4\pi R^2 \sigma}{r}$$

其中 $4\pi R^2 \sigma = m'$ 为球壳质量, 故质点 m 在球壳外点 P 处的引力势能为

$$E_p = -G \frac{mm'}{r} \quad (r > R) \quad (5-18)$$

r 为球壳中心到球壳外点 P 的距离, 式(5-18)表明, 质点 m 放在匀质球壳外, 其引力势能如同球壳的质量全部集中于球心的情况一样.

利用式(5-15a), 可得球壳外质点 m 所受的引力为

$$\mathbf{F} = -\frac{dE_p}{dr} \mathbf{e}_r = -G \frac{mm'}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (r > R) \quad (5-19)$$

上式表明, 匀质球壳外面的质点所受的引力, 与把球壳的质量集中于球心时的一样. 这是万有引力与距离二次方成反比的一个必然结论.

如果质点 m 处在匀质球壳内部, 如图 5-7 所示. 与前述相同, 当 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 时, s 的值分别为 $R-r$ 和 $R+r$. 于是, 可得质点 m 在球壳内部点 P 处的引力势

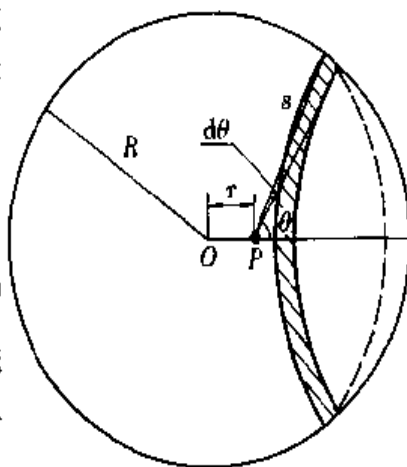


图 5-7 匀质球壳与球内质点的引力

能为

$$\begin{aligned} E_p &= -\frac{Gm2\pi R\sigma}{r} \int_{R-r}^{R+r} ds \\ &= -\frac{Gm2\pi R\sigma}{r} 2r \end{aligned}$$

即
$$E_p = -G \frac{mm'}{R} \quad (r < R) \quad (5-20)$$

由
$$\mathbf{F} = -\frac{dE_p}{dr} \mathbf{e}_r$$

有
$$F = 0 \quad (r < R) \quad (5-21)$$

式(5-20)表明,质点 m 无论处在匀质球壳内部什么位置,其引力势能都是相等的,均等于质点 m 在球壳表面处的引力势能.从引力势能的定义 $V = E_p/m$ 可知,球壳表面及壳内的引力势为 $V = -Gm'/R$,即整个球壳为一等势体.式(5-21)表明,质点 m 无论处在匀质球壳内部什么位置,它与球壳间的引力均为零.虽然球壳上任一质量元对 m 都有引力作用,但整个球壳对 m 的合引力为零.这是万有引力与距离二次方成反比的另一个必然结论.

按照质点 m 在球壳内外的引力势能和引力的式(5-18)、式(5-19)、式(5-20)和式(5-21),可作如图 5-8 所示的 E_p-r 和 $F-r$ 曲线.

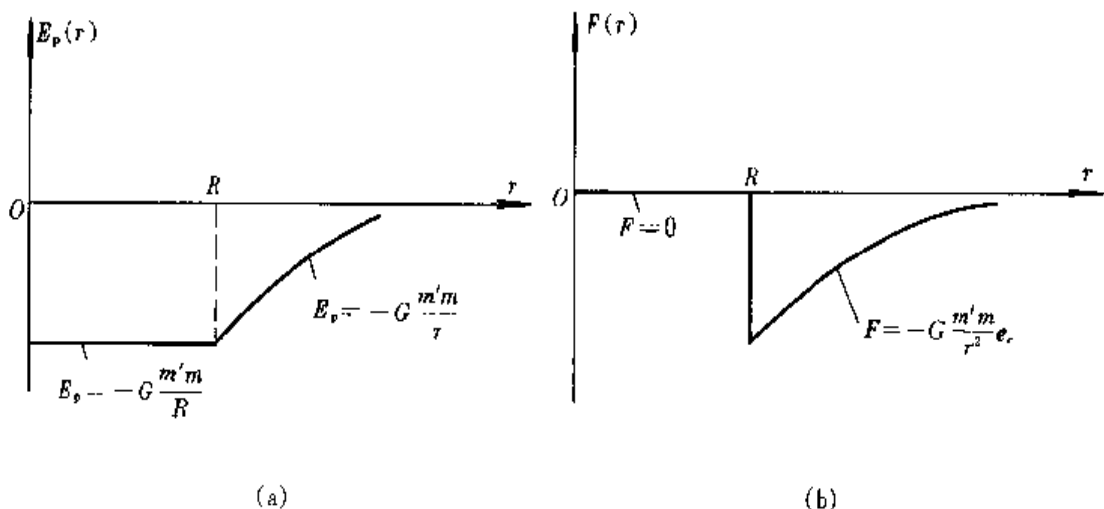


图 5-8 匀质球壳内外的引力势能和引力分布

二 匀质球体间的引力

匀质球体可看作是由许多同心的薄球壳所组成的.质点 m 与匀质球体间的引力势能,等于各个球壳与质点 m 的引力势能之和.因此,由式(5-18)可得,在匀质球体外面,质点 m 的引力势能为

$$E_p = -G \frac{mm'}{r} \quad (r > R) \quad (5-22)$$

式中 m' 为匀质球体的质量, R 为匀质球体的半径, r 为匀质球体的球心与质点 m 的距离.而球体外面质点 m 所受的引力为

$$\mathbf{F} = -\frac{dE_p}{dr}\mathbf{e}_r = -G\frac{mm'}{r^2}\mathbf{e}_r \quad (r > R) \quad (5-23)$$

这样, 不难得出, 质量分别为 m'_1 和 m'_2 的两匀质球体之间的引力势能和引力为

$$E_p = -G\frac{m'_1 m'_2}{r} \quad (5-24)$$

$$\mathbf{F} = -G\frac{m'_1 m'_2}{r^2}\mathbf{e}_r \quad (5-25)$$

式中 r 为两球体球心间的距离. 从上述结果可以看出, 两匀质球体之间的引力, 与把两球体的质量集中于球心——即视为质点之间的引力相同.

由于微积分的发明, 人们不仅能计算天体间的引力, 而且原则上可计算不能当作质点的物体间的引力. 这样, 万有引力定律不仅能研究宇宙中星体的运动, 而且可研究地球上的物体由引力引起的运动, 这是牛顿发明微积分的一项重大成果.

三 匀质球体对球内质点的引力和引力势能

如图 5-9 所示, 把质点 m 放在质量为 m' 、半径为 R 的匀质球体内的点 P , 点 P 与球心的距离为 r . 过点 P , 以半径 r 作一球面. 这样就把匀质球体分为两个部分. 由式(5-21)可知, 带有阴影部分的球壳对质点 m 的引力为零, 而其余部分对质点 m 的引力则为

$$\mathbf{F} = -G\frac{mm''}{r^2}\mathbf{e}_r$$

m'' 是这部分球体的质量, 其值为 $m'' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, 而 ρ 为球体的质量体密度. 于是, 上式为

$$\mathbf{F} = -G\frac{m \frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r^2}\mathbf{e}_r = -G\frac{m \frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R^3}r\mathbf{e}_r$$

式中 $m' = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, 故上式可写成

$$\mathbf{F} = -G\frac{mm'}{R^3}r\mathbf{e}_r \quad (r < R) \quad (5-26)$$

如将质点 m 由球内的点 P 移至球体表面, 引力所作的功应等于质点 m 在这两点引力势能之差, 即

$$\int_r^R \mathbf{F}(r) \cdot d\mathbf{r} = E_p(r) - E_p(R)$$

将式(5-26)代入上式, 有

$$\int_r^R G\frac{mm'}{R^3}r dr = E_p(r) - E_p(R)$$

$$\text{积分后得} \quad E_p(r) - E_p(R) = -G\frac{mm'}{2R}(R^2 - r^2) \quad (5-27)$$

由式(5-20)已知, 球体表面的引力势能为

$$E_p(R) = -G\frac{m'm}{R}$$

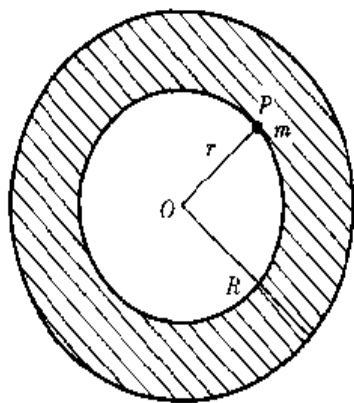
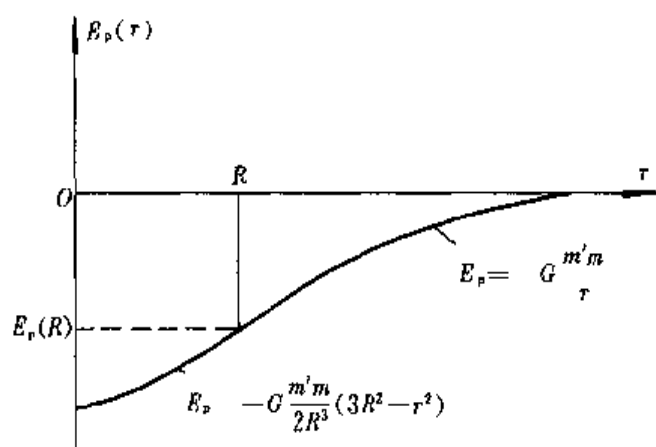


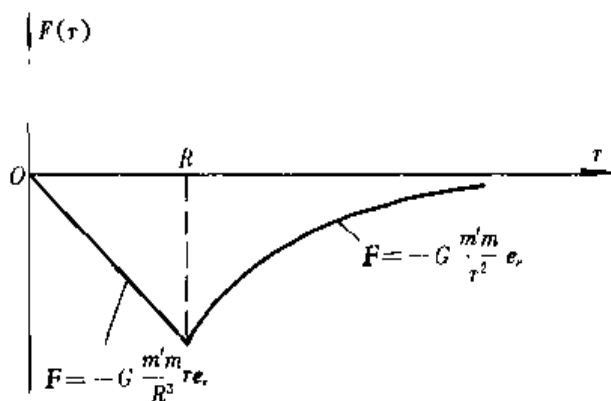
图 5-9 匀质球体内质点的引力

把它代入式(5-27)可得,质点 m 在匀质球体内部点 P 的引力势能为

$$E_p(r) = -G \frac{mm'}{2R^3} (3R^2 - r^2) \quad (R > r) \quad (5-28)$$



(a)



(b)

图 5-10 质点 m 在匀质球体内外的引力势能和引力

由式(5-28)、式(5-26)和式(5-22)、式(5-23)可得质点 m 放在匀质球体内外的引力势能和引力的 $E_p(r)$ 和 $F(r)$ 图线,如图 5-10 所示。

四 质点在地球表面附近的重力势能

由式(5-18)可知,质点 m 处在地球表面外 h 处与处在地球表面处的引力势能之差为

$$\begin{aligned} E_p(R_E + h) - E_p(R_E) &= -Gmm_E \left(\frac{1}{R_E + h} - \frac{1}{R_E} \right) \\ &= Gmm_E \frac{h}{R_E(R_E + h)} \end{aligned}$$

式中 R_E 为地球半径, m_E 为地球质量。由于质点 m 放在地球表面附近,故 $R_E(R_E + h) \approx R_E^2$,上式可近似写成

$$E_p(R_E + h) - E_p(R_E) \approx G \frac{mm_E}{R_E^2} h$$

通常把质点在地球表面附近的引力势能叫做重力势能. 那么, 由于地球表面附近重力加速度 $g = Gm_E/R_E^2$, 且取地球表面作为重力势能为零的参考点, 即 $E_p(R_E) = 0$, 那么从上式可得质点在地球表面外 h 处的重力势能为

$$E_p(R_E + h) = mgh$$

至于质点在地球表面以内处的重力势能, 由式(5-27)可得质点 m 在地球表面内部和地球表面的引力势能之差为

$$\begin{aligned} E_p(r) - E_p(R_E) &= -G \frac{mm_E}{2R_E^3} (R_E^2 - r^2) \\ &= -G \frac{mm_E}{2R_E^3} (R_E + r)(R_E - r) \end{aligned}$$

式中 r 为地球中心到地球表面以内某点的距离. 对处于地球表面附近的质点, $R_E \gg h$, 有 $R_E + r \approx 2R_E$, $R_E - r = h$, 所以上式为

$$E_p(r) - E_p(R_E) \approx -G \frac{mm_E}{R_E^2} h = -mgh$$

由此可见, 如果质点 m 位于地下深为 h 的矿井中, 并仍取地球表面作为重力势能为零的参考点, 则质点的重力势能将 $E_p(R_E - h) \approx -mgh$.

例 有一质量为 m' 、长度为 l 、质量线密度为 λ 的细棒, 若在棒的延长线上, 距棒端为 r 处放一质量为 m 的质点, 求质点的引力势能和受到细棒的引力.

解 如图 5-11 所示, 在细棒上取棒元 dx , 其质量元 $dm' = \lambda dx$. 此质量元与质点 m 的距离为 x , 由式(5-10)可知, 质量元 dm' 与质点 m 的引力势能为

$$dE_p = -\frac{Gmdm'}{x} = -\frac{Gm\lambda dx}{x}$$

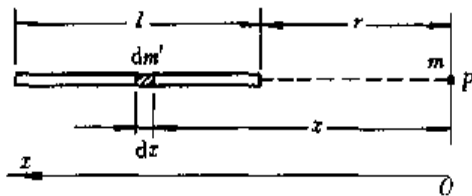


图 5-11

把细棒上所有质量元 dm' 与质点 m 之间的引力

势能加起来, 即从 $x = r$ 到 $x = r + l$ 进行积分, 得质点 m 在点 P 处的引力势能为

$$E_p = \int_r^{r+l} dE_p = -Gm\lambda \int_r^{r+l} \frac{dx}{x}$$

积分得

$$E_p = Gm\lambda \ln \frac{r}{r+l} \quad (1)$$

关于质点 m 所受引力, 可直接用万有引力定律求得. 在图 5-11 中, 质量元 $dm' = \lambda dx$ 对质点 m 的引力为

$$dF = G \frac{mdm'}{x^2} i$$

dF 的方向沿 Ox 轴正向. 于是整个细棒对质点 m 的引力为

$$\begin{aligned} F &= \int dF = Gm\lambda \int_r^{r+l} \frac{dx}{x^2} i \\ &= Gm\lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+l} \right) i \end{aligned} \quad (2)$$

上式亦为
$$F = G \frac{mm'}{r(l+r)} i \quad (3)$$

当然,质点 m 受细棒 m' 的引力,也可由式(5-15)求得.从式(1)可知,此棒与质点间的引力势能 E_p 是距离 r 的函数,故若以 e_r 表示由棒端指向质点的单位径矢,则由式(5-15a)可得质点所受引力为

$$F = -\frac{dE_p}{dr} e_r = -Gm\lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+l} \right) e_r$$

显然这就是式(2),也即是式(3),只不过 e_r 的方向与 i 的方向相反.

5-5 行星的椭圆轨道和面积定律的论证

一 椭圆轨道的论证

开普勒第一定律给出了太阳系中行星运动的椭圆轨道,这是开普勒的最伟大的发现之一,因此开普勒被誉为天空的制法者.作为质点间相互作用的二次方反比律的万有引力定律能否导出行星的椭圆轨道,在某种程度上决定了万有引力定律的命运.这就是为什么1684年哈雷从牛顿那里知道,牛顿已能用万有引力定律计算出行星轨道是椭圆后,竟会激发出非凡的惊喜和激动之情的缘故.

下面我们对这一问题作简略介绍.

如图5-12所示,设太阳 m' 位于原点 O ,行星 m 位于平面极坐标中的点 P ,它对原点 O 的径矢为 r ,而 r 与参考轴的夹角为 θ ,故点 P 的坐标为 (r, θ) .

按万有引力定律,太阳 m' 对行星 m 的引力为

$$F = -G \frac{m'm}{r^2} e_r$$

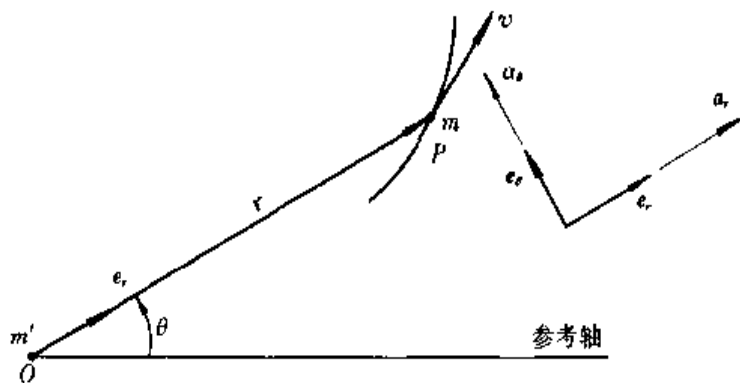


图5-12 行星的运动

取 $c = Gm'm$, 上式为

$$F = -\frac{c}{r^2} e_r \quad (5-29)$$

e_r 为沿径矢 r 的单位矢量.

另由牛顿第二定律知,在行星的运动方程

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

中,加速度 \mathbf{a} 为两个分矢量 a_r 与 a_θ 之和, a_r 叫径向加速度, a_θ 叫横向加速度,即

$$\mathbf{a} = a_r + a_\theta = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta$$

其中 \mathbf{e}_r 就是上面所说的沿径矢的单位矢量,而 \mathbf{e}_θ 为横向单位矢量. 这样行星的运动方程为

$$\mathbf{F} = ma_r \mathbf{e}_r + ma_\theta \mathbf{e}_\theta$$

在 dt 时间内,若行星的位移为 $d\mathbf{r}$,如图 5-13 所示,从图中可以看出,行星的位移 $d\mathbf{r}$ 为径向位移 $dr\mathbf{e}_r$ 和横向位移 $r d\theta \mathbf{e}_\theta$ 之和,即

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta$$

按速度的定义 $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$,行星的速度为

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta \quad (5-30)$$

现令

$$\mathbf{v}_r = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{v}_\theta = r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta$$

\mathbf{v}_r 叫做行星的径向速度, \mathbf{v}_θ 叫做行星的横向速度. 式(5-30)表明,行星在轨道上点 P 的速度为径向速度与横向速度之和.

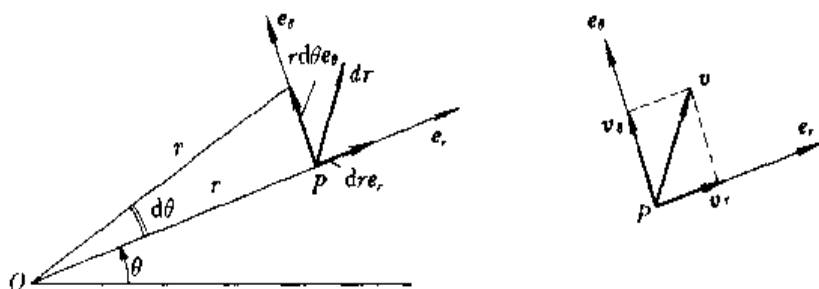


图 5-13 行星的径向速度与横向速度

因为行星所受的力是指向太阳的有心力,故这个力对原点 O 的力矩为零,行星的角动量守恒,即行星的角动量为

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{常量} \quad (5-31)$$

其次,按机械能守恒定律,行星的能量为

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{mm'}{r} = \text{常量}$$

由式(5-30)可得

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

于是,上式为

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - G \frac{mm'}{r} = \text{常量} \quad (5-32)$$

式(5-31)和式(5-32)是求解行星运动问题的基本方程. 下面,我们用它们来求出行星运动的轨道方程.

由式(5-32),有

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2Gm'}{r} - r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2}$$

另由式(5-31),有

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$$

且由于

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dr} \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2Gm'}{r} - \frac{L^2}{m^2 r^2}}$$

所以,由以上两式,可得

$$\frac{L/r^2}{\sqrt{2m \left(E + Gmm' \frac{1}{r} \right) - \frac{L^2}{r^2}}} dr = d\theta$$

上式经积分运算后,可得^①

$$\frac{1}{r} = A(1 + e \cos \theta) \quad (5-33)$$

其中

$$A = \frac{Gm'm^2}{L^2}$$

$$e = \left(1 + \frac{2EL^2}{G^2 m'^2 m^3} \right)^{1/2} \quad (5-34)$$

式(5-33)是典型的圆锥曲线方程, e 叫偏心率.行星在太阳引力场中的轨道形状取决于偏心率 e 的值.我们知道,式(5-34)中 L 、 G 、 m' 、 m 等量的值都是正值,而行星又始终在太阳引力场中运动,其机械能 $E < 0$ (因取无限远处的引力势能为零),故由式(5-34)可得 $e < 1$.从几何学的知识知道, $e < 1$ 时,式(5-33)所表述的方程是椭圆方程.由此可得,行星 m 在太阳 m' 的引力作用下绕以太阳为焦点的椭圆轨道运动,这样我们就用万有引力定律论证了开普勒第一定律.这正是人们对二次方反比定律所期待的结果.

二 面积定律的论证

如图5-14所示,太阳位于行星椭圆轨道的焦点上,太阳作用于行星的引力是指向太阳的有心力.如果我们选取的轴 OO' 通过太阳并垂直于行星的椭圆轨道平面,那么引力对这个轴不产生力矩.于是由角动量守恒定律可知,行星通过以太阳为轴的椭圆轨道上任意点的角动量相等,即 $L = \text{恒量}$.

设在时刻 t ,行星位于点 A ,经 dt 时间后,行星位于点 A' .在此时间内,太阳到行星的径矢 r 转过的角度为 $d\theta$,径矢所扫过的面积为

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

上式除以 dt ,有

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega$$

^① 此积分较繁,读者如有兴趣可参阅肖士 编《理论力学简明教程》第82页(高等教育出版社,1979版).

由于角动量 $L = mvr = mr^2\omega$, 故上式为

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m}mr^2\omega = \frac{L}{2m}$$

因为 L 是恒量, 故单位时间内径矢所扫过的面积 $\frac{dS}{dt}$ 也是恒量, 这就是开普勒行星运动的第二定律。

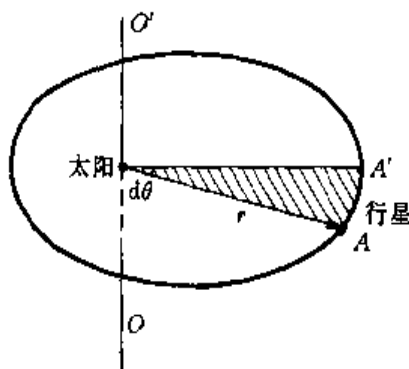


图 5-14

例 设有一航天器以 $v_0 = 3.00 \times 10^4$ km 的速率绕地球作圆轨道运动, 地球的半径为 $R = 6.40 \times 10^3$ km, 航天器距地面的高度 $h = 800$ km, 现欲使航天器的轨道变为椭圆, 航天器在极短的时间内, 沿径矢向外侧喷射

气体, 从而使航天器获得指向地面的速度 $v_r = 800$ km, 以实现变轨的目的. 设航天器喷气前后的质量可视为不变, 问航天器在椭圆轨道上运行时, 其近地点和远地点距地球中心的距各为多少?

解 由题意知, 航天器在喷气前后, 其角动量为

$$mv_0 r_0 = mvr \quad (1)$$

其中 r_0 是航天器在圆轨道上运行时, 距地球中心的距离, 即 $r_0 = R + h$; r 为航天器在椭圆轨道上远地点(或近地点)距地球中心的距离, v 为该点的速率; m 为航天器的质量.

又由万有引力定律和牛顿定律, 航天器沿圆轨道运动有

$$G \frac{m_E m}{r_0^2} = \frac{mv_0^2}{r_0} \quad (2)$$

变轨后, 若以航天器和地球为系统, 则机械能守恒, 有

$$\frac{1}{2}m(v_0^2 + v_r^2) - G \frac{m_E m}{r_0} = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{m_E m}{r} \quad (3)$$

由式(1)、式(2)和式(3), 消去 m_E 和 v , 得

$$v_0^2 r_0^2 \left(\frac{1}{r} \right)^2 - 2v_0^2 r_0 \left(\frac{1}{r} \right) + (v_0^2 - v_r^2) = 0$$

解上式, 可得 r 的两个根 r_1 和 r_2 , 即

$$r_1 = \frac{v_0 r_0}{v_0 + v_r} = \frac{v_0 (R + h)}{v_0 + v_r}, \quad r_2 = \frac{v_0 r_0}{v_0 - v_r} = \frac{v_0 (R + h)}{v_0 - v_r}$$

代入已知数可得: $r_1 = 7.01 \times 10^3$ km, $r_2 = 7.40$ km. 这就是椭圆轨道的远地点和近地点距地球中心的距离, 分别为 7.40×10^3 km 和 7.01×10^3 km.

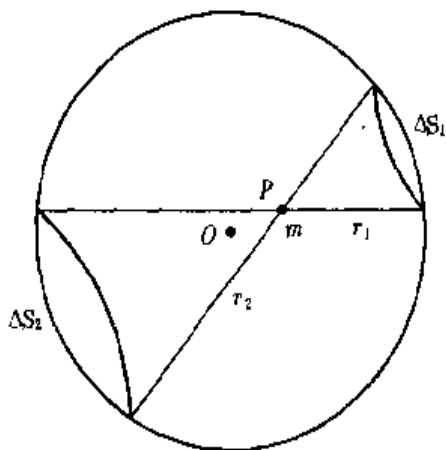
问 题

5-1 地球卫星以椭圆轨道绕地球运动, 试问卫星在椭圆轨上各点的动能是否相同?

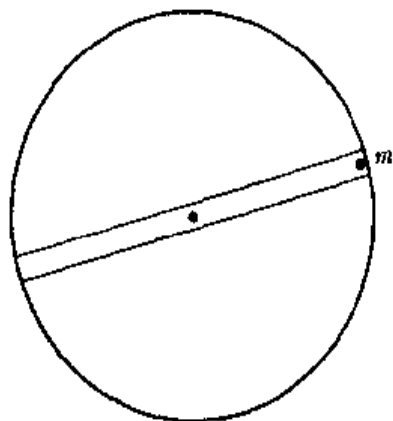
5-2 设有一密度均匀的球壳, 在球壳内点 P 处放一质量为 m 的质点, (如图所示). 如以点 P 为顶点作两个小圆锥, 它们在球面上所截的面积元分别为 ΔS_1 和 ΔS_2 . 你知道球面上两个面积元 ΔS_1 和 ΔS_2 对 m 的引力的合力有多大? 整个球壳对 m 的引力有多大?

5-3 设想沿地球的直径挖一隧道, 如图所示, 若有一质点落入此隧道中, 它所受的引力 F 与到球心的距离 r 有什么关系? 你能知道质点在此隧道内将如何运动吗? (后一个问题,

需参阅第十四章简谐运动的定义. 设地球是一密度均匀的球体.)



问题 5-2 图



问题 5-3 图

5-4 在一般计算中,我们认为地球表面附近的重力加速度 g 是一常量.但是从牛顿万有引力定律可以算出, g 是随高度而变化的.你能证明这个变化为 $\frac{dg}{g} = -2 \frac{dr}{r}$ 吗?

5-5 如以两质点相距无限远时的引力势能为零值,那么两物体的引力势能在什么情况下最大?

5-6 如果选择物体在地球表面的引力势能为零.那么,把一质量为 m 的质点从地球表面移至无限远处,其引力势能为多少? 万有引力作了多少功? 是正功还是负功?

5-7 在正方形的顶点各有一个质量相等的星体.问把另一个质量为 m 的小星体放在什么位置时,它们的引力势能最小?

5-8 如果略去其它星体的影响,太阳-地球系统的结合能有多大?

5-9 将一质点 m 分别放在球壳内和球面上,请比较它们的引力势能.若将此质点从球壳内移至球面上,引力作的功是多大?

5-10 一卫星最初在距地球表面几百公里上空近似于圆轨道运行.由于阻力作用,使其逐渐失去能量而降落下来,作为近似考虑可认为其轨道是“半径逐渐收缩的圆”.从其动能表示式 $E_k - \frac{1}{2}mv^2 = Gm_E m/2r$ 可以看到,随着半径的减小,卫星反而被加速了.这是什么道理呢?

5-11 地球绕太阳的轨道为一椭圆,试问近日点和远日点的速率是否相同?

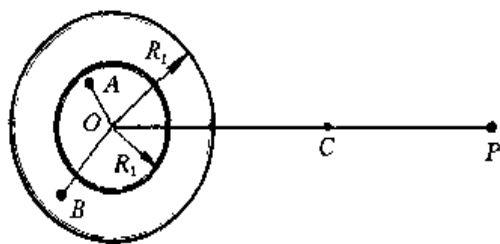
习 题

5-1 月球的质量是地球的 $1/81$,直径为地球的 $3/11$,计算质量为 65 kg 的人在月球上所受到的月球引力.

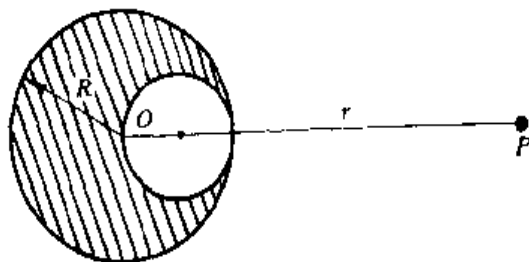
5-2 试根据地球的半径 R_E 和万有引力常量 G 的值,估算地球的质量和平均密度.(已知 $R_E = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$, $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.)

5-3 如图所示,有两个半径分别为 R_1 和 R_2 的同心薄壁球壳,质量各为 m'_1 和 m'_2 . (1) 求将质量为 m 的质点 P 置于距球心 O 分别为 r_A 、 r_B 和 r_C 处,质点所受的引力;(2) 如取

质点 P 在无限远处的引力势能为零, 计算质点 P 在以上三处的引力势能.



习题 5-3 图



习题 5-4 图

5-4 如图所示, 在一半径为 R 、质量为 m' 、密度均匀的球体中挖了一个半径为 $R/2$ 的球形空腔. 在点 P 处放一质量为 m 的质点, 求此质点所受的引力.

5-5 当一物体从地球表面竖直向上或向下移动一小距离时, 计算重力加速度的变化规律.

5-6 有一质量为 m 的质点, 从地面上空高为 h 处落下, 设空气阻力不计, 且 h 与地球半径 R_E 相比要小得多. 试证质点落地时的速率为 $\sqrt{2ghR_E/(R_E + h)}$.

5-7 同步卫星在赤道上空以和地球自转同样的角速度运行, 为满足这一要求, 同步卫星应位于距赤道多高的地方? 其线速度为多大?

5-8 质量分别为 $3m$ 和 m 的两个质点, 它们相距为 d . 如以质点 $3m$ 为原点, 试求它们的引力场强为零的位置.

5-9 质量分别为 m 和 m' 的两个质点, 最初它们相距很远 (视为无限远), 并处于静止状态. 在万有引力作用下, 它们相互趋近. 试证两质点相距为 r 时, 它们的相对速度为 $[2G(m + m')/r]^{1/2}$.

5-10 一火箭从地球向月球直线运动, 火箭发射不久燃料就用完. 问: (1) 火箭距地球多远处其加速度为零? (2) 为使火箭能通过这一点, 并到达月球, 火箭从地面发射时最小速度为多少? (地球的质量 $m_E = 5.98 \times 10^{24}$ kg, 月球的质量 $m_M = 7.35 \times 10^{22}$ kg, 月球至地球的距离 $d_{ME} = 3.84 \times 10^8$ m.)

5-11 一半径为 R 、具有均匀密度 ρ 的星球, 是由万有引力将处于很大范围内的星际尘埃凝聚而成的. 求该星球在凝聚过程中所发生的能量变化.

5-12 如以线密度为 λ 的细线弯成半径为 R 的圆环. 试求一质量为 m 的质点放在环中心点时的引力势能和引力.

5-13 一质量为 m' 、半径为 R 且密度均匀的细圆环. 如在通过环心垂直环面的轴线上点 P 处放一质量为 m 的质点, 它们之间的引力势能和引力分别为多少? 设点 P 距环心 O 为 r .

5-14 假定一卫星在圆形轨道上运行. 由于受到微弱的阻力 F_r 而沿螺旋轨道向地球运行. 因阻力极微小, 可以近似地把轨道看作半径变化很小的圆. 若在某一时刻其圆轨道半径为 r , 试证此卫星运行一周动能的变化为 $\Delta E_k = 2\pi r F_r$, 并说明动能的增量为何为正值?

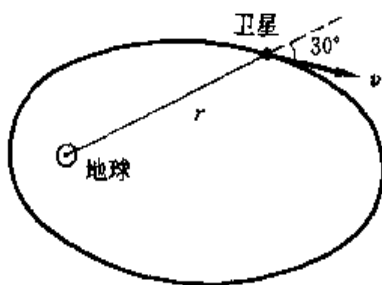
5-15 设一颗 5.00×10^3 kg 的地球卫星, 以半径 8.00×10^3 km 沿圆形轨道运行. 由于

微小阻力,使其轨道半径收缩到 6.50×10^3 km. 试计算:(1) 速率的变化;(2) 动能和势能的变化;(3) 总能量的变化.

5-16 观察到一个人造卫星,当其速度方向与地心到卫星位置的径矢的夹角为 30° 时,卫星正以速率 $v = \sqrt{\frac{4Gm_E}{3r}}$ 运动着(如图所示). 求:(1) 卫星到地球的最近距离和最大距离;(2) 卫星运行的周期.

5-17 观察到一颗接近于某行星表面的人造卫星,它以周期 T 围绕该行星在其圆轨道上运行. 求该行星的平均密度.

5-18 哈雷彗星在椭圆轨道上运行,其偏心率 $e = 0.967$,绕太阳运行一周所需的时间即周期 $T = 76$ a. 太阳的质量约为 2×10^{30} kg. 求:(1) 哈雷彗星在近日点和远日点时,距太阳的距离;(2) 哈雷彗星在远日点时的速率与近日点时的速率之比.



习题 5-16 图

第六章 热力学基础

物质的运动形式是多种多样的。在力学中已经研究了物质最简单的运动形式——机械运动,并采用了牛顿力学的确定论的研究方法。在这一章和下一章中,将研究物质的热运动。通常的固体、液体和气体都是宏观物体,它们在不同温度下的热现象是极其丰富的,而研究热现象的规律有宏观的热力学和微观的统计力学两种方法。统计力学方法是从宏观物体由大量微观粒子(原子、分子等)所构成、粒子又不停地作热运动的观点出发,运用概率论研究大量微观粒子的热运动规律,这方面的基础内容,将在下一章气体动理论中讨论。而另一种方法,则从能量观点出发,不过问物质的微观结构,以大量实验观测为基础,来研究物质热现象的宏观基本规律及其应用,这就是热力学方法。热力学和气体动理论是从不同的角度研究物质热运动规律的,它们是相辅相成的。

本章是热力学的基础内容,主要有:平衡态、准静态过程,热量、功、内能等基本概念,热力学第一定律及其对理想气体各等值过程的应用,理想气体的摩尔热容,循环过程,卡诺循环,热力学第二定律,熵和熵增加定理等。

6-1 气体物态参量 平衡态 理想气体物态方程

一 气体的物态参量

前面我们曾指出,长度(l)、时间(t)和质量(m)是力学中的基本量,利用基本公式还可给出力学中其它导出量,如速度(v)、加速度(a)、动量(mv)、角动量(mvr)、……这些量都是由长度、时间和质量三个基本量构成的,它们统称为力学量。

在力学中研究质点的机械运动时,我们用位矢和速度(动量)来描述质点的运动状态。而在讨论由大量作热运动的分子构成的气体状态时,位矢和速度(动量)只能用来描述分子的微观状态,不能描述整个气体的宏观状态。对一定量的气体,其宏观状态可用气体的体积 V 、压强 p 和热力学温度 T ^① 来描述。气体的体积、压强和温度这三个物理量叫做气体的物态参量,其中体积 V 和压强 p

^① 在一般讲述时,常将热力学温度简称为温度。

是力学量,而温度 T 是气体冷热程度的量度,属热学量。

应当强调指出,气体的体积、压力和温度是描述气体特征的物理量,它们都是宏观量。而组成气体的分子都具有各自的质量、速度、体积等,这些描述个别分子的物理量称为微观量。

二 p 、 V 、 T 的单位

气体的体积是指气体所能达到的空间。对于处在容器中的气体,容器的体积就是气体的体积。在国际单位制中,体积的单位名称是立方米,符号是 m^3 。有时也用立方分米,即升(liter),符号是 L。 $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$ 。

气体的压强是作用于容器壁上单位面积的正压力,即 $p = F/S$ 。在国际单位制中,压强的单位名称是帕斯卡^①,符号为 Pa。按照压强的定义 $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ 。通常,人们把 45° 纬度海平面处测得 0°C 时大气压的值 ($1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$) 称为标准大气压。温度是物体冷热程度的量度。因此,要想定量地确定物体的温度,必须给温度以具体的数量标志,温度的数值表示方法叫温标。各种各样温度计的数值都是由各种温标决定的。根据 1987 年第 18 届国际计量大会对国际实用温标的规定,热力学温标为最基本的温标^②,一切温度的测量最终都应以热力学温标为准。在国际单位制中,热力学温度是基本量之一。热力学温度的符号为 T ,它的单位名称是开尔文(Kelvin)^③,单位符号是 K。

在工程上和日常生活中,目前常使用摄修斯^④温标,简称摄氏温标。在摄氏温标中温度的符号为 t ,单位符号是 $^\circ\text{C}$ 。摄氏温度与热力学温度之间的关系为

$$t = T - 273.15 \quad \text{或} \quad T = 273.15 + t$$

三 平衡态

把一定质量的气体装在一给定体积的容器中,经过一段较长时间后,容器中各部分气体的压强 p 相等、温度 T 相同。此时气体的物态参量都具有确定的

① 帕斯卡(B. Pascal, 1623—1662), 法国数学家、物理学家, 物理学方面的成就主要在流体静力学。他提出大气压力随高度的增加而减小的思想, 不久得到证实。参阅本书第 7-6 节气压公式。为纪念他, 国际单位制中压强的单位用“帕斯卡”命名。

② 如有兴趣了解热力学温标的建立, 可参阅张玉民、阮耀钟编《热学》31 页~40 页(高等教育出版社, 1991 年版)。

③ 开尔文原名汤姆孙(W. Thomson, 1824—1907), 英国物理学家, 热力学的奠基人之一。1851 年表述了热力学第二定律(阅本章第 6-7 节)。他在热力学、电磁学、波动和涡流等方面卓有贡献, 1892 年被授予开尔文爵士称号。他在 1848 年引入并在 1854 年修改的温标称为开尔文温标。为纪念他, 国际单位制中温度的单位用“开尔文”命名。

④ 摄修斯(A. Celsius, 1701—1744), 瑞典天文学家和物理学家。1742 年提出百度温标, 将正常大气压下水的沸点和冰的熔点之间分为 100 度。

值.如果容器中的气体与外界之间没有能量和物质的传递,气体的能量也没有转化为其他形式的能量,气体的组成及其质量均不随时间变化,则气体的状态参量将不随时间而变化,这样的状态叫做平衡态.不过,应当指出,容器中的气体总不可避免地会与外界发生程度不同的能量和物质的传递,理想化了的平衡状态是难以存在的.然而,若气体状态的变化很微小,以致可以略去不计,就可以把气体的状态看成是近似平衡态.本章所讨论的气体状态,除特别声明者外,指的都是平衡态.

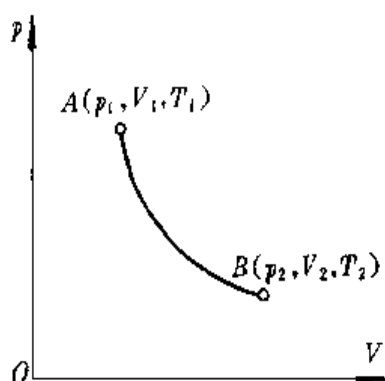


图 6-1 $p-V$ 图上一点代表气体的一个平衡态

对于处在平衡态、质量为 m 的气体,它的状态可以用一组 p 、 V 、 T 值来表示.在以 p 为纵轴, V 为横轴的 $p-V$ 图上,气体的一个平衡状态可以用一确定的点来表示,如图 6-1 中的点 $A(p_1, V_1, T_1)$ 或点 $B(p_2, V_2, T_2)$.

四 理想气体物态方程

对处于平衡态的一定量气体,其物态可用温度 T 、压强 p 和体积 V 这三个物态参量来描述.在一般情形下,当其中任意一个参量发生变化时,其他两个参量也将随之改变.气体处于某一给定平衡状态时,这三个物态参量也必有一定的关系,即其中一个量是其他两个量的函数,如

$$T = f(p, V)$$

这个方程就是一定量的气体处于平衡态时的气体物态方程.一般来说,这个方程的形式是很复杂的,它与气体的性质有关.这里我们只讨论理想气体的物态方程,第 7-9 节再讨论实在气体的物态方程.

我们知道,任何一个物理定律都有一定的适用范围.在中学物理中我们已经知道,玻意耳(Boyle)定律、盖吕萨克(Gay-Lussac)定律和查理(Charles)定律是在温度不太低(与室温相比)、压强不太大(与大气压强相比)的实验条件下总结出来的.可以设想有这样一种气体,它在任何情况下都遵守上述三条实验定律和阿伏伽德罗定律^①,这种气体叫做理想气体.如上所述,一般气体在温度不太低、压强不太大时,都可近似当作理想气体.因此,研究理想气体各状态参量之间的关系即理想气体物态方程,仍有重要意义.

由气体的三个实验定律和阿伏伽德罗定律可得平衡态时,理想气体的物态

^① 阿伏伽德罗(A. Avogadro, 1776—1856),意大利物理学家.他在 1811 年提出,在同样的温度和压强下,相同体积的气体含有相同数量的分子.这就是阿伏伽德罗定律.

方程为

$$pV = \frac{m}{M}RT \quad (6-1)$$

式中 m 为气体的质量, M 为 1 mol 气体分子的质量, 简称摩尔质量, 如氧气的摩尔质量 $M = 32 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, $\nu = m/M$ 为气体的物质的量. 当 $m = M$ 时, 气体的物质的量为 1 mol (摩尔)^①. 上式通常叫做理想气体方程. 在式 (6-1) 中, R 为一常量, 称为摩尔气体常量. 由理想气体物态方程 (6-1) 可以看出, 在 p 、 V 、 T 这三个物态参量中, 如有两个参量已确定, 可利用物态方程求出第三个物态参量, 则气体的物态便能确定.

应当指出, 摩尔气体常量 R 的量值, 与物态参量的单位有关. 在国际单位制中, 压强的单位为 Pa (即 $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$), 体积的单位为 m^3 , 温度的单位为 K, R 的量值为

$$R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

6-2 准静态过程 功 热量

一 准静态过程

在热力学中, 一般把所研究的宏观物体 (如气体、液体、固体、化学电池、电介质、磁介质等等) 叫做热力学系统, 简称系统, 也称工作物质, 而把与热力学系统相互作用的环境称为外界. 限于本课程的要求, 我们将主要以理想气体作为热力学系统.

当一热力学系统的状态随时间改变时, 这时系统就经历了一个热力学过程 (以下简称过程). 由于中间状态不同, 热力学过程又分非静态过程和准静态过程.

设有一个系统开始时处于平衡态, 经过一系列状态变化后到达另一平衡态. 一般来说, 在实际的热力学过程中, 在始末两平衡态之间所经历的中间状态, 不可能都是平衡态, 而常为非平衡态. 所以我们将中间状态为非平衡态的过程称作非静态过程. 但是如果系统在始末两平衡态之间所经历的中间状态, 可近似当作平衡态, 那么这个状态变化的过程称为准静态过程. 下面的例子可近似当作准静态过程.

如图 6-2 所示, 在带有活塞的容器内贮有一定量的气体, 活塞可沿容器壁滑动, 在活塞上放置一些砂粒. 开始时, 气体处于平衡态, 其物态参量为 p_1 、

^① mol (摩尔) 是国际单位制的基本单位之一, 其定义可参阅本书附录.

V_1, T_1 . 然后将砂粒一颗一颗地缓慢地拿走, 最终气体的物态参量变为 p_2, V_2, T_2 . 由于砂粒被非常平缓地一颗一颗地拿走, 容器中气体的状态始终近似处于平衡态. 这种十分缓慢平稳的状态变化过程, 可近似作为准静态过程. 而实际上, 活塞的运动是不可能如此无限缓慢和平稳的, 因此, 准静态过程是理想过程, 是实际过程的理想化、抽象化, 它在热力学的理论研究和对实际应用的指导上有着重要意义, 在本章中, 如不特别指明, 所讨论的过程都是准静态过程.

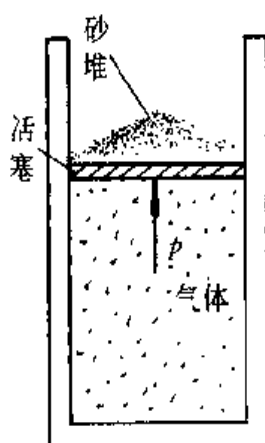


图 6-2 准静态过程

前面曾指出, 只有气体处于平衡态时, 才能在 $p-V$ 图上用一点来表示其状态, 如图 6-1 中的点 A 和点 B.

由此可见, 当气体经历一准静态过程时, 我们就可以在 $p-V$ 图上用一条相应的曲线来表示其准静态过程, 如图 6-1 中点 A 和点 B 之间的连线. $p-V$ 图上两点之间的这类连线, 称为两状态间的准静态过程曲线, 简称过程曲线.

二 功

现在讨论系统在准静态过程中, 由于其体积变化所作的功. 如图 6-3(a) 所示, 在一有活塞的气缸内盛有一定量的气体, 气体的压强为 p , 活塞的面积为

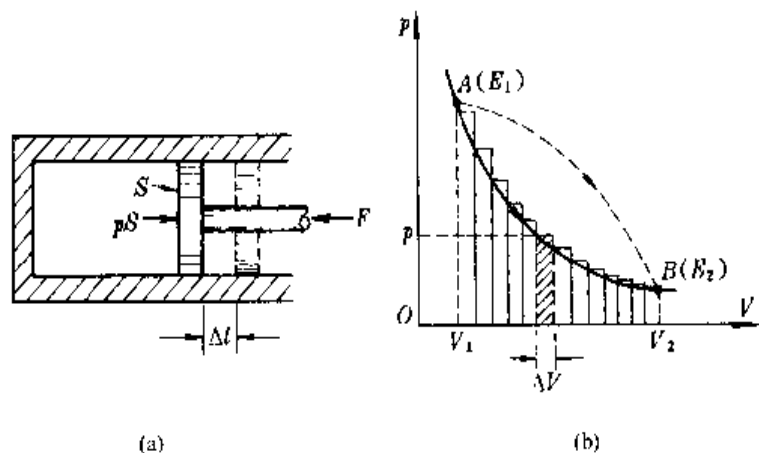


图 6-3 气体膨胀时所做的功

S , 则作用在活塞上的力为 $F = pS$. 当系统经历一微小的准静态过程使活塞移动一微小段距离 Δl 时, 气体所作的功为

$$\Delta W = F \Delta l = pS \Delta l = p \Delta V$$

其中 ΔV 为气体体积的变化量. 功 ΔW 可用图 6-3(b) 中画有斜线的矩形小面积来表示, 故气体在由状态 A 变化到状态 B 的准静态过程中所作的功为

$$W = \sum \Delta W = \sum p \Delta V \quad (6-2a)$$

在 $p-V$ 图上, W 为所有矩形小面积的总和, 式(6-2a)也可用积分式表示. 当气体的体积有无限小变化 dV 时, 气体所作的功为 $dW = p dV$, 则式(6-2a)可写成

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (6-2b)$$

$\int_{V_1}^{V_2} p dV$ 等于 $p-V$ 图上实线下的面积, 所以气体所作的功等于 $p-V$ 图上过程曲线下面的面积. 当气体膨胀时, 它对外界作正功; 当气体被压缩时, 它对外作负功, 但其数值都等于过程曲线下面的面积. 假定气体从状态 A 到状态 B 经历另一个路径, 如图 6-3(b) 中的虚线, 则气体所作的功应该是虚线下面的面积. 状态变化过程不同, 过程曲线下面的面积不同, 系统所作的功也就不同. 总之, 系统所作的功不仅与系统的始末状态有关, 而且还与路径有关, 功不是状态的单值函数, 即功不是态函数, 而是一个过程量.

三 热量

前面已指出对系统做功可以改变系统的状态. 除此之外, 向系统传递能量也可以改变系统的状态, 这类例子是非常之多的. 例如, 把一杯冷水放在电炉上加热, 高温电炉不断地把能量传递给低温的水, 从而使水温也相应地提高, 水的状态就发生了改变. 又如, 在一杯水中放进一块冰, 冰将吸收水的能量而融化, 从而使水和冰的状态都发生变化. 我们把系统与外界之间由于存在温度差而传递的能量叫做热量, 用符号 Q 表示. 如图 6-4(a) 所示, 把温度为 T_1 的系统 A , 放在温度为 T_2 的外界环境 B 之中, 若 $T_2 > T_1$, 则有热量 Q 从 B 传递给 A . 若 $T_2 < T_1$, 则热量 Q 将从 A 传递给 B [图 6-4(b)].

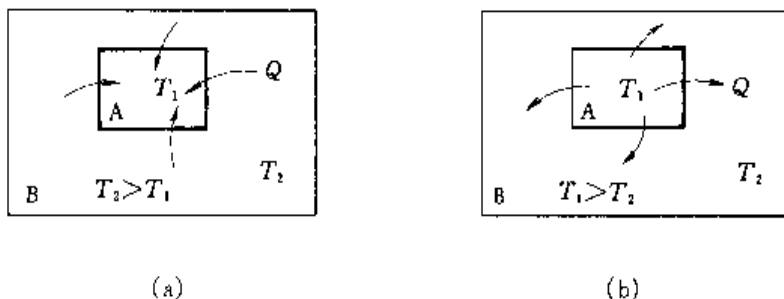


图 6-4 热量

但应指出, 在系统与外界之间发生能量传递时, 一般说系统的温度是要发生变化的. 然而, 也会有这样的情形: 当系统与外界之间发生能量传递时, 系统的温度可维持不变. 例如, 当一杯冷水放在高温电炉上加热至沸腾后, 水虽被继续加热, 但水温却维持在沸点而不再升高. 在这种情形下, 我们也说外界向系统传

递了热量。总之,只要有能量的传递,无论系统的温度是否发生变化,都是热量的传递过程。

在国际单位制中,热量 Q 的单位与能量和功的单位相同,均为 J(焦耳)^①。

应当指出,热量传递的多少与其传递的方式有关,关于这一点将在本章第 6-4 节讨论。所以,热量与功一样都是与热力学过程有关的量,也是一个过程量。

6-3 内能 热力学第一定律

一 内能

由前面的讨论已知,向系统传递热量 Q 可以使系统的状态发生变化,对系统做功 W 也可使系统的状态改变,而且对于既定的始状态和末状态,单独向系统传递热量或对系统做功,其值是随过程的不同而不同的。当然,更一般地说,若向系统传递热量的同时又对系统做功,那么,系统状态的变化就与热量和功有关了。然而大量事实表明,对于既定的始状态和末状态,传递热量与做功的总和却与路径或过程无关,而为一确定值。这就告诉我们,系统状态的改变可以用这个确定值给出量化的表述。也就是说,系统的状态可以用一个物理量 E 来表征;当系统由始状态改变到末状态时,这个物理量的增量 ΔE 是个确定值,而不管系统从初态至末态所经历的是什么过程。这与力学中依据保守力做功与路径无关,从而定义出系统的势能是一样的。这个表征系统状态的物理量 E 就叫做系统的内能。因此,系统的内能仅是系统状态的单值函数。从本章式(6-7)将知道理想气体的内能仅是温度的函数,即 $E = E(T)$ 。对一般气体来说,其内能则是气体的温度和体积的函数,即 $E = E(T, V)$ 。总之,当气体的状态一定时,其内能也是一定的;而气体状态变化时的 ΔE 值只由始状态和末状态所决定,与过程无关。

下面我们用图 6-5 再强调一下,内能 E 具有态函数的特性。在图 6-5(a)中,一系统从内能为 E_1 的状态 A 可经 ACB 的过程到达内能为 E_2 的状态 B,也可以经 ADB 的过程到达状态 B。虽然状态 A 和状态 B 之间这两个过程的中间状态并不相同,但系统内能的增量却是相同的,都等于 $\Delta E = E_2 - E_1$ 。显然,如果我们使系统经历图 6-5(b)所示的过程,即从状态 A 出发,经 ACBDA 过程后,又回到起始状态 A,系统的状态没有变化,则系统内能的增量为零,即 $\Delta E = 0$ 。这就是

^① 过去,热量的单位用过卡路里(caloric),简称卡(cal),现在社会上(包括某些出版物中)仍常出现该单位,为方便读者,特给出它与焦耳的换算关系:1 cal = 4.186 J

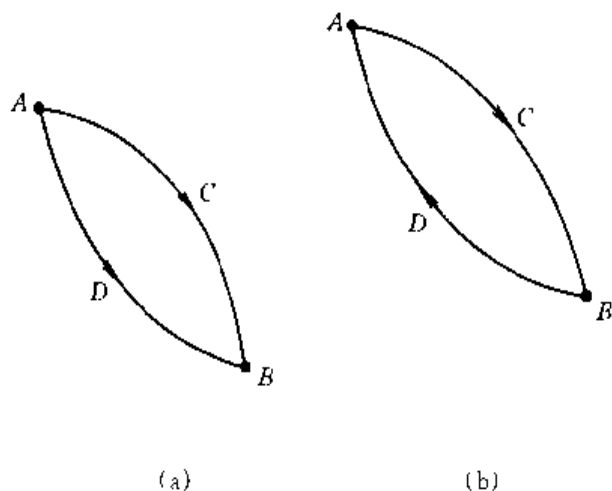


图 6-5 系统内能的改变与过程无关

说,系统的状态经一系列变化又回到起始状态时,系统的内能不改变.总之,系统内能的增量只与系统的起始和终了状态有关,与系统所经历的过程无关,它是系统状态的单值函数.

二 热力学第一定律

综合以上所述,在一个热力学过程中,若开始时系统处于平衡态 1,系统的内能为 E_1 ,当它从外界吸收热量 Q 和外界对其做功 W' 后,系统处于平衡态 2,其内能变为 E_2 ,则由大量事实表明:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = Q + W'$$

上式中 W' 为外界对系统所作的功.对准静态过程来说, W' 可视为系统对外界做功 W 的负值,即 $W' = -W$. 这样上式可写成

$$Q = E_2 - E_1 + W \quad (6-3a)$$

上式表明,系统从外界吸收的热量,一部分使系统的内能增加,另一部分使系统对外界做功,这就是热力学第一定律.式(6-3a)是热力学第一定律的数学表达式.显然,热力学第一定律就是包括热现象在内的能量守恒定律.

为了便于应用热力学第一定律式(6-3a),特作如下规定:系统从外界吸收热量时, Q 为正值,系统向外界放出热量时, Q 为负值;系统对外做功时, W 取正值,外界对系统做功时, W 取负值;系统内能增加时, $E_2 - E_1$ 为正值,系统内能减少时, $E_2 - E_1$ 为负值.

对于状态微小变化过程,热力学第一定律的数学表达式为

$$dQ = dE + dW \quad (6-3b)$$

如果所研究的系统是气体,那么由式(6-3b)可得热力学第一定律的数学表达式为

$$Q = E_2 - E_1 + \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (6-4)$$

最后简述一下所谓第一类永动机问题。由热力学第一定律可以知道,要使系统对外作功,必然要消耗系统的内能或由外界吸收热量,或两者皆有。历史上曾有不少人企图制造一种机器,既不消耗系统的内能,又不需要外界向它传递热量,即不消耗任何能量而能不断地对外作功。这种机器叫做第一类永动机。很明显,由于它违反了热力学第一定律而终未制成。所以热力学第一定律也可表述为,第一类永动机是不可能实现的。应该引以为鉴的是,在今后的工作实践中,一定要严格遵循热力学第一定律,以避免重犯制造第一类永动机那样的错误。

6-4 理想气体的等体过程和等压过程 摩尔热容

作为热力学第一定律的应用之一,我们讨论理想气体的等体过程和等压过程中的功、热量、内能和摩尔热容。

一 等体过程 定体摩尔热容

在等体过程中,理想气体的体积保持不变。如图 6-6 所示,等体过程在 $p-V$ 图上是一条平行于 p 轴的直线,即等体线。

在等体过程中,由于气体的体积 V 是常量,气体不对外作功,即 $dW_V = p dV = 0$ 。由热力学第一定律,有

$$dQ_V = dE \quad (6-5a)$$

对有限的等体过程,则有

$$Q_V = E_2 - E_1 \quad (6-5b)$$

上式表明,在等体过程中,气体吸收的热量全部用来增加气体的内能。

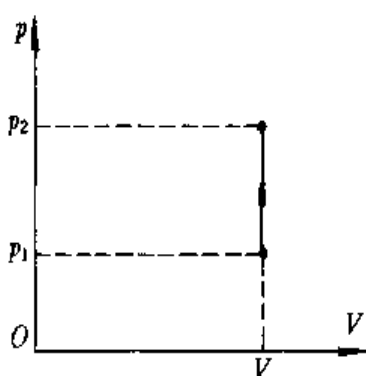


图 6-6 等体过程

现在我们来讨论理想气体的定体摩尔热容。

设有 1 mol 理想气体在等体过程中所吸收的热量为 dQ_V , 气体的温度由 T 升高到 $T + dT$, 则气体的定体摩尔热容为

$$C_{V,m} = \frac{dQ_V}{dT} \quad (6-6a)$$

定体摩尔热容的单位名称为焦耳每摩尔开尔文, 符号为 $J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$ 。式(6-6a)可写成

$$dQ_V = C_{V,m} dT \quad (6-6b)$$

对质量为 m 、定体摩尔热容 $C_{V,m}$ 恒定的理想气体,在等体过程中,其温度由 T_1 改变为 T_2 时,所吸收的热量则为

$$Q_V = \frac{m}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1) \quad (6-6c)$$

式中 M 为气体摩尔质量, m/M 为气体的物质的量。

根据式(6-5a),式(6-6b)亦可写成

$$dE = C_{V,m} dT \quad (6-7a)$$

由上式可以看出,对定体摩尔热容 $C_{V,m}$ 给定的 1 mol 理想气体,其内能增量仅与温度的增量有关。因此,1 mol 给定的理想气体,无论它经历什么样的状态变化过程,只要温度的增量 dT 相同,其内能的增量 dE 就是一定的。这也就是说,理想气体内能的改变只与起始和终了状态温度的改变有关,与状态变化的过程无关。基于这个道理,我们常用式(6-7a)来计算理想气体内能的变化。值得提醒的是:如果起始和终了状态之间无论经历了什么过程,理想气体的内能都是不会改变的。

由式(6-7a)可得 (m/M) mol 的理想气体,在微小的等体过程中内能的增量为

$$dE = \frac{m}{M} C_{V,m} dT \quad (6-7b)$$

定体摩尔热容 $C_{V,m}$ 可以由理论计算得出,也可通过实验测出,表 6-1 给出了几种气体的 $C_{V,m}$ 的实验值。

表 6-1 几种气体摩尔热容的实验值(在 1.013×10^5 Pa, 25°C 时)

($C_{p,m}$ 、 $C_{V,m}$ 的单位均为 $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, M 的单位为 $\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$)

气 体	M/μ	$C_{p,m}$	$C_{V,m}$	$C_{p,m} - C_{V,m}$	$\gamma = C_{p,m}/C_{V,m}$
单原子气体					
氦(He)	4.003×10^{-3}	20.79	12.52	8.27	1.66
氖(Ne)	20.18×10^{-3}	20.79	12.68	8.11	1.64
氩(Ar)	39.95×10^{-3}	20.79	12.45	8.34	1.67
双原子气体					
氢(H_2)	2.016×10^{-3}	28.82	20.44	8.38	1.41
氮(N_2)	28.01×10^{-3}	29.12	20.80	8.32	1.40
氧(O_2)	32.00×10^{-3}	29.37	20.98	8.39	1.40
空 气	28.97×10^{-3}	29.01	20.68	8.33	1.40
一氧化碳(CO)	28.01×10^{-3}	29.04	20.74	8.30	1.40
多原子气体					
二氧化碳(CO_2)	44.01×10^{-3}	36.62	28.17	8.45	1.30
一氧化氮(N_2O)	40.01×10^{-3}	36.90	28.39	8.51	1.31
硫化氢(H_2S)	34.08×10^{-3}	36.12	27.36	8.76	1.32
水蒸气	18.016×10^{-3}	36.21	27.82	8.39	1.30

对于质量为 m 、定体摩尔热容 $C_{V,m}$ 恒定的理想气体,由式(6-7b)可得气体的温度由 T_1 改变为 T_2 的过程中,气体内能的增量为

$$E_2 - E_1 = \frac{m}{M} C_{V,m} \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1) \quad (6-7c)$$

二 等压过程 定压摩尔热容

在等压过程中,理想气体的压强保持不变,如图6-7所示,等压过程在 $p-V$ 图上是一条平行于 V 轴的直线,即等压线。

在等压过程中,向气体传递的热量为 dQ_p ,气体对外所作的功为 $p dV$,所以热力学第一定律可写成

$$dQ_p = dE + p dV \quad (6-8)$$

式(6-8)表明,在等压过程中,理想气体吸收的热量一部分用来增加气体的内能,另一部分使气体对外做功。

对有限的等压过程来说,向气体传递的热量为 Q_p ,则有

$$Q_p = E_2 - E_1 + \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

得

$$Q_p = E_2 - E_1 + p(V_2 - V_1)$$

下面我们讨论理想气体的定压摩尔热容。

设有 1 mol 的理想气体,在等压过程中吸收热量 dQ_p ,温度升高 dT ,则气体的定压摩尔热容为

$$C_{p,m} = \frac{dQ_p}{dT} \quad (6-9a)$$

由上式可得在等压过程中,1 mol 理想气体的温度有微小增量时所吸收的热量

$$dQ_p = C_{p,m} dT \quad (6-9b)$$

故质量为 m 的定压摩尔热容恒定的理想气体在等压过程中吸收的热量则为

$$Q_p = \frac{m}{M} C_{p,m} (T_2 - T_1) \quad (6-9c)$$

定压摩尔热容的单位与定体摩尔热容相同,利用式(6-8),式(6-9a)为

$$C_{p,m} = \frac{dE + p dV}{dT} = \frac{dE}{dT} + p \frac{dV}{dT}$$

由于 $\frac{dE}{dT} = C_V$,又由于根据 1 mol 理想气体物态方程 $pV = RT$,对此式两边取微

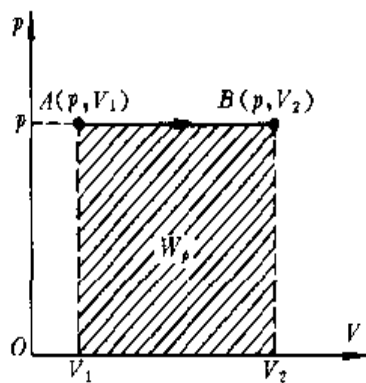


图 6-7 等压过程

分并考虑到等压过程中 $p = \text{常量}$, 可得 $p dV = R dT$, 所以上式为

$$C_{p,m} = C_{V,m} + R$$

于是得 $C_{p,m}$ 与 $C_{V,m}$ 之差为

$$C_{p,m} - C_{V,m} = R \quad (6-10)$$

上式说明理想气体的定压摩尔热容与定体摩尔热容之差为摩尔气体常量 R ($\approx 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$). 也就是说, 在等压过程中, 1 mol 理想气体, 温度升高 1 K 时, 要比其等体过程多吸收 8.31 J 的热量, 以用于对外做功. 从表 6-1 我们可以看到, 在通常温度及压强下的气体 (即理想气体), 无论是单原子气体、双原子气体、还是多原子气体, 尽管它们的定压摩尔热容 $C_{p,m}$ 和定体摩尔热容 $C_{V,m}$ 的实验值并不相同, 但 $C_{p,m}$ 与 $C_{V,m}$ 之差即 $C_{p,m} - C_{V,m}$ 的实验值与摩尔气体常量 R 的值还是比较接近的. 这从另一个侧面反映了热力学第一定律确是包含热现象在内的能量守恒定律.

在实际应用中, 常常用到 $C_{p,m}$ 与 $C_{V,m}$ 的比值, 这个比值通常用 γ 表示, γ 常称为摩尔热容比, 有

$$\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{V,m}}$$

表 6-1 给出了几种气体的 $C_{V,m}$ 、 $C_{p,m}$ 的实验值, $C_{p,m} - C_{V,m}$ 和 γ 的值^①.

三 比热容

上面提到的理想气体定压摩尔热容 $C_{p,m}$ 和理想气体定体摩尔热容 $C_{V,m}$, 是针对理想气体这样一类工作物质来说的. 对于由液体、固体、电介质、磁介质等工作物质构成的系统 (或者经历非等值过程的气体) 来说, 当其在某一微小过程中吸收热量 dQ , 温度升高 dT , 则定义

$$C = \frac{dQ}{dT}$$

为系统在该过程中的热容, 热容的单位为 $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$. 由于热容 C 的值与系统的质量有关, 故把单位质量的热容称为比热容 (简称比热) c , 其单位为 $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. 热容 C 与比热容 c 之间的关系为

$$C = mc$$

m 是系统的质量. 水的比热容为 $4.18 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. 应当指出, 比热容的测定, 无论是在理论上还是在实用中都具有很重要的意义, 它为判别物理理论的正确性提供了最为直接的依据. 关于这个问题, 读者可参阅第七章第 7-4 节中

^① 应当注意, 在本章的习题中, 凡涉及 $C_{V,m}$ 和 $C_{p,m}$ 的值时, 除给出者外, 可从表 6-1 中查得. 至于 $C_{V,m}$ 和 $C_{p,m}$ 的理论值, 将在第七章第 7-4 节的能量均分定理中讨论.

的固体热容。

6-5 理想气体的等温过程和绝热过程

作为热力学第一定律的另一方面的应用,我们讨论理想气体的等温过程和绝热过程。

一 等温过程

如图 6-8 所示,在一个密闭的气缸内贮有理想气体,气缸壁是由绝热材料

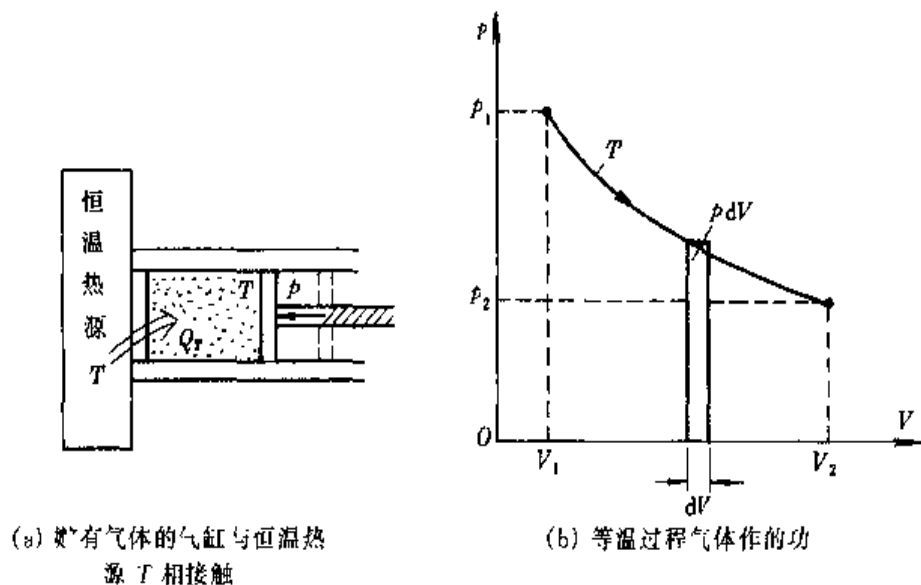


图 6-8 理想气体的等温过程

制成,气缸的底部是良导体。把气缸底部与温度为 T 的恒温热源^①相接触。当作用在活塞上的力有微小降低(或增加)时,缸内气体将膨胀(或压缩),气体将对外作正功(或负功),这时气体的内能将减少(或增加),温度亦将略有降低(或升高),这个过程可看作是准静态过程。在这种情况下,就有热量从恒温热源传入(或传出)气缸中气体,使气体的温度维持不变。这种在温度不变的情况下,状态变化的过程叫做等温过程,其特征是 $dT = 0$ 。对理想气体来说,由式(6-7)可知,在等温过程中气体的内能也保持不变,即 $dE = 0$ 。理想气体的等温过程在 $p-V$ 图上的过程曲线,如图 6-7(b)所示,是一条双曲线,该线也称等温线。

因为在等温过程中,内能不变化,故由热力学第一定律,有

$$dQ_T = dW_T = p dV$$

^① 热源也称热库,它所具有的能量较之从它吸取或者放入的能量要大得多;若热源的溫度可视为不变,这种热源称之为恒温热源。

其中 dQ_T 为气体从温度为 T 的热源中吸收的热量, dW_T 为气体所作的功. 上式表明, 在等温过程中, 理想气体所吸收的热量全部用来对外作功. 气体对外所作的功等于图 6-7(b) $p-V$ 图上等温曲线下面的面积.

设理想气体在等温膨胀过程中, 其体积由 V_1 改变为 V_2 . 气体所作的功为

$$W_T = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

由理想气体物态方程 $pV = \frac{m}{M}RT$, 上式可写作为

$$W_T = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M}RT \frac{dV}{V}$$

由于在等温膨胀过程中 T 是常量, 所以

$$\begin{aligned} W_T &= \frac{m}{M}RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \\ &= \frac{m}{M}RT \ln \frac{V_2}{V_1} \end{aligned} \quad (6-11a)$$

因为 $p_1 V_1 = p_2 V_2$, 上式也可写成

$$W_T = \frac{m}{M}RT \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (6-11b)$$

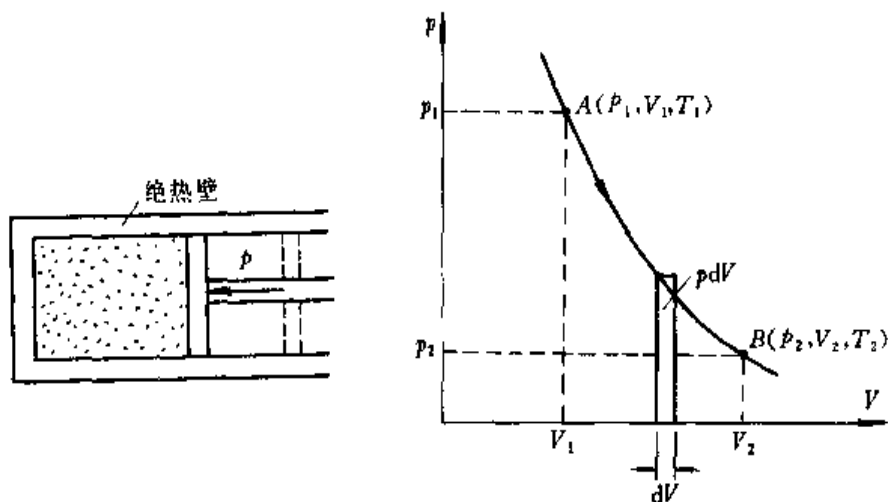
$$Q_T = W_T = \frac{m}{M}RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}RT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

上式表明, 在理想气体的等温过程中, 当气体膨胀 (即 $V_2 > V_1$) 时, W_T 和 Q_T 均取正值, 气体从恒温热源吸收的热量全部用于对外作功; 当气体被压缩 (即 $V_2 < V_1$) 时, W_T 和 Q_T 均取负值, 此时外界对气体所作的功, 全部以热量形式由气体传递给恒温热源.

二 绝热过程

绝热过程是热力学过程中一个十分重要的过程. 在气体的状态发生变化的过程中, 如果它与外界之间没有热量传递, 这种过程叫做绝热过程. 实际上, 绝对的绝热过程是没有的, 但在有些过程的进行中, 虽然系统与外界之间有热量传递, 但所传递的热量很小, 以致可忽略不计, 这种过程就可近似作为绝热过程. 可作为绝热过程的实例是很多的. 在工程上, 蒸汽机气缸中蒸汽的膨胀, 柴油机中受热气体的膨胀, 压缩机中空气的压缩等, 常常可近似地看作是绝热过程. 这些过程进行得很迅速, 在过程进行时只有很少的热量通过器壁进入或离开系统. 此外, 声波在空气中传播时, 空气的压缩和膨胀过程也可看作是绝热过程.

如图 6-9(a) 所示, 在一密闭气缸中贮有理想气体, 气缸壁、底部和活塞均



(a) 气体被绝热材料所包围

(b) 绝热过程中气体作的功

图 6-9 理想气体的绝热过程

由绝热材料制成，活塞与缸壁间的摩擦略去不计，绝热过程的特征是 $dQ = 0$ 。理想气体的绝热过程在 $p-V$ 图上的过程曲线，称绝热线，如图 6-9(b) 所示。

因为在绝热过程中 $dQ = 0$ ，故由热力学第一定律，有

$$0 = dE + dW_s$$

由于理想气体的内能仅是温度的函数，故由式(6-7)可得

$$0 = \frac{m}{M} C_{v,m} dT + p dV \quad (6-12)$$

已知理想气体物态方程为 $pV = \frac{m}{M} RT$ ，对它取微分，有

$$p dV + V dp = \frac{m}{M} R dT \quad (6-13)$$

由式(6-12)和式(6-13)可得

$$C_{v,m} p dV + C_{v,m} V dp = -R p dV$$

将 $R = C_{p,m} - C_{v,m}$ 及 $\gamma = C_{p,m}/C_{v,m}$ 代入上式，得

$$\gamma \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}$$

积分，有

$$\gamma \ln V + \ln p = \text{常量}$$

得

$$pV^\gamma = \text{常量} \quad (6-14a)$$

这就是理想气体绝热过程的 $p-V$ 函数关系。

将理想气体物态方程 $pV = \frac{m}{M} RT$ 代入上式，分别消去 p 或 V ，可得

$$V^{\gamma-1}T = \text{常量} \quad (6-14b)$$

$$p^{\frac{1}{\gamma-1}}T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \text{常量} \quad (6-14c)$$

式(6-14a)、式(6-14b)和式(6-14c)统称为理想气体的绝热过程方程,简称绝热方程。但式中各个常量是不相同的。

由式(6-12)可求得在有限过程中,理想气体绝热过程作的功为

$$W_a = \int p dV = -\frac{m}{M}C_v \int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{m}{M}C_{v,m}(T_2 - T_1) \quad (6-15)$$

从上式可以看出,如 $T_1 > T_2$ 则 $W_a > 0$, 气体绝热膨胀;如 $T_1 < T_2$, 则 $W_a < 0$, 气体被绝热压缩。气体在绝热压缩时温度升高,绝热膨胀时温度降低这两个结论,常在许多实际问题中用到。例如,用打气筒向轮胎打气时,筒壁会发热;压缩空气从喷嘴中急速喷出时,气体绝热膨胀,使气体变冷,甚至液化。

理想气体绝热做功的表达式也可以用物态参量 p 、 V 来表示。从理想气体物态方程有 $\frac{m}{M}T_1 = p_1 V_1 / R$ 和 $\frac{m}{M}T_2 = p_2 V_2 / R$, 将它们代入式(6-15),得

$$W_a = \frac{C_v}{R}(p_1 V_1 - p_2 V_2) \quad (6-16a)$$

利用 $R = C_p - C_v$ 和 $\gamma = C_p / C_v$, 上式也可以写成

$$W_a = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1} \quad (6-16b)$$

上式也可通过对 $dW_a = p dV$ 的积分,由式(6-14a)得到。读者可以自己推证。

三 绝热线和等温线

为了比较绝热线和等温线,我们按绝热方程

$$pV^\gamma = \text{常量}$$

和等温方程

$$pV = \text{常量}$$

在 $p-V$ 图上作这两过程的过程曲线,如图 6-10 所示。图中实线是绝热线,虚线是等温线。两线在图中的点 A 相交,显然绝热线比等温线要陡些。这是因为点 A 等温线的斜率为

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_T = -\frac{P_A}{V_A}$$

而点 A 绝热线的斜率为

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_a = -\gamma \frac{P_A}{V_A}$$

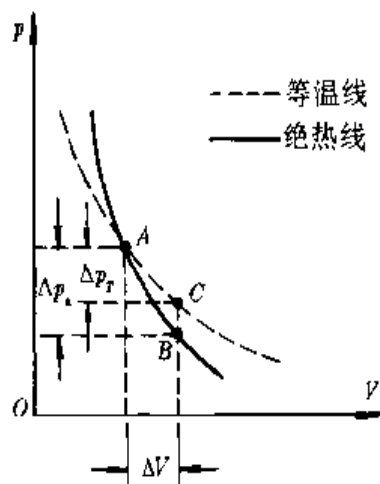


图 6-10 绝热线比等温线陡

因为 $\gamma > 1$, 所以, 绝热线比等温线要陡. 这一点可以解释如下: 处于某一状态的气体, 虽经等温过程或绝热过程膨胀相同的体积, 但在绝热过程中压强的降低 Δp_a 比在等温过程中压强的降低 Δp_T 要多. 这是因为在等温过程中, 压强的降低仅由气体密度的减小而引起, 而在绝热过程中, 压强的降低, 除气体密度减小这个因素外, 温度降低也是使压强降低的一个因素. 所以, 当气体膨胀相同体积时, 在绝热过程中压强的降低比在等温过程中的要多.

例 1 设有 5 mol 的氢气, 最初的压强为 1.013×10^5 Pa、温度为 20°C , 求在下列过程中, 把氢气压缩为原来体积的 $1/10$ 需要作的功: (1) 等温过程, (2) 绝热过程, (3) 经这两过程后, 气体的压强各为多少 (图 6-11)?

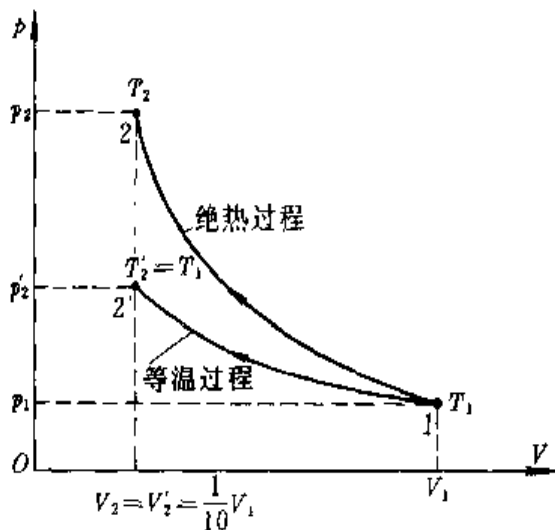


图 6-11

解 (1) 对等温过程, 由式(6-11a), 可得氢气由点 1 等温压缩到点 2' 作的功为

$$\begin{aligned} W_{12'} &= \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2'}{V_1} \\ &= 5 \times 8.31 \times 293 \ln \frac{1}{10} \text{ J} \\ &= -2.80 \times 10^4 \text{ J} \end{aligned}$$

式中负号表示外界对气体做功.

(2) 因为氢气是双原子气体, 由表 6-1 可知其 $\gamma = 1.41$. 所以对绝热过程, 由式(6-14b), 可求得点 2 的温度为

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 293 \times 10^{0.41} \text{ K} = 753 \text{ K}$$

因此由式(6-15), 氢气由点 1 绝热压缩到点 2 作的功为

$$W_{12} = -\frac{m}{M} C_{v,m} (T_2 - T_1)$$

由表 6-1 可查得, 氮的定体摩尔热容 $C_{V,m} = 20.44 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. 把已知数据代入上式, 得

$$W_{12} = -5 \times 20.44(753 - 293) \text{ J} = -4.70 \times 10^4 \text{ J}$$

式中负号表示外界对气体做功.

(3) 下面求点 2' 和点 2 的压强. 对等温过程, 有

$$p'_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V'_2} \right) = 1.013 \times 10^5 \times 10 \text{ Pa} = 1.013 \times 10^6 \text{ Pa}$$

对绝热过程, 有

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = 1.013 \times 10^5 \times 10^{1.40} \text{ Pa} = 2.55 \times 10^6 \text{ Pa}$$

例 2 氮气液化. 把氮气放在一个有活塞的由绝热壁包围的气缸中. 开始时, 氮气的压强有 50 个标准大气压, 温度为 300 K; 经急速膨胀后, 其压强降至 1 个标准大气压, 从而使氮气液化. 试问此时氮的温度为多少?

解 把氮气视为理想气体, 其液化过程可当作绝热过程. 由题意知, $p_1 = 50 \times 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$, $T_1 = 300 \text{ K}$, $p_2 = 1 \times 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$, 且氮气为双原子气体, 由表 6-1 可查得其 $\gamma = 1.40$. 所以按绝热方程式 (6-14c) 可得

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

将已知数据代入上式, 有

$$T_2 = 300 \left(\frac{1}{50} \right)^{(1.40-1)/1.40} \text{ K} = 300 \times 0.02^{0.286} \text{ K} = 98.0 \text{ K}$$

这个值只是大略的估计值. 因为在低温时氮气不能再视为理想气体, 而且把氮气的膨胀过程视为绝热过程也只是近似的.

例 3 水的汽化. 在一个有活塞的汽缸里放有一定量的水, 活塞与汽缸间的摩擦略去不计. 汽缸壁的材料是用良导热材料制成, 作用在活塞上的压强 p 维持为 $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$. 开始时, 活塞与水面相接触. 此时, 若使环境 (即热源) 的温度非常缓慢地升高到 100°C . 求把单位质量的水汽化为水蒸气, 水的内能改变了多少? 已知水的汽化热为 $L = 2.26 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$, 水的密度 $\rho_{\text{水}} = 1.040 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 水蒸气的密度 $\rho_{\text{蒸}} = 0.598 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

解 如图 6-12 所示, 在水吸收环境热量被汽化的过程中, 使质量为 m 的水汽化所需的热量为

$$Q = mL$$

L 为水的汽化热. 在水汽化为水蒸气的同时, 水蒸气推动活塞, 使活塞升高, 蒸汽的体积变大. 已知水和水蒸气的密度为 $\rho_{\text{水}}$ 和 $\rho_{\text{蒸}}$, 因此, 质量为 m 的水汽化为水蒸气后, 系统膨胀的体积为

$$\Delta V = m \left(\frac{1}{\rho_{\text{蒸}}} - \frac{1}{\rho_{\text{水}}} \right)$$

于是气体做功为

$$W = \int p dV = p \Delta V = pm \left(\frac{1}{\rho_{\text{蒸}}} - \frac{1}{\rho_{\text{水}}} \right)$$

由热力学第一定律可知, 质量为 m 的水, 在汽化过程中内能的改变为

$$\Delta E - Q - W - mL - pm \left(\frac{1}{\rho_{\#}} - \frac{1}{\rho_{*}} \right)$$

$$\text{即} \quad \frac{\Delta E}{m} = L - p \left(\frac{1}{\rho_{\#}} - \frac{1}{\rho_{*}} \right)$$

把已知数据代入,得

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{m} &= 2.26 \times 10^6 \text{ J} - 1.013 \times 10^5 \left(\frac{1}{0.598} - \frac{1}{1040} \right) \text{ J} \\ &= 2.09 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \end{aligned}$$

上述结果表明,在标准大气压和 100°C 的情况下,1 kg 水从热源中吸收 $2.26 \times 10^6 \text{ J}$ 的热量,只有 $2.09 \times 10^6 \text{ J}$ 转变为蒸汽的内能,余下的 $0.17 \times 10^6 \text{ J}$ 的能量对活塞作了功。

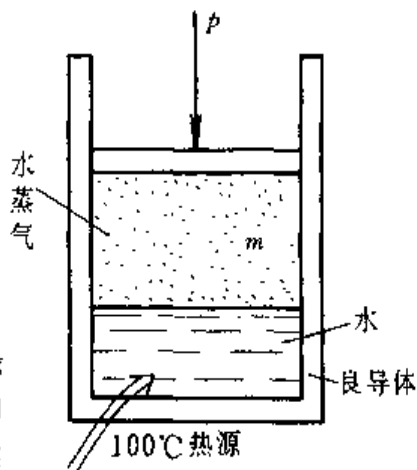


图 6-12

* 四 多方过程

前面曾经说过,理想气体的等压、等体、等温三个等值过程,以及绝热过程都是理想的过程,实际上它们都是较难实现的,实际过程往往与这四个理想过程有所偏离,并不像这四个过程方程那样单纯。

我们设想把绝热过程方程 $pV^\gamma = C$ 推广为下面这样一个方程

$$pV^n = C \quad (6-17a)$$

其中 n 等于任意实数,这个方程称作理想气体多方过程方程, n 称为多方指数,由式(6-17a)可以看出:

- (1) 当 $n = \gamma$ ($\gamma = C_{p,m}/C_{v,m}$) 时,式(6-17a)为理想气体绝热方程 $pV^\gamma = C_1$;
- (2) 当 $n = 1$ 时,式(6-17a)为理想气体等温方程 $pV = C_2$;
- (3) 当 $n = 0$ 时,式(6-17a)为 $pV^0 = p = C_3$,是等压过程;
- (4) 如把式(6-17a)写成

$$p^{1/n} V = C'$$

则当 $n = \infty$ 时,有 $V = C_4$,这就是理想气体的等体过程。

把上述四种情况用图 6-13 表示出来,从图上可以看出,过点 A 可作四条理想过程曲线,因此可以说理想气体的多方过程方程是理想气体的等值过程和绝热过程方程的综合和推广。实际上多方指数 n 可取任意实数,它随具体过程而异,须由实验测定,多方过程在化学工业、热力工程和喷气发动机等工程技术中有广泛的应用,因为在这些领域中的热力学过程是多种多样的,不能都视为等值过程和绝热过程。

与理想气体的绝热过程方程相似,理想气体的多方过程方程除具有式(6-17a)的形式外,还可写成

$$TV^{n-1} = C \quad (6-17b)$$

$$p^{1/n} T^{-1/n} = C \quad (6-17c)$$

与式(6-16b)相似,理想气体在多方过程中作的功为

$$W_s = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{n-1}$$

而在多方过程中内能的增量仍为

$$\Delta E = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1)$$

这是因为理想气体内能的改变仅与其始末状态有关,与过程无关的缘故,而在多方过程中吸收热量则为

$$Q = \frac{m}{M} C_n (T_2 - T_1)$$

式中 C_n 为理想气体多方摩尔热容,至于理想气体的 C_n 与 C_V 的关系^①可算得为

$$C_n = \left(\frac{n-\gamma}{n-1} \right) C_V$$

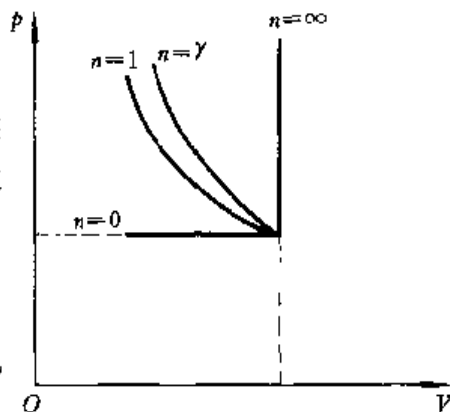


图 6-13 用多方指数表示的多方过程

6-6 循环过程 卡诺循环

一 循环过程

在生产技术上需要将热与功之间的转换持续地进行下去,这就需要利用循环过程.系统经过一系列状态变化过程以后,又回到原来状态的过程叫做热力学循环过程,简称循环.

现考虑以气体为工作物质的循环过程.如图 6-14 所示,设气体吸收热量推动气缸的活塞而膨胀,经准静态过程从状态 A 到状态 B,在此膨胀过程中,气体所作的功为 W_{AB} .若使气体从状态 B 沿原来的路径压缩到状态 A,则气体所作的功为 $W_{BA} = -W_{AB}$.对于上述从状态 A 出发又回到状态 A 的过程,也为一个循环过程.但是在这个循环过程中,系统所作的净功为零,即 $W_{AB} + W_{BA} = 0$.

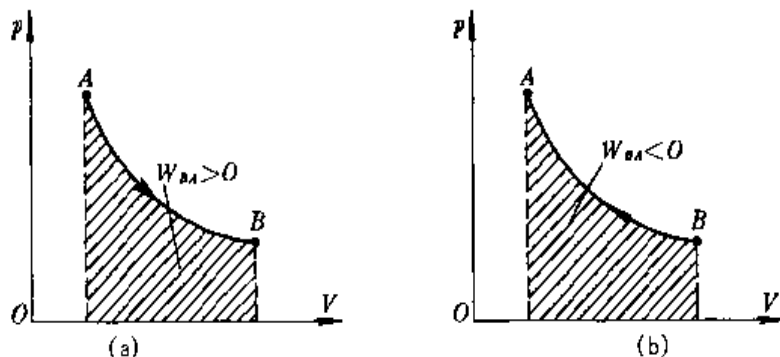


图 6-14 压缩过程及重复膨胀过程

^① 关于 C_n 与 C_V 的关系可参阅秦允豪编《热学》(高等教育出版社,1999 年版).

若气体在压缩过程中所经过的路径,与在膨胀过程中所经过的路径不重复,如图 6-15(a)所示,那么,气体经历这样一个循环后就要做净功. 在图 6-15(b)中,设有一定量的气体,先由起始状态 $A(p_A, V_A, T_A)$ 在较高温度的条件下,沿过程 AaB 吸收热量而膨胀到状态 $B(p_B, V_B, T_B)$,在此过程中,气体对外所作的功 W_a 等于 A 、 B 两点间过程曲线 AaB 下面的面积. 然后再将气体由状态 B 在较低温度的条件下,沿过程 BbA 放出热量并压缩到起始状态 A (图 6-15c). 在压缩过程中,外界对气体所作的功 W_b 等于 A 、 B 两点间过程曲线 BbA 下面的面积. 按照图中所选定的过程, W_b 的值小于 W_a 的值. 所以气体经历一个循环以后,既从高温热源吸热,又向低温热源放热并作功,而对外所作的净功 W 应是 W_a 与 W_b 之差^①,即

$$W = W_a - W_b$$

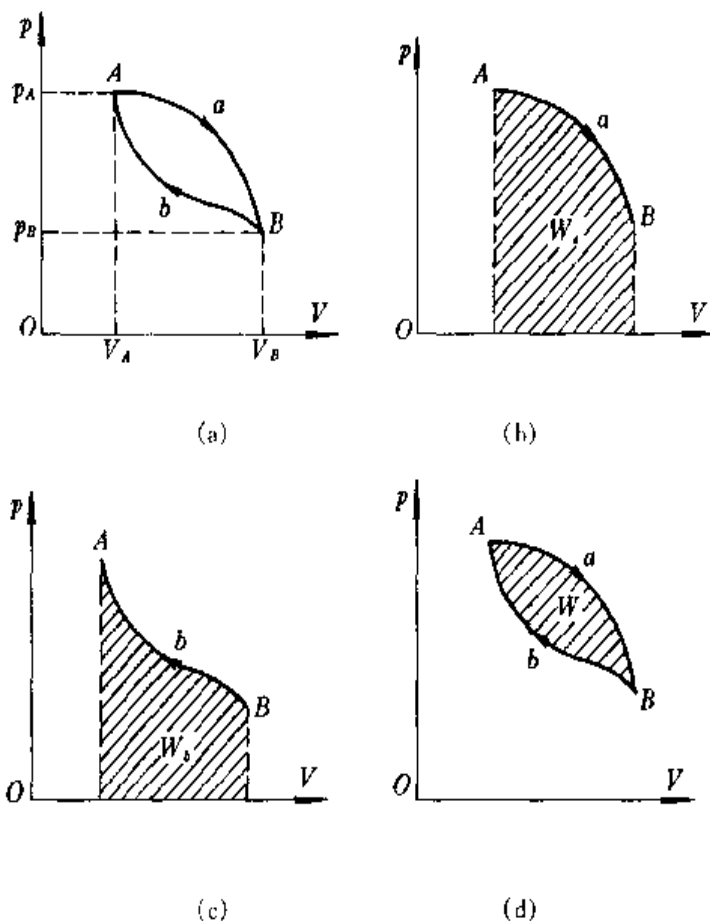


图 6-15 循环过程所作的功

① 在第 6-3 节中讲述热力学第一定律时,对 $Q = E_2 - E_1 + W$ 中的热量 Q 和功 W 曾规定:系统吸热时 Q 为正值,放热时 Q 为负值,系统对外做功时 W 为正值,外界对系统做功时 W 为负值. 但自本节起,为书写方便, Q 与 W 均为绝对值,因此系统吸热为 $+Q$,放热为 $-Q$,系统对外做功为 $+W$,外界对系统做功为 $-W$. 请读者予以注意.

显然,在 $p-V$ 图上, W 是由 AaB 和 BbA 两个过程组成的循环所包围的面积[图 6-15(d)], 应当指出, 在任何一个循环过程中, 系统所作的净功都等于 $p-V$ 图上所示循环所包围的面积。

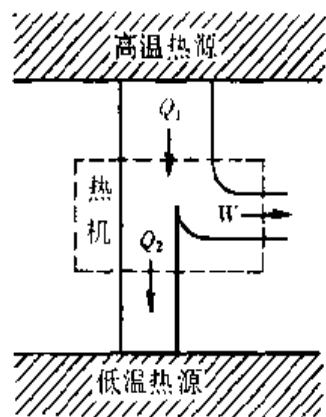
因为内能是系统状态的单值函数, 所以系统经历一个循环过程之后, 它的内能没有改变。这是循环过程的重要特征。

二 热机和致冷机

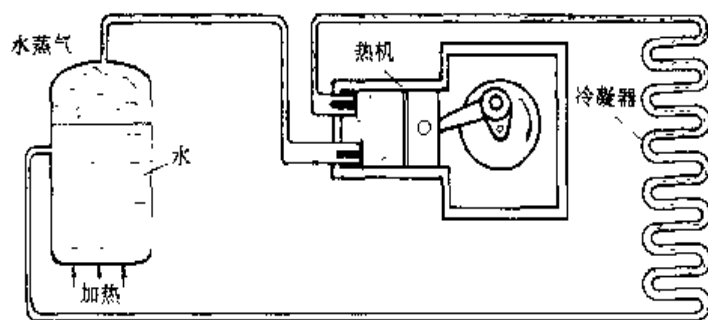
按过程进行的方向可把循环过程分为两类。在 $p-V$ 图上按顺时针方向进行的循环过程叫做正循环, 图 6-15(d) 就是一个正循环; 在 $p-V$ 图上按逆时针方向进行的循环过程叫做逆循环。工作物质作正循环的机器叫做热机(如蒸汽机、内燃机), 它是把热量持续地转变为功的机器。工作物质作逆循环的机器叫做致冷机(也叫热泵)^①, 它是利用外界做功使热量由低温处流入高温处, 从而获得低温的机器。

如图 6-16(a) 所示, 一热机经过一个正循环后, 由于它的内能不变化, 因此, 它从高温热源吸收的热量 Q_1 , 一部分用于对外做功 W , 另一部分则向低温热源放热, Q_2 为向低温热源放出的热量的值。这就是说, 在热机经历一个正循环后, 吸收的热量 Q_1 不能全部转变为功, 转变为功的只是 $Q_1 - Q_2 = W$ 。通常把

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (6-18)$$



(a) 热机的示意图



(b) 蒸汽机的示意图

图 6-16

^① 关于热泵较具体的介绍和利用致冷机在制冰过程中所耗费功的计算, 可分别参阅马文蔚等主编《物理学原理在工程技术中的应用》中的“热泵”和“能制多少冰”(高等教育出版社出版)。

叫做热机效率或循环效率。第一部实用的热机是蒸汽机^①〔图 6-16(b)〕,创制于 17 世纪末,用于煤矿中抽水。目前蒸汽机主要用于发电厂中。热机除蒸汽机外,还有内燃机、喷气机等^②。虽然它们在工作方式、效率上各不相同,但工作原理却基本相同,都是不断地把热量转变为功。下面给出了几种装置的热效率:

液体燃料火箭	$\eta = 0.48$
燃气轮机	$\eta = 0.46$
柴油机	$\eta \approx 0.37$
汽油机	$\eta = 0.25$
蒸汽机车	$\eta = 0.08$
热电偶	$\eta \approx 0.07$

图 6-17 是一个表示致冷机的示意图,它从低温热源吸取热量而膨胀,并在压缩过程中,把热量放出给高温热源。为实现这一点,外界必须对致冷机做功。图中 Q_2 为致冷机从低温热源吸收的热量, W 为外界对它作的功, Q_1 为它放出给高温热源热量的值。于是当致冷机完成一个逆循环后有 $-W = Q_2 - Q_1$, 即 $W = Q_1 - Q_2$ 。这就是说,致冷机经历一个逆循环后,由于外界对它做功,可把热量由低温热源传递到高温热源。外界不断做功,就能不断地从低温热源吸取热量,传递到高温热源。这就是致冷机的工作原理。通常把

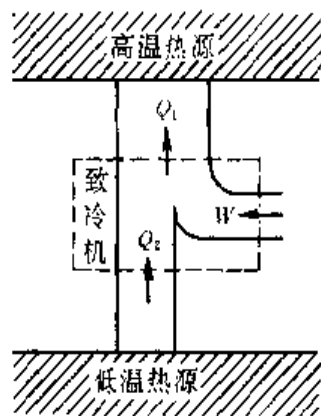


图 6-17 致冷机的示意图

$$e = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \quad (6-19)$$

叫做致冷机的致冷系数。

例 1 1 mol 氦气经过如图 6-18 所示的循环,其中 $p_2 = 2p_1$, $V_2 = 2V_1$,求在 1-2、2-3、3-4、4-1 等过程中气体吸收的热量和循环的效率。

解 气体经过循环作的净功 W 为图中 1-2-3-4-1 线所包围的面积,即 $(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$,而由于 $p_2 = 2p_1$, $V_2 = 2V_1$,故

① 有些出版物误传蒸汽机是瓦特发明的,其实不是。蒸汽机是英国人萨维利(Savery)于 1698 年、纽可门(Newcomen)于 1705 年各自独立发明的,用于矿井抽水,当时效率很低。1765 年,瓦特(J. Watt, 1736—1819,英国人)在修理纽可门机的基础上,对蒸汽机作了重大改进,使冷凝器与汽缸分离,发明曲轴和齿轮传动以及离心调速器等,使蒸汽机实现了现代化,大大地提高了蒸汽机效率。瓦特的这些发明,仍使用在现代蒸汽机中。为纪念瓦特的贡献,功率的单位名称以其姓氏命名。

② 长期以来,人们都在寻求提高热机效率的方法,这方面的内容可参阅马文蔚等主编《物理学原理在工程技术中的应用》之“提高热机效率的两种方法”(高等教育出版社出版)。

$$W = p_1 V_1$$

利用理想气体物态方程 $pV = \frac{m}{M}RT$, 因为 $\frac{m}{M} = 1$, 所以上式

$$W = RT_1$$

式中 T_1 为点 1 的温度, 从图中可见, $p_2 = 2p_1$, $V_2 = V_1$; $p_3 = 2p_1$, $V_3 = 2V_1$; $p_4 = p_1$, $V_4 = 2V_1$, 所以, 由理想气体物态方程可以分别求得 2、3、4 点的温度为

$$T_2 = 2T_1, \quad T_3 = 4T_1, \quad T_4 = 2T_1$$

由上可见, 在等体过程 1-2 及等压过程 2-3 中氮气分别吸热 Q_{12} 和 Q_{23} ; 在等体过程 3-4 及等压过程 4-1 中分别放热 Q_{34} 和 Q_{41} . 由式(6-9c)和式(6-6c), 可得

$$Q_{12} = C_V(T_2 - T_1) = C_V T_1$$

$$Q_{23} = C_p(T_3 - T_2) = 2C_p T_1$$

$$Q_{34} = C_V(T_4 - T_3) = -2C_V T_1$$

$$Q_{41} = C_p(T_1 - T_4) = -C_p T_1$$

所以氮气经历一个循环吸收的热量之和为

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = C_V T_1 + 2C_p T_1$$

由于 $C_{p,m} = C_{V,m} + R$, 故有

$$Q_1 = C_{V,m} T_1 + 2(C_{V,m} + R) T_1 = T_1 (3C_{V,m} + 2R)$$

氮气在此循环中放出的热量之和, 则为

$$Q_2 = |Q_{34}| + |Q_{41}| = 2C_{V,m} T_1 + C_{p,m} T_1 = T_1 (3C_{V,m} + R)$$

式中 Q_2 是绝对值, 此循环的效率为

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{W}{Q_1} = \frac{RT_1}{T_1 (3C_{V,m} + 2R)} \\ &= \frac{R}{3C_{V,m} + 2R} \end{aligned}$$

由表 6-1 知氮气的定体摩尔热容 $C_{V,m} = 12.52 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, 而摩尔气体常量 $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, 所以有

$$\eta = \frac{8.31}{3 \times 12.52 + 2 \times 8.31} = 15.3\%$$

若以此循环作为热机, 其效率为 15.3%.

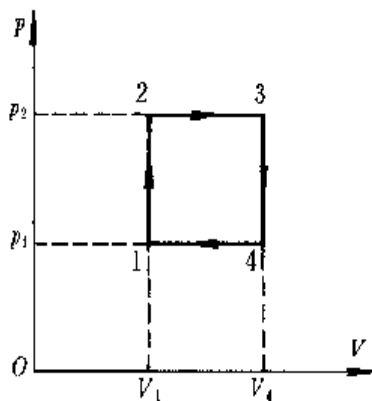


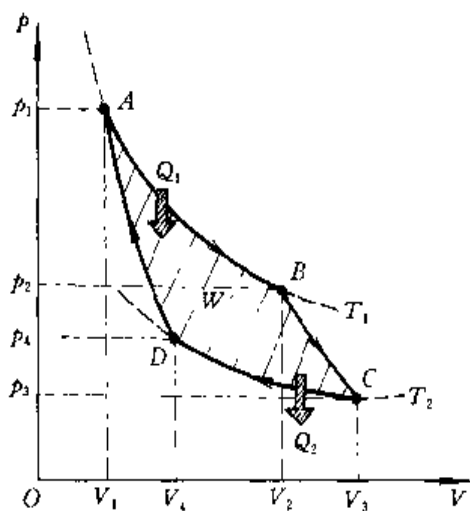
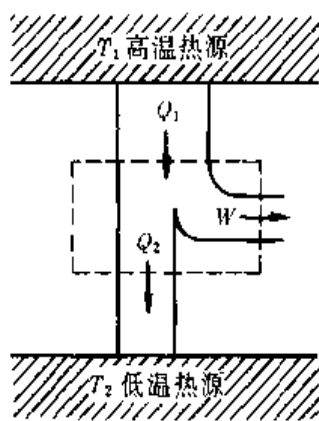
图 6-18

三 卡诺循环

由于瓦特改进了蒸汽机, 使热机的效率大为提高, 人们迫切要求进一步提高热机的效率. 那么, 提高热机效率的主要方向在哪里呢? 提高热机效率有没有极限呢? 为此, 法国的年青工程师卡诺(S. Carnot, 1796—1832)于 1824 年提出一个工作在两热源之间的理想循环——卡诺循环, 找到了在两个给定热源温度

的条件下,热机效率的理论极限值;他还提出了著名的卡诺定理。这里先介绍卡诺循环,下一节再讲述卡诺定理。

卡诺循环是由四个准静态过程所组成的,其中有两个是等温过程,两个是绝热过程。卡诺循环对工作物质是没有规定的,为方便讨论,我们以理想气体为工作物质。如图 6-19(a)所示,曲线 AB 和 CD 分别是温度为 T_1 和 T_2 的两等温线,曲线 BC 和 DA 分别是两条绝热线。如工作物质理想气体从点 A 出发,按顺时针方向沿封闭曲线 ABCDA 进行,这种正循环为卡诺正循环,又称卡诺热机。

(a) $p-V$ 图

(b) 1. 作示意图

图 6-19 卡诺正循环——热机

在经历一个循环后,理想气体又回到原先的状态,其内能不变,但要对外做功,并与两热源间有能量传递。由热力学第一定律可求得在四个过程中,气体的内能、对外做功和传递热量间关系如下:

(1) 在 AB 的等温膨胀过程中,气体的内能没有改变,而气体对外作的功 W_1 , 等于气体从温度为 T_1 的高温热源中吸收的热量 Q_1 , 即

$$W_1 = Q_1 = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (6-20)$$

(2) 在 BC 的绝热膨胀过程中,气体不吸收热量,对外作的功 W_2 等于气体所减少的内能,即

$$W_2 = -\Delta E = E_B - E_C = \frac{m}{M} C_{v,m} (T_1 - T_2)$$

(3) 在 CD 的等温压缩过程中,外界对气体作的功 ($-W_3$), 等于气体向温度为 T_2 的低温热源放出的热量 ($-Q_2$), 即

$$-W_3 = -Q_2 = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}$$

$$\text{有} \quad Q_2 = \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \quad (6-21)$$

(4) 在 DA 的绝热压缩过程中, 气体不吸收热量, 外界对气体作的功 ($-W_4$), 用于增加气体的内能, 即

$$-W_4 = \Delta E = E_A - E_D = \frac{m}{M} C_{V,m} (T_1 - T_2)$$

由以上四式可得理想气体经历一个卡诺循环后所作的净功为

$$W = W_1 + W_2 - W_3 - W_4 = Q_1 - Q_2$$

从图 6-19(a) 可以看出, 这个净功 W 就是图中循环所包围的面积. 由热机效率公式 (6-18), 可得卡诺热机的效率为

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (6-22a)$$

由理想气体绝热方程 $TV^{\gamma-1} = \text{常量}$, 可得

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$$

和

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}$$

上两式相除, 有

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

把它们代入式 (6-20) 和式 (6-21), 化简后有

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

把它代入式 (6-22a), 得以理想气体为工作物质的卡诺热机效率为

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (6-22b)$$

从上式可以看出: 要完成一次卡诺循环必须有高温和低温两个热源; 卡诺热机的效率与工作物质无关, 只与两个热源的温度有关, 高温热源的温度越高, 低温热源的温度越低, 则卡诺循环的效率越高.

下面讨论图 6-20(a) 所示的由两个绝热过程和两个等温过程组成的卡诺逆循环, 即卡诺致冷机. 图中 BA 和 DC 是等温线, AD 和 CB 是绝热线. 设工作物质仍为理想气体, 它从温度为 T_1 的点 A 绝热膨胀到点 D, 在此过程中, 气体的温度逐渐降低, 在点 D 时气体的温度为 T_2 . 接着, 气体等温膨胀到点 C, 它从低温热源中吸收热量 Q_2 . 然后, 气体被绝热压缩到点 B, 由于外界对气体做功, 使它的温度上升到 T_1 . 最后, 气体被等温压缩到点 A, 使气体回到起始的状态, 在此过程中它把热量 Q_1 传递给高温热源.

由于 $Q_1/T_1 = Q_2/T_2$, 由致冷系数的表达式 (6-19) 可得卡诺致冷机的致

冷系数 e 为

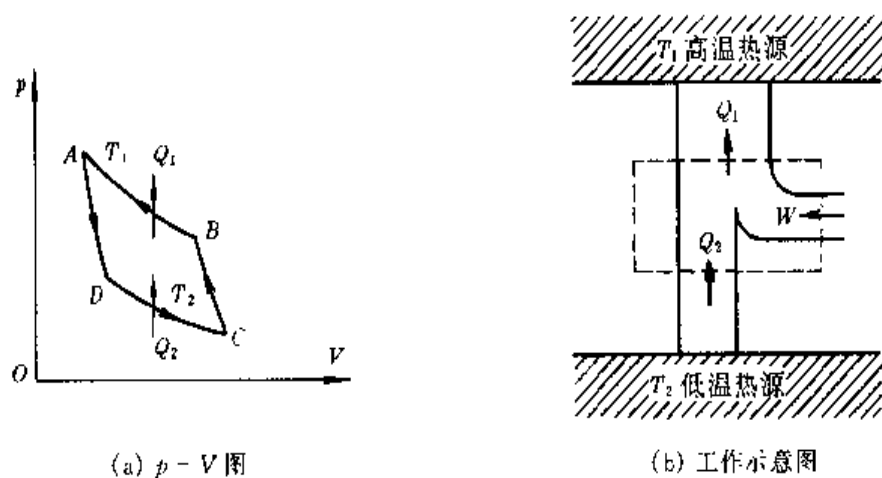


图 6-20 卡诺逆循环——致冷机

$$e = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

例 2 有一台电冰箱放在室温为 20°C 的房间里, 冰箱储物柜内的温度维持在 5°C . 现每天有 $2.0 \times 10^7 \text{ J}$ 的热量自房间通过热传导方式传入电冰箱内. 若要使电冰箱内保持 5°C 的温度, 外界每天需作多少功, 其功率为多少? 设在 5°C 和 20°C 之间运转的致冷机(电冰箱)的致冷系数, 是卡诺致冷机的致冷系数的 55%.

解 设 e 为致冷机的致冷系数, e_k 为卡诺致冷机的致冷系数, 而卡诺致冷机的致冷系数 $e_k = T_2 / (T_1 - T_2)$, 其中 $T_2 = 5^\circ\text{C} = 278 \text{ K}$, $T_1 = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$. 于是, 有

$$e = e_k \cdot \frac{55}{100} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \times \frac{55}{100} = \frac{278}{293 - 278} \times \frac{55}{100} = 10.2$$

又由致冷机的致冷系数的定义式

$$e = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

Q_2 为致冷机从低温热源(储物柜)吸收的热量, Q_1 为传递给高温热源(大气等)的热量. 由上式可得

$$Q_1 = \frac{e+1}{e} Q_2 \quad (1)$$

设 Q' 为自房间传入电冰箱内的热量, 其值为 $2.0 \times 10^7 \text{ J}$. 在热平衡时, $Q_2 = Q'$, 于是, 上式为

$$Q_1 = \frac{e+1}{e} Q'$$

把已知数据代入, 有

$$Q_1 = \frac{10.2+1}{10.2} 2.0 \times 10^7 \text{ J} = 2.2 \times 10^7 \text{ J}$$

所以, 为保持电冰箱在 5°C 和 20°C 之间运转, 每天须作的功为

$$W = Q_1 - Q_2 = Q_1 - Q' = (2.2 - 2.0) \times 10^7 \text{ J} = 0.2 \times 10^7 \text{ J}$$

功率为

$$P = \frac{W}{t} = \frac{0.2 \times 10^7}{24 \times 3600} \text{ W} = 23 \text{ W}$$

6-7 热力学第二定律的表述 卡诺定理

在 19 世纪初期,蒸汽机已在工业、航海等部门得到了广泛的使用,并随着技术水平的提高,蒸汽机的效率也有所增加。但提高热机效率有没有限制呢?能否制造这样一种热机,它可从单一热源吸取的热量完全用来作功呢?能否制造这样一种致冷机,它可以不需要外界对系统作功,就能使热量从低温物体传递给高温物体呢?这些问题都是当时在理论上急需解决的问题,但这些问题又不能由热力学第一定律来解决。此外,人们还发现在自然界中不是所有符合热力学第一定律的过程都能发生(如混合后的气体不能自动地分离)。这表明,自然界自动进行的过程是有方向性的。为此人们在实践的基础上总结出了一条新的定律,即热力学第二定律。

一 热力学第二定律的两种表述

历史上曾有人企图制造这样一种循环工作的热机,它只从单一热源吸收热量,并将吸收的热量全部用来作功而不放出热量给低温热源,因而它的效率 η 可达 100%。这也就是说,利用从单一热源吸收的热量可以使循环工作的机器作功,而不使外界发生任何变化。假如这种机器制造成功,那就可以从单一热源(如大气或海洋)中吸收热量,并把它全部用来作功。这种热机叫做第二类永动机。第二类永动机并不违反热力学第一定律,即不违反能量守恒定律,因而对人们更具有诱惑性。曾有人作过估计,要是用这样的热机来吸收海水中的热量而作功,则只要使海水的温度下降 0.01 K,就能使全世界的机器开动许多年。然而人们经过长期的实践认识到,第二类永动机是不可能实现的,并得出了如下的结论:不可能制造出这样一种循环工作的热机,它只使单一热源冷却来作功,而不放出热量给其他物体,或者说不使外界发生任何变化。这个规律就是热力学第二定律的开尔文说法。大家记得,前面曾提醒过不要重犯企图制造第一类永动机的错误;现在更要强调一下,第二类永动机最易引人上当之处,在于人们往往忘记热力学第二定律的告诫,误以为凡是遵守能量守恒的过程就一定能够实现。我们要牢记:热力学这两条定律都是不容违背的。

应当指出,热力学第二定律的开尔文说法指的是循环工作的热机。如果工作物质进行的不是循环过程,而是像等温膨胀这样的过程,那是可以把从一个热源吸收的热量全部用来作功的。但是,单一的等温膨胀过程并不是循环动作的。

机器,要用它来持续做功是不现实的。

此外,我们还有这样的经验,如果在一个与外界之间没有能量传递的孤立系统^①中,有一个温度为 T_1 的高温物体和一个温度为 T_2 的低温物体,那么,经过一段时间后,整个系统将达到温度为 T 的热平衡状态。这说明在一孤立系统内,热量是由高温物体向低温物体传递的。我们也有这样的经验,就是从没见过在一孤立系统中低温物体的温度会越来越低,高温物体的温度会越来越高,即热量能自动地由低温物体向高温物体传递。显然,这一过程也并不违反热力学第一定律,但在实践中确实无法实现。要使热量由低温物体传递到高温物体(如致冷机),只有依靠外界对它做功才能实现。人们总结出如下结论:不可能把热量从低温物体自动传到高温物体而不引起外界的变化。这就是热力学第二定律的克劳修斯说法。

应当指出,和热力学第一定律一样,热力学第二定律不能从更普遍的定律推导出来,它是大量实验和经验的总结,虽然我们不能直接去验证它的正确性,但从它所得出的推论与客观实际相符而得到肯定。热力学第二定律除开尔文说法和克劳修斯说法外还有其他一些说法,就不一一列举了。上面介绍的热力学第二定律的克劳修斯说法和开尔文说法表明,在自然界中,热量的传递和热功间的转变都是有方向性的。这个方向性就是:在一孤立系统中,热量只能自动地从高温物体传递给低温物体,而不能相反进行;在一循环过程中,功能转变为热,而热不能全部转变为功。自然界中还有不少过程反映出过程的进行是具有方向性的。例如两种气体混合时,只能逐渐趋于均匀分布,而不能自动地相反进行,等等。

热力学第二定律的开尔文说法和克劳修斯说法,虽然说法不同,但它们是等效的,即一个说法是正确的,另一个说法也必然是正确的;如一个说法不成立,另一个说法也必然不成立。下面我们用反证法证明它们的等效性,即证明如果克劳修斯说法不成立,那么开尔文说法也不成立。如图 6-21 所示,在温度为 T_1 的高温热源和温度为 T_2 的低温热源之间有一热机。若违反克劳修斯说法,热量 Q_2 由低温热源自动地传递给高温热源。那么,我们可以用另一遵从开尔文说法的热机从高温热源吸收热量 Q_1 ,对外做功 W ,并把热量 Q_2 传递给低温热源。因而当这一过程完成时,低温热源放出和吸收的热量是相等的,即没有净放出热量;高温热源放出的热量大于吸收的热量,即净放出的热量为 $Q_1 - Q_2$;而热机对外所做的功为 $W = Q_1 - Q_2$,高温热源放出的热量全部用来对外做功。也就是说,单一热源所放出的热量全部用来对外做功。这显然是违反开尔文说法的。所以,违反克劳修斯说法的系统,必然违反开尔文说法。反之,也可以证明违反开尔文说法,也必然违反克劳修斯说法。这就是热力学第二定律两种说法的等效性。

^① 孤立系统也可以称作不受外界影响的系统。

二 可逆过程与不可逆过程

由上面关于热力学第二定律的克劳修斯说法已经知道,高温物体能自动地把热量传递给低温物体,而低温物体不可能自动地把热量传递给高温物体.如果我们把热量由高温物体传递给低温物体作为正过程,而把热量由低温物体传递给高温物体作为逆过程,很显然,逆过程是不能自动地进行.也就是说,如要把热量由低温物体传递给高温物体,非要由外界对它作功不可,而由于外界作功的结果,外界的环境(如能量损耗等)就要发生变化.所以,在外界环境不发生变化的情况下,热量的传递过程是不可逆的.

上面关于过程的不可逆性是从分析高、低温物体之间传递热量得出的.事实上热功之间的转换也具有不可逆性.例如摩擦作功可以把功全部转化为热量,而热量却不能在不起其他变化的情况下全部转化为功.如果我们把功转化为热作为正过程,热转化为功作为逆过程,那么在不引起其他变化的情况下,热功之间的转换也是不可逆的.

在自然界中,有关热力学过程的可逆性和不可逆性的讨论是很多的,必须给予确切的理解.可逆过程和不可逆过程的定义如下:在系统状态变化过程中,如果逆过程能重复正过程的每一状态,而且不引起其他变化,这样的过程叫做可逆过程;反之,在不引起其他变化的条件下,不能使逆过程重复正过程的每一状态,或者虽然重复但必然会引起其他变化,这样的过程都叫做不可逆过程.

实现可逆过程的条件是什么呢?只有当系统的状态变化过程是无限缓慢进行的准静态过程,而且在过程进行之中没有能量耗散效应,这时系统所经历的过程才是可逆过程;否则,就是不可逆过程.下面举例说明.

设气缸中有理想气体,当气缸中的活塞无限缓慢地运动时,气体在任意时刻的状态近似地处于平衡态,故而气体状态变化的过程可看成是准静态过程.这时,如果能略去活塞与气缸壁间的摩擦力、气体间的粘滞力等所引起的能量耗散效应,那么,不仅气体的正逆两过程经历了相同的平衡态,正逆过程都是准静态过程,而且由于没有能量耗散效应,在正逆两过程终了时,外界环境也不发生任何变化.总之,当活塞无限缓慢地运动,致使气体的状态变化过程可视为准静态过程,系统又无能量耗散效应时,气体的状态变化过程才为可逆过程.

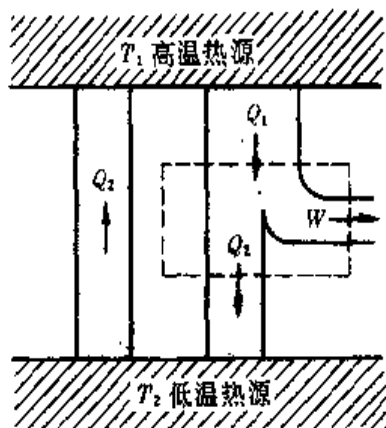


图 6-21 热力学第二定律两种说法等效性的证明

然而,活塞与气缸间总有摩擦,摩擦力作功的结果要向外界放出热量,从而使外界的温度

度有所升高,使外界的状态发生变化.所以有摩擦的过程是不可逆过程.此外,实际上活塞的运动不可能无限缓慢,在正、逆过程中,不仅气体的状态不能重复,而且也不能实现准静态过程.在这种情况下过程是不可逆过程.

综上所述,要使逆过程能重复正过程的所有状态,且又不发生其他变化,其条件是:(1)过程要无限缓慢地进行,即属于准静态过程;(2)没有摩擦力、粘滞力或其他耗散力作功,能量耗散效应可略去不计.同时符合这两个条件的过程为可逆过程,不符合其中任意一个条件的过程为不可逆过程.

不可逆过程在自然界中是普遍存在的,而可逆过程则是理想的,是实际过程的近似.本章所讨论的热力学过程除特别指明外,都是视为可逆过程的.

在自然界中不可逆过程的例子是很多的.除前面讲过的热功转换、热传导外,像气体的扩散、水的汽化、固体的升华等都是不可逆过程.生命科学里的生长与衰老也都是不可逆过程.为加深对可逆过程和不可逆过程的理解,下面我们再举气体扩散的例子.

如图 6-22 所示,由绝热壁包围的容器中有一隔板,把容器分成 A、B 两部分,其中 A 有气体, B 为真空.把隔板抽开后,气体由 A 向真空室 B 扩散.最后,两部分都达到平衡态.这个过程,我们是可观察到的.但是,上述过程的逆过程却无法自动实现,我们从未观察到 B 中的气体,在没有外界作用的情况下,能自动回到 A 中去,恢复隔板抽开前的状况.显然,气体的扩散是一个不可逆过程.在日常生活

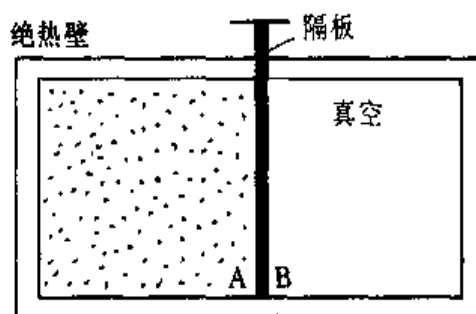


图 6-22 气体的扩散是一个不可逆过程

中,与此类似的例子可以经常见到.例如,在一个小房间里打开香水瓶盖子,不久,我们可以觉察到香气弥漫于整个房间,但我们不会觉察到香气分子能自动地跑回到香水瓶中去.香气的扩散过程也是不可逆过程.

通过对可逆过程和不可逆过程的讨论,我们对热力学第二定律有了进一步的理解.热力学第二定律与热力学第一定律一样都是热力学的基本定律,而热力学第二定律指明,一切涉及热现象的过程不仅必须满足能量守恒,并且具有方向性和局限性,即指出了自然界的自发过程都是不可逆过程.下一节将引入一个新的状态函数——熵,并在此基础上给出熵增加原理,从而进一步对热力学过程的方向性作出定量表述.

三 卡诺定理

卡诺提出在温度为 T_1 的热源和温度为 T_2 的热源之间工作的循环动作的机器, 必须遵守以下两条结论, 即卡诺定理。

1 在相同的高温热源和低温热源之间工作的任意工作物质的可逆机, 都具有相同的效率。

2 工作在相同的高温热源和低温热源之间的一切不可逆机的效率都不可能大于可逆机的效率。

如果我们在可逆机中取一个以理想气体为工作物质的卡诺机, 那么由卡诺定理 1 可得

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (6-23)$$

同样, 如以 η' 代表不可逆机的效率, 则由卡诺定理 2 有

$$\eta' \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (6-24)$$

式中“=”适用于可逆机, 而“<”适用不可逆机。

卡诺定理的证明:

(1) 先证明卡诺定理 1 的内容。

设有两个可逆机 A 和 B, 它们工作在温度为 T_1 和 T_2 的两个热源之间。我们假定 A 和 B 的效率不相等, 即 $\eta_A \neq \eta_B$, 但每个机器经一个循环所作的机械功相等, 即

$$W_A = W_B$$

现在令 B 为热机, 由它输出功来推动致冷机 A, 它们的能量流动关系如图 6-23 所示。

首先我们假定 B 机的效率大于 A 机的效率, 即 $\eta_B > \eta_A$ 。当 B 机推动 A 机工作时, 其工作情况如下: B 机从高温热源吸收热量 Q_1 , 对外作功 W , 并向低温热源放出热量 Q_2 ; 而 A 机获得功 $W' = W$, 从低温热源取得热量 Q'_2 , 把热量 Q'_1 放入高温热源中去。由于两机皆是可逆机, 可得 A 机作为热机工作时, 其效率为

$$\eta_A = \frac{W'}{Q'_1}$$

B 机的效率为

$$\eta_B = \frac{W}{Q_1}$$

由于假定 $\eta_B > \eta_A$, $W' = W$, 故有

$$\frac{W}{Q_1} > \frac{W}{Q'_1}$$

得

$$Q'_1 > Q_1$$

这表明, 传递给高温热源的热量比从高温热源中取出的热量要多。而由 $W' = W$, 有 $Q'_1 -$

$Q'_2 = Q_1 - Q_2$, 可得

$$Q'_2 > Q_2$$

这表明, 从低温热源取出的热量比传递给低温热源的热量要多, 但从高温热源得到的热量 $Q'_1 - Q_1$ 与从低温热源取出的热量 $Q'_2 - Q_2$ 是相等的. 因此, 上述热机和致冷机每经历一次循环, 就有一定的热量从低温热源传递给高温热源. 由于每经一个循环, 两机都回到原先的状态, 系统的状态没有发生变化, 所以上述结果是违背热力学第二定律的, 这就是说原来关于 $\eta_B > \eta_A$ 的假设是不能成立的. 因此, 有

$$\eta_B \nless \eta_A$$

图 6-23 卡诺定理 1 的证明

如果我们把上述两个机器互换, 即令 A 为热机以推动 B 机工作, 同样可以证明

$$\eta_A \nless \eta_B$$

由于 η_A 不大于 η_B , 而 η_B 不大于 η_A , 因此只能有

$$\eta_A = \eta_B$$

这就是说: 在给定高温热源和低温热源之间工作的任意两个可逆机的效率是相等的. 这就是卡诺定理 1 的内容. 如果上述两个可逆机中的一个 (例如 A) 是工作物质为理想气体的卡诺机, 则其效率为

$$\eta_A = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

那么另一个以任意物质为工作物质的可逆机, 其效率也为

$$\eta_B = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

这个结论往往也叫做卡诺定理.

(2) 现在来证明卡诺定理 2 的内容.

如图 6-24 所示, 设 C 是可逆机, A 是不可逆机, 而且用 A 机推动 C 机工作. 假使 A 机的效率大于 C 机的效率, 由上面关于卡诺定理 1 的证明, 同样可以知道, 这也是违背热力学第二定律的. 所以我们得到 $\eta_A \nless \eta_C$, 这就是卡诺定理 2 的内容. 我们知道, 不可逆机是因为它运动的部分存在着摩擦引起的能量耗散, 或者过程进行较快, 使得 p 、 V 和 T 的平衡条件得不到满足, 所以任何不可逆机的效率都不可能大于可逆卡诺机的效率. 一般可写成

$$\eta_A \leq \eta_C$$

这表明, 给定热源和冷源之间工作的机器, 以可逆卡诺机的效率最高, 其它机器的效率实际上都比它小.

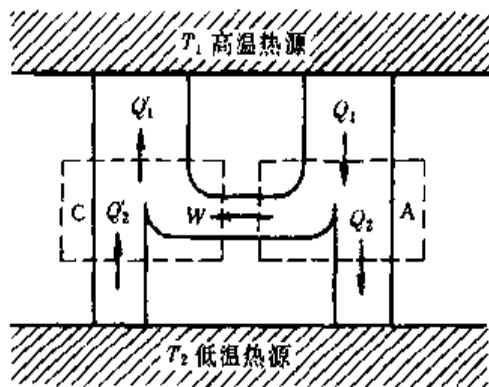
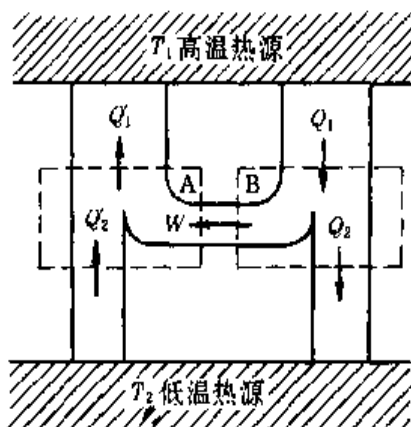


图 6-24 卡诺定理 2 的证明

四 能量品质

热力学第一定律告诉我们,在一切热力学过程中能量之间转换或传递是必须遵守能量守恒定律的;而热力学第二定律和卡诺定理却又指出,在热力学过程中有用能(或可资利用能)则是受到限制的.例如工作在高温热源和低温热源之间、效率为 η 的热机,在完成一个循环后,它从高温热源吸收的热量 Q_1 ,并不能全部用来做功,做功的只是其中的一部分为 ηQ_1 ,它必须把 $(1 - \eta)Q_1$ 即 Q_2 的能量传递给低温热源.这就是说,从高温热源取出的能量只有一部分被利用,其余部分能量被耗散到周围的环境中,最终成为不可利用的能量.这种情况在热力学过程中还有许多.如一根金属棒两端的温度,开始时分别为 T_1 和 T_2 ,随着棒内能量的传递,棒两端间的温度差逐渐减小,直至达到热平衡.从能量守恒来看,系统在始末状态的能量确实保持不变,但从热传递角度来看,系统既已处于热平衡态,热传递就不会发生了;也就是说,高温的可利用的能量变成了低温的不可利用能.据此,人们认为可利用的能量越多,该能量品质越好,反之则差.

提高热机的效率是提高能量品质的一种有效手段.然而从卡诺定理可以知道,提高热机的效率,即提高能量的品质,还是受到许多限制的.所以人们在致力于提高热机效率的同时,也应当减少能量无谓的耗费.此外,开发新的干净的能源是解决能量品质的又一途径,并已列为全人类跨世纪的重大课题之一.

6-8 熵 熵增加原理

热力学第二定律指出,自然界实际进行的与热现象有关的过程都是不可逆的,都是有方向性的.例如,物体间存在温差时,如果没有外界影响,能量总是从高温物体传向低温物体,直到两物体的温度相等为止;气体密度不均匀时,气体要从密度大的区域向密度小的区域迁移,直到气体密度达到均匀;热功之间的转换也是不可逆和有方向性的;等等.为了更方便地判别孤立系统中过程进行的方向,我们引入一个新的态函数——熵,并用熵的变化把系统中实际过程进行的方向表示出来,这就是熵增加原理.

一 熵

由卡诺定理式(6-23)知,工作在两个给定温度 T_1 和 T_2 之间的所有可逆机的效率都相等,如其中有一可逆卡诺热机,则有

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

得
$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

式中 Q_1 为系统吸收的热量, Q_2 为系统放出热量的值. 为便于熵及熵增加原理的讨论, 对于热量 Q 的正负号, 现在我们恢复本章第 6-3 节热力学第一定律中热量符号的规定, 即系统从外界吸热时 Q 为正值, 系统放出热量时 Q 为负值. 按此规定, 上式应改写成

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{(-Q_2)}{T_2}$$

即
$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad (6-25)$$

式中 $\frac{Q_1}{T_1}$ 和 $\frac{Q_2}{T_2}$ 分别为在等温膨胀和等温压缩过程中吸收热量与热源温度的比值, 称为热温比. 这样式(6-25)就表明, 在可逆卡诺循环中, 系统经历一个循环后, 其热温比的总和为零. 上述结论虽是从研究可逆卡诺循环时得出的, 但它对任意可逆循环都适用, 因而具有普遍性.

如图 6-25 所示, 有一可逆循环 ABCDEFGHA. 在这循环中包含有 4 个等温过程和 4 个绝热过程, 其中 AB、CD、EF、GH 为等温过程, BC、DE、FG、HA 为绝热过程. BG' 和 C'G 是两绝热线的延长线, 则此可逆循环可看成是由三个卡诺循环(即 ABG'HA、CC'GG'C 和 C'DEFC')所组成. 所以系统经历一个 ABCDEFGHA 可逆循环, 系统的热温比应等于三个卡诺循环的热温比之和, 并为零, 有

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q'_4}{T_4} + \frac{Q'_1}{T_1} + \frac{Q'_4}{T_4} + \frac{Q''_1}{T_1} + \frac{Q_3}{T_3} = 0$$

考虑到在温度 T_1 的情况下吸收的热量为 $Q_1 = Q'_1 + Q''_1$, 在温度为 T_4 的情况下吸收的热量为 $Q_4 = Q'_4 + Q''_4$, 上式可写成

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q_4}{T_4} = 0$$

即
$$\sum_{i=1}^4 \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

对于如图 6-26 所示的任意可逆循环, 仿照上述分析不难得知, 它可以看成是由许多小卡诺



克劳修斯(Rudolf Clausius, 1822—1888), 德国理论物理学家. 他对热力学理论有杰出贡献, 曾提出热力学第二定律的克劳修斯表述. 为了说明不可逆过程, 提出了一个新的概念——熵, 并得出孤立系统的熵增加原理. 他还是气体动理论创始人之一. 他提出统计概念和自由程概念, 并导出平均自由程公式. 他还利用统计概念导出气体压强公式, 提出比范德瓦耳斯更普遍的气体物态方程.

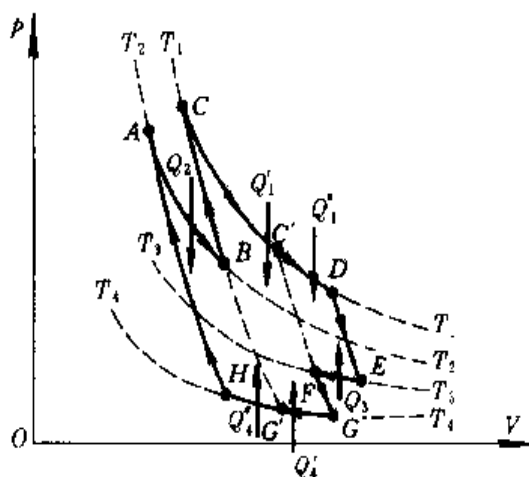


图 6-25 由 4 个等温过程和 4 个绝热过程组成的可逆循环

循环所组成的。这样可逆循环的热温比近似等于所有小卡诺循环热温比之和，并为零，即有

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} = 0 \quad (6-26)$$

当小卡诺循环无限变窄，即小卡诺循环的数目无限多时，式(6-26)中的 $n \rightarrow \infty$ ，这时求和可用积分来替代，有

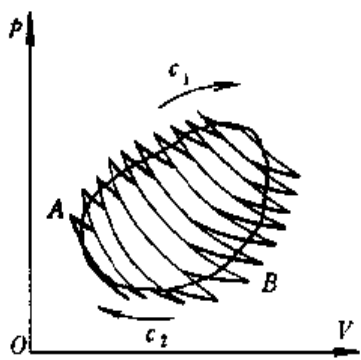


图 6-26 任意可逆循环可看作由无限多个卡诺循环组成

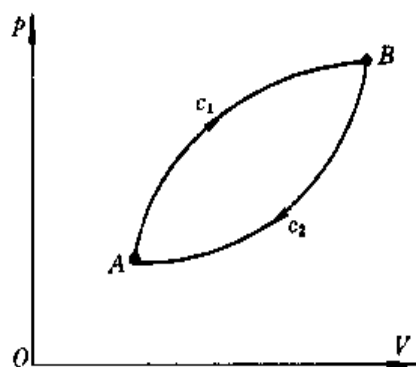


图 6-27 摘

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \quad (6-27)$$

式中 dQ 为系统从温度为 T 的热源中吸取的微分热量。式(6-27)表明，系统经历任意可逆循环过程一周后，其热温比之和为零。式(6-27)也称作克劳修斯等式。

在如图 6-27 所示的可逆循环中有两个状态 A 和 B 。这个可逆循环可分为 Ac_1B 和 Bc_2A 两个可逆过程。由式(6-27)，有

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_{A_1 B} \frac{dQ}{T} + \int_{B_2 A} \frac{dQ}{T} = 0$$

由于上述每一过程都是可逆的,故正逆过程热温比的值相等但反号,有

$$\int_{B_2 A} \frac{dQ}{T} = - \int_{A_1 B} \frac{dQ}{T}$$

于是上式可写为

$$\int_{A_1 B} \frac{dQ}{T} = \int_{A_2 B} \frac{dQ}{T} \quad (6-28)$$

这个结果表明,系统从状态 A 到达状态 B,无论经历哪一个可逆过程,热温比 $\frac{dQ}{T}$ 的积分都是相等的. 这就是说,沿可逆过程的 $\frac{dQ}{T}$ 的积分,只决定于始、末状态,而与过程无关. 对此,比照第 6-3 节关于定义内能的思路,我们可以认为,上述结果标示着存在一个新的态函数,这个态函数在始、末两态 A、B 间的增量为一定值,等于这两平衡态之间任意一个可逆过程的热温比 dQ/T 的积分,而与什么样的具体过程无关. 这个态函数叫做熵 S,它是克劳修斯于 1854 年发现,并于 1865 年予以命名的. 于是,由式(6-28),有

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T} \quad (\text{可逆过程}) \quad (6-29)$$

式中 S_A 和 S_B 分别表示系统在态 A 和态 B 的熵. 上式的物理意义是:在一热力学过程中,系统从初态 A 变化到末态 B 时,系统熵的增量等于初态 A 和末态 B 之间任意一可逆过程热温比(dQ/T)的积分.

如系统经无限小的可逆过程,则有

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (6-30)$$

熵的单位名称是焦耳每开尔文,符号是 $J \cdot K^{-1}$.

二 熵变的计算

在热力学中,我们主要根据式(6-29)来计算两平衡态之间熵的变化. 计算时应注意:

(1) 熵是状态的单值函数,故系统处于某给定状态时,其熵也就确定了. 如果系统从始态经一过程达到末态,始、末两态均为平衡态,那么,系统熵的变化也是确定的,与过程是否是可逆过程无关. 因此,当始、末两态之间为一不可逆过程时,我们就可以预先在两态间设计一个可逆过程,然后用式(6-29)进行计算.

(2) 系统如分为几个部分,各部分熵变之和等于系统的熵变.

下面举例进行熵变计算.

例 1 不同温度的液体混合前后的熵变. 设有一个系统储有 1 kg 的水, 系统与外界间没有能量传递. 开始时, 一部分水的质量为 0.30 kg, 温度为 90 °C, 另一部分水的质量为 0.70 kg, 温度为 20 °C. 混合后, 系统内水温达到平衡. 试求水的熵变.

解 由于系统与外界间没有能量传递, 因此系统可看作孤立系统. 水由温度不均匀达到均匀的过程, 实际上是一个不可逆过程. 为计算混合前后水的熵变, 我们设想混合前, 两部分的水均各处于平衡态; 混合后的水亦处于平衡态, 混合是在等压下进行的. 这样我们可假设水的混合过程为一可逆的定压过程. 于是我们可以利用式(6-29)来计算水的熵变.

设水温达到平衡时的温度为 T' , 水的定压比热容为 $c_p = 4.18 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, 热水的温度为 $T_1 = 363 \text{ K}$, 冷水的温度为 $T_2 = 293 \text{ K}$, 热水的质量 $m_1 = 0.3 \text{ kg}$, 冷水的质量 $m_2 = 0.7 \text{ kg}$. 由能量守恒定律, 有

$$0.30 \times c_p (363 \text{ K} - T') = 0.70 \times c_p (T' - 293 \text{ K})$$

解上式, 可得水温达到平衡时的温度

$$T' = 314 \text{ K}$$

由式(6-29), 可分别得到热水的熵变

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= \int_{T_1}^{T'} \frac{dQ}{T} = m_1 c_p \int_{T_1}^{T'} \frac{dT}{T} = m_1 c_p \ln \frac{T'}{T_1} \\ &= 0.30 \times 4.18 \times 10^3 \times \ln \frac{314}{363} \text{ J} \cdot \text{K} = -182 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \end{aligned}$$

和冷水的熵变

$$\begin{aligned} \Delta S_2 &= m_2 c_p \int_{T_2}^{T'} \frac{dT}{T} = m_2 c_p \ln \frac{T'}{T_2} \\ &= 0.70 \times 4.18 \times 10^3 \times \ln \frac{314}{293} \text{ J} \cdot \text{K} \\ &= 203 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \end{aligned}$$

而系统的熵变是这两部分水的熵变之和, 即

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 21 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

从计算结果可以看出, 在热水与冷水混合的过程中, 虽然热水的熵有所减少, 但冷水的熵增加得更多, 致使系统的熵增加了. 由于系统与外界之间没有能量传递, 所以上述计算结果也表明, 在一个孤立系统中, 不同温度物质的混合过程, 系统的熵是增加的. 另一方面, 不同温度物质的混合过程是一个不可逆过程. 因此, 我们也可说, 在孤立系统中不可逆过程的熵是增加的.

例 2 热传导过程中的熵变.

如图 6-28 所示, 有一个容器的器壁是由绝热材料做成的. 容器内有两个彼此相接触的物体 A 和 B, 它们的温度分别为 T_A 和 T_B , 且 $T_A > T_B$. 这两个物体组成一个系统. 由于容器是被绝热壁所包围, 容器内的物体系统可视为孤立系统. 容器内物体 A、B 间的热传导过程可看作是孤立系统内进行的不可逆过程.

考虑到 $T_A > T_B$, 有热量自物体 A 传递到物体 B. 设在微小时间 Δt 内, 从 A 传递到 B 的热量为 ΔQ , 并且是在可逆的等温过程中进行的. 那么, A 的熵变为

$$\Delta S_A = \left(\frac{\Delta Q}{T_A} \right) - \frac{\Delta Q}{T_A}$$

B 的熵变为

$$\Delta S_B = \frac{\Delta Q}{T_B}$$

在这微小时间内, 此孤立系统的熵变为

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = -\frac{\Delta Q}{T_A} + \frac{\Delta Q}{T_B}$$

由于 $T_A > T_B$, 所以

$$\Delta S > 0$$

只要物体 A 的温度高于物体 B 的温度, 在任意微小时间内, 总有 $\Delta S > 0$. 因此, 上述结果表明, 在孤立系统中所进行的热传导过程, 熵是增加的. 而热传导也是一个不可逆过程, 所以热传导过程中熵增加的例子又一次说明, 孤立系统中不可逆过程的熵是增加的.

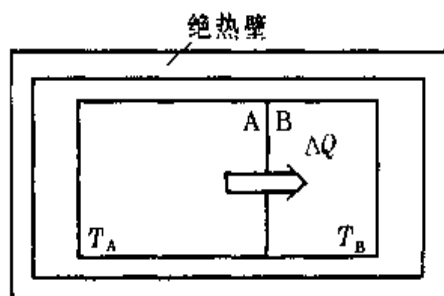


图 6-28

三 熵增加原理

上面以不同温度的液体混合和热传导为例, 得出了孤立系统内部进行不可逆过程时, 系统的熵要增加的结论, 即

$$\Delta S > 0 \quad (\text{孤立系统内的不可逆过程}) \quad (6-31)$$

其实, 自然界的不可逆过程还有很多, 例如前面已讲过的气体的扩散、热功转换等, 都是不可逆过程的例子. 如果我们用上述方法计算, 也都能得出熵要增加的结果. 因此, 孤立系统内一切不可逆过程的熵变都如式 (6-31) 一样, 是增加的.

那么, 在孤立系统中可逆过程的熵变又是如何呢? 由于孤立系统与外界之间没有能量传递, 孤立系统中发生的过程, 当然也是绝热的, 即 $dQ = 0$. 因此, 由式 (6-30) 可知, 孤立系统中的可逆过程, 其熵应该保持不变, 即

$$\Delta S = 0 \quad (\text{孤立系统内的可逆过程}) \quad (6-32)$$

于是我们把式 (6-31) 和式 (6-32) 合并为一个式子, 有

$$\Delta S \geq 0 \quad (6-33)$$

上式可适用于孤立系统内任意过程. 其中取“>”号时, 用于不可逆过程; 取“=”号时, 用于可逆过程. 式 (6-33) 叫做熵增加原理. 它表明, 孤立系统中的可逆过程, 其熵不变; 孤立系统中的不可逆过程, 其熵要增加. 因此, 若一个孤立系统开始时处于非平衡态 (如温度不同, 气体密度不同等), 后来逐渐向平衡态过渡, 在此过程中熵要增加, 最后当系统达到平衡态时 (如温度均匀, 气体密度均匀等), 系统的熵达到最大值. 此后, 如果系统的平衡状态不被破坏, 系统的熵将保持不变. 孤立系统中物质由非平衡态向平衡态过渡的过程为不可逆过程. 所以说, 孤立系统中不可逆过程总是朝着熵增加方向进行, 直到达到熵的最大值. 因此, 用熵增加原理可判断过程进行的方向和限度.

应当强调指出,熵增加原理是有条件的,它只对孤立系统或绝热过程才成立.

四 熵增加原理与热力学第二定律

回顾热力学第二定律的表述和熵增加原理的表述,可以看到它们对宏观热现象进行的方向和限度的叙述是等效的.例如在热传导问题中,热力学第二定律叙述为:热只能自动地从高温物体传递给低温物体,而不能自动向相反方向进行.熵增加原理则叙述为:孤立系统中进行的从高温物体向低温物体传递热量的热传导过程,使系统熵增加,是一个不可逆过程;当孤立系统达到温度平衡时,系统的熵具有最大值.对比以上两种叙述可以看出,热力学第二定律和熵增加原理对热传导方向的叙述是协调的,等效的.它们对热功转换等其他不可逆的热现象的叙述也是等效的.不过,熵增加原理是把热现象中不可逆过程进行的方向和限度,用简明的数量关系表达出来了,尽管这种表达只限于对孤立系统而言.

例 3 1 kg、20 °C 的水,与 100 °C 的热源相接触,使水温达到 100 °C. 求:(1) 水的熵变;(2) 热源的熵变;(3) 若把水和热源作为一孤立系统,系统的熵变.这个过程是可逆还是不可逆的?(已知水的比热容为 $4.18 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).

解 (1) 为便于计算,设想在 20 °C 到 100 °C 之间有一系列温差无限小的热源,使水逐一与之接触.这样水的吸热过程变得无限缓慢,可近似作为可逆过程.于是水的熵变 ΔS_1 为

$$\Delta S_1 = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc dT}{T} = mc \ln \frac{T_2}{T_1}$$

已知 $T_1 = 20 \text{ °C} = 293 \text{ K}$, $T_2 = 100 \text{ °C} = 373 \text{ K}$, $c = 4.18 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $m = 1 \text{ kg}$. 代入上式,得

$$\Delta S_1 = 1 \times 4.18 \times 10^3 \times \ln \frac{373}{293} \text{ J} \cdot \text{K} = 1.01 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

水的熵是增加的.水温升高的过程是不可逆过程.

(2) 由于热源的温度是不改变的,故热源放出热量的过程可看成是在等温下进行的.如设想过程进行得很慢,亦可作为可逆过程.在这过程中,热源放出的热量 Q_2 的数值与水吸收热量 Q_1 的数值相等,所以有

$$\begin{aligned} Q_2 &= -Q_1 = -mc(T_2 - T_1) \\ &= -1 \times 4.18 \times 10^3 \times (373 - 293) \text{ J} \\ &= -3.34 \times 10^5 \text{ J} \end{aligned}$$

而热源的熵变为

$$\Delta S_2 = \frac{Q_2}{T_2} = -\frac{3.34 \times 10^5}{373} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} = -895 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

热源的熵是减小的。

(3) 把热源和水做为一个人系统,此系统为一孤立系统,它的熵变为热源的熵变与水的熵变之和,即

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = (1.01 \times 10^3 - 895) \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} = 115 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

可见,在此孤立系统中,由于水从热源中吸取热量,致使孤立系统的熵有所增加,这个过程是不可逆过程。

例 4 在如图 6-29 所示的容器内有 1 mol 理想气体,容器由绝热材料制成,容器与外界间的能量传递可略去不计。有一隔板将容器分为 A 和 B 两部分, A 的体积为 V_1 。开始时,理想气体充满 A 内, B 内为真空。然后打开隔板,使理想气体充满整个容器 V_2 。求此过程中的熵变。

解 被绝热壁所包围的理想气体可当作孤立系统。隔板打开后,气体向真空膨胀。这过程是在绝热条件下进行的,而且气体与外界又没有接触,即气体自由膨胀并不对外作功,因而气体的内能没有改变,使气体的温度保持恒定。这显然是个不可逆过程,而为计算熵变就必须设想一个可逆过程。从刚才分析中知道,气体是从始态 (V_1, T) 变为末态 (V_2, T) 的,这样我们就可设想气体从始态变至末态是在可逆的等温过程下进行的。由于等温过程 $dE = 0$, 所以 $dQ = dW = p dV$ 。故熵变为

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{p dV}{T} = R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

因为 $V_2 > V_1$, 所以理想气体在自由膨胀过程中熵是增加的,是一个不可逆的过程。

例 5 理想气体的熵变。设有 1 mol 理想气体,其状态参量由 p_1, V_1, T_1 变化到 p_2, V_2, T_2 。在此过程中气体的熵改变了

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$$

由热力学第一定律,上式可写成

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int \frac{dE + p dV}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_{V,m} dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} \frac{R dV}{V} \\ &= C_{V,m} \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \end{aligned}$$

由此可得理想气体在等温过程中的熵变为

$$\Delta S_T = R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

理想气体在等体过程中的熵变为

$$\Delta S_V = C_{V,m} \ln \frac{T_2}{T_1}$$

理想气体在等压过程中,有 $V_2/V_1 = T_2/T_1$, 故理想气体在等压过程中的熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S_p &= C_{V,m} \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{T_2}{T_1} = (C_{V,m} + R) \ln \frac{T_2}{T_1} \\ &= C_{p,m} \ln \frac{T_2}{T_1} \end{aligned}$$

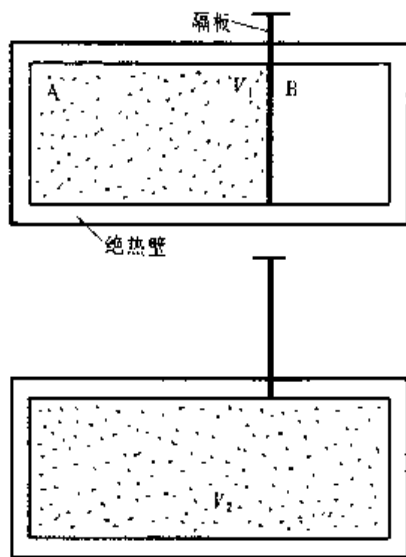


图 6-29

问 题

6-1 从增加内能来说,做功和传递热量是等效的,但又如何理解它们在本质上的差异呢?

6-2 一系统能否吸收热量,仅使其内能变化?一系统能否吸收热量,而不使其内能变化?

6-3 在一巨大的容器内,储满温度与室温相同的水,容器底部有一小气泡缓缓上升,逐渐变大,这是什么过程?在气泡上升过程中,泡内气体是吸热还是放热?

6-4 有一块 1 kg , 0°C 的冰,从 40 m 的高空落到一个木制的盒中,如果所有的机械能都能转换为冰的内能,这块冰可否全部溶解?(已知 1 mol 的冰溶解时要吸收 $6.0 \times 10^3\text{ J}$ 的热量.)

6-5 有人认为:“在任意的绝热过程中,只要系统与外界之间没有热量传递,系统的温度就不会变化”.此说法对吗?为什么?

6-6 有一刚性容器被绝热材料所包裹,容器内有一隔板将容器分成两部分,一部分有气体,另一部分为真空,若轻轻将隔板抽开,此容器内气体的内能发生变化吗?

6-7 铀原子弹爆炸后约 100 ms 时,“火球”是半径约为 15 m 、温度约为 $3 \times 10^5\text{ K}$ 的气体,作为粗略估算,把“火球”的扩大过程,视为空气的绝热膨胀,试问当“火球”的温度为 10^3 K 时,其半径有多大.

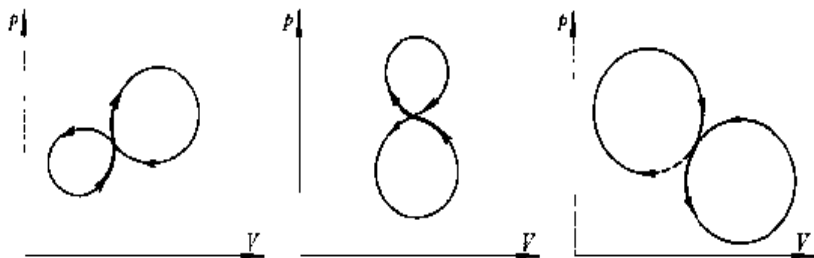
6-8 一定量的理想气体分别经绝热、等温和等压过程后,膨胀了相同的体积,试从 $p-V$ 图上比较这三种过程做功的差异.

6-9 分别在 $p-V$ 图、 $V-T$ 图和 $p-T$ 图上,画出等体、等压、等温和绝热过程的曲线.

6-10 1 kg 空气,开始时温度为 0°C . 如果吸收 $4.18 \times 10^3\text{ J}$ 的热量,问:(1) 在体积不变时,(2) 在压力不变时,内能增加各为多少?哪种情况温度升高较多?

6-11 单原子理想气体氦气,在等压下加热,体积膨胀为原来的两倍,给予气体的热量中有百分之几消耗于对外作的功?若为双原子理想气体氮气,结果又如何?试比较哪个大?为什么?

6-12 如本题图所示,有三个循环过程,指出每一循环过程所作的功是正的、负的,还是零,说明理由.



问题 6-12 图

6-13 有人说,因为在循环过程中系统对外作的净功在数值上等于 $p-V$ 图中封闭曲线所包围的面积,所以封闭曲线包围的面积越大,循环效率就越高,对吗?

6-14 下述三种说法,孰对孰错,说明其理由。

- (1) 系统经历一正循环后,系统的状态没有变化;
- (2) 系统经历一正循环后,系统与外界都没有变化;
- (3) 系统经历一正循环后,接着再经历一逆循环,系统与外界亦均无变化。

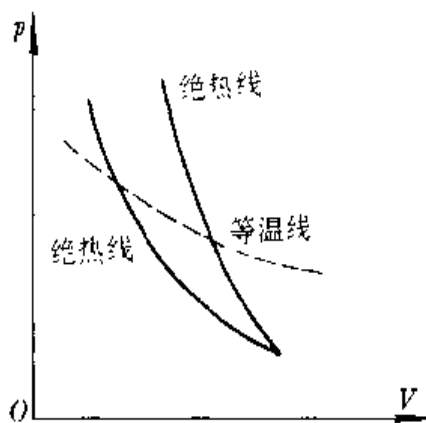
6-15 可逆过程必须同时满足哪些条件?

6-16 墨水在水中的扩散过程是可逆过程还是不可逆过程? 在日常生活中有哪些过程是不可逆过程? 如果一个系统从状态 A 经历一个不可逆过程到达状态 B , 那么这个系统是否可以回到状态 A 呢?

6-17 自然界的过程都遵守能量守恒定律,那么,作为它的逆定理:“遵守能量守恒定律的过程都可以在自然界中出现”,能否成立?

6-18 等温膨胀时,系统吸收的热量全部用来做功,这和热力学第二定律有没有矛盾? 为什么?

6-19 如本题图所示,如果图中两绝热线相交,于是可在两绝热线之间取一等温线,从而形成一个循环。试说明这个循环违背热力学第二定律,因此两绝热线不会相交。



问题 6-19 图

6-20 试说明如果下述过程是可逆过程将违背热力学第二定律:(1) 一物体从距地而高为 h 处落下,并静止在地面上;(2) 一行驶的汽车在快速制动器的作用下停止下来;(3) 把一热的物体放在冷水中,最后系统达到温度平衡。

6-21 由 $\eta \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ 可知 $T_2 = 0$ 时,可以有 $\eta = 100\%$,为什么不制造这样的机器?

6-22 从热力学角度来看,熵函数具有什么性质? 在两平衡态之间可以经历各种过程(也包括不可逆过程),怎样来计算两平衡态的熵变呢? 举例说明。

习 题

(本章习题中有关气体摩尔热容的值,除给出者外,可查表 6-1 中的气体摩尔热容的实验值,且只取三位有效数字)

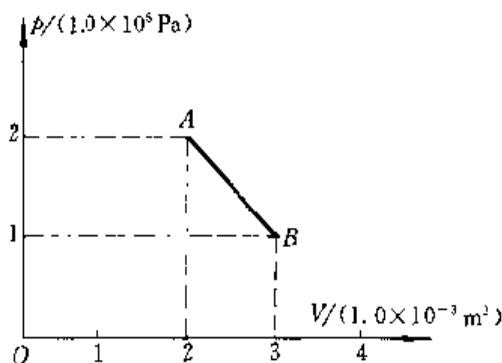
6-1 一打足气的自行车内胎若在 7.0°C 时轮胎中空气压强为 $4.0 \times 10^5 \text{ Pa}$, 则在温度变为 37.0°C 时, 轮胎内空气压强为多少? (设内胎容积不变.)

6-2 在湖面下 50.0 m 深处 (温度为 4.0°C), 有一个体积为 $1.0 \times 10^{-5} \text{ m}^3$ 的空气泡升到湖面上来, 若湖面的温度为 17.0°C , 求气泡到达湖面的体积. (取大气压强为 $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$)

6-3 氧气瓶的容积为 $3.2 \times 10^{-2} \text{ m}^3$, 其中氧气的压强为 $1.30 \times 10^7 \text{ Pa}$, 氧气厂规定压强降到 $1.0 \times 10^6 \text{ Pa}$ 时, 就应重新充气, 以免经常洗瓶. 某小型吹玻璃车间平均每天用去 0.40 m^3 在 $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ 压强下的氧气, 问一瓶氧气能用多少天? (设使用过程中温度不变)

6-4 位于委内瑞拉的安赫尔瀑布是世界上落差最大的瀑布, 它高 979 m . 如果在水下落过程中, 重力对它所作的功中有 50% 转换为热量使水温升高, 求水由瀑布顶部落到底部而产生的温差. (水的比热容为 $4.18 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.)

6-5 如图所示, 一定量的空气, 开始在状态 A , 其压强为 $2.0 \times 10^5 \text{ Pa}$, 体积为 $2.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, 沿直线 AB 变化到状态 B 后, 压强变为 $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$, 体积变为 $3.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, 求此过程中气体所作的功.



习题 6-5 图

6-6 气缸内贮有 2.0 mol 的空气, 温度为 27°C , 若维持压强不变, 而使空气的体积膨胀到原体积的 3 倍, 求空气膨胀时所作的功.

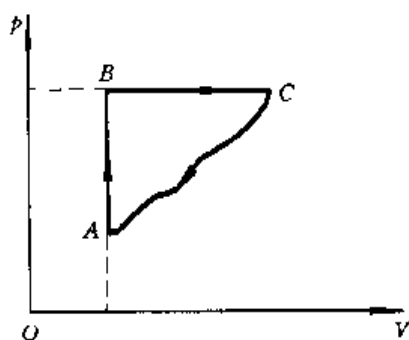
6-7 一定量的空气, 吸收了 $1.71 \times 10^3 \text{ J}$ 的热量, 并保持在 $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ 下膨胀, 体积从 $1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ 增加到 $1.5 \times 10^{-2} \text{ m}^3$, 问空气对外作了多少功? 它的内能改变了多少?

6-8 1.0 mol 的空气从热源吸收了热量 $2.66 \times 10^3 \text{ J}$, 其内能增加了 $4.18 \times 10^3 \text{ J}$, 在这过程中气体作了多少功? 是它对外界做功, 还是外界对它做功?

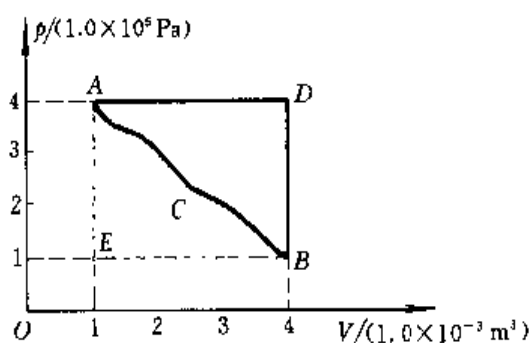
6-9 0.1 kg 的水蒸气自 120°C 加热升温至 140°C . 问: (1) 在等体过程中, (2) 在等压过程中, 各吸收了多少热量?

6-10 一压强为 $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$, 体积为 $1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ 的氧气自 0°C 加热到 100°C , 问: (1) 当压强不变时, 需要多少热量? 当体积不变时, 需要多少热量? (2) 在等压或等体过程中各作了多少功?

6-11 如图所示, 系统从状态 A 沿 ABC 变化到状态 C 的过程中, 外界有 326 J 的热量传递给系统, 同时系统对外做功 126 J . 如果系统从状态 C 沿另一曲线 CA 回到状态 A , 外界对系统做功为 52 J , 则此过程中系统是吸热还是放热? 传递热量是多少?



习题 6-11 图



习题 6-12 图

6-12 如图所示,一定量的理想气体经历 ACB 过程时吸热 200 J,则经历 ACBDA 过程时吸热又为多少?

6-13 除非温度很低,许多物质的定压摩尔热容都可以用下式表示:

$$C_{p,m} = a + 2bT - cT^2$$

式中 a 、 b 和 c 是常量, T 是热力学温度. 求: (1) 在恒定压强下, 1 mol 物质的温度从 T_1 升高到 T_2 时需要的热量; (2) 在温度 T_1 和 T_2 之间的平均摩尔热容; (3) 对镁这种物质来说, 若 $C_{p,m}$ 的单位为 $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, 则 $a = 25.7 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $b = 31.3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-2}$, $c = 3.27 \times 10^8 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-3}$. 计算镁在 300 K 时的热容 $C_{p,m}$, 以及在 200 K 和 400 K 之间 $C_{p,m}$ 的平均值.

6-14 在 300 K 的温度下, 2 mol 理想气体的体积从 $4.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ 等温压缩到 $1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, 求在此过程中气体作的功和吸收的热量.

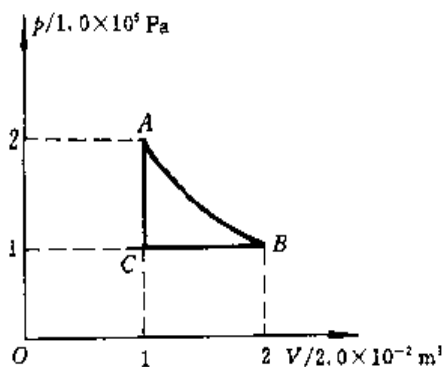
6-15 空气由压强为 $1.52 \times 10^5 \text{ Pa}$ 、体积为 $5.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ 等温膨胀到压强为 $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$, 然后再经等压压缩到原来体积. 试计算空气所作的功.

6-16 如图所示, 使 1 mol 氧气 (1) 由 A 等温地变到 B; (2) 由 A 等体地变到 C, 再由 C 等压地变到 B. 试分别计算氧气所作的功和吸收的热量.

6-17 温度为 27°C 、压强为 $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ 的一定量氮气, 经绝热压缩, 使其体积变为原来的 $1/5$, 求压缩后氮气的压强和温度.

6-18 将体积为 $1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ 、压强为 $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ 的氢气经绝热压缩, 使其体积变为 $2.0 \times 10^{-5} \text{ m}^3$, 求压缩过程中气体所作的功. (氢气的摩尔热容比 $\gamma = 1.41$)

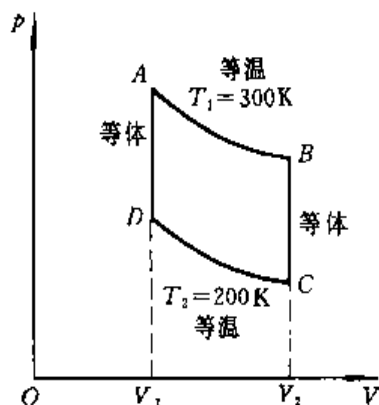
6-19 0.32 kg 的氧气作图中所示循环 ABCDA, 设 $V_2 = 2V_1$, $T_1 = 300 \text{ K}$, $T_2 = 200 \text{ K}$, 求循环效率. (已知氧气的定体摩尔热容的实验值 $C_{V,m} = 21.1 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)



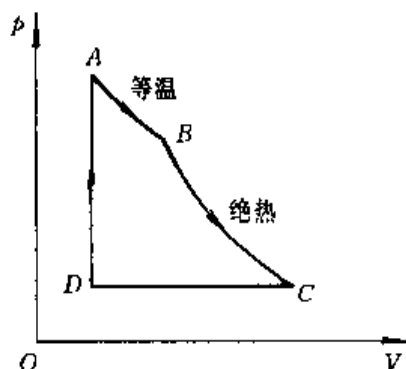
习题 6-16 图

6-20 一定量的理想气体经图示循环, 请填写表格中的空格.

过 程	内能增量 $\Delta E/\text{J}$	做功 W/J	吸热量 Q/J
$A \rightarrow B$		50	
$B \rightarrow C$	-50		
$C \rightarrow D$		-50	-150
$D \rightarrow A$			
ABCD	$\eta =$		

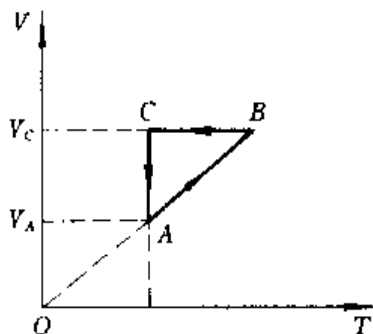


习题 6-19 图



习题 6-20 图

6-21 习题 6-21 图是某理想气体循环过程的 $V-T$ 图, 已知该气体的定压摩尔热容 $C_{p,m} = 2.5 R$, 定体摩尔热容 $C_{v,m} = 1.5 R$, 且 $V_C = 2V_A$.



习题 6-21 图

(1) 试问: 图中所示循环是代表致冷机还是热机?

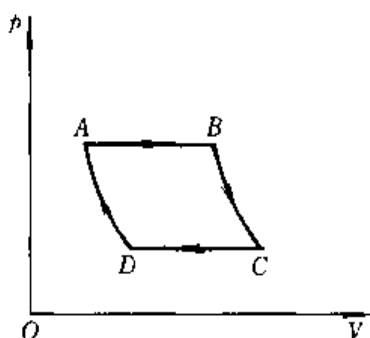
(2) 如是正循环(热机循环), 求出循环效率.

6-22 一卡诺热机的低温热源温度为 7°C , 效率为 40%, 若要将其效率提高到 50%, 求高温热源的温需提高多少度?

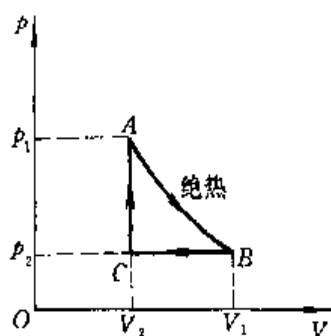
6-23 一定量的理想气体, 经历如图所示的循环过程, 其中 AB 和 CD 是等压过程, BC 和 DA 是绝热过程. 已知 B 点温度 $T_B = T_1$, C 点温度 $T_C = T_2$. (1) 证明该热机的效率为 $\eta = 1 - T_2/T_1$, (2) 这个循环是卡诺循环吗?

6-24 一小型热电厂内, 一台利用地热发电的热机工作于温度为 227°C 的地下热源和

温度为 27°C 的地表之间, 假定该热机每小时能从地下热源获取 $1.8 \times 10^{11} \text{ J}$ 的热量, 试从理论上计算其最大功率为多少?



习题 6-23 图



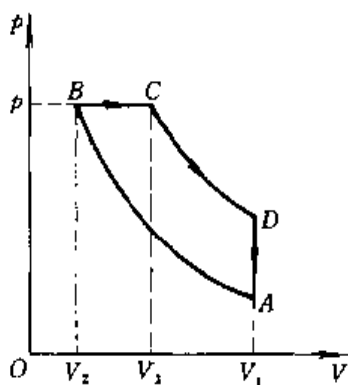
习题 6-25 图

6-25 有一以理想气体为工作物质的热机, 其循环如图所示, 试证明热机效率为

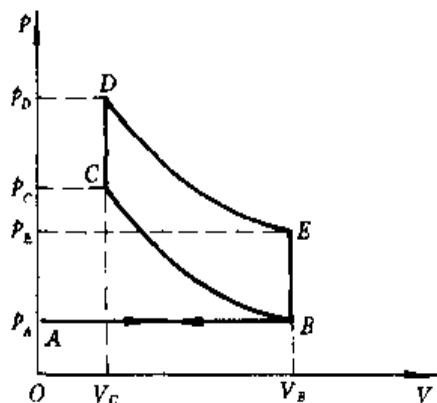
$$\eta = 1 - \gamma \frac{V_1/V_2 - 1}{p_1/p_2 - 1}$$

6-26 如图所示为理想的狄赛尔(Diesel)内燃机循环过程, 它由两绝热线 AB 与 CD、等压线 BC 及等体线 DA 组成, 试证明此内燃机的效率为

$$\eta = 1 - \frac{(V_3/V_2)^{\gamma-1}}{\gamma(V_1/V_2)^{\gamma-1} \left(\frac{V_3}{V_2} - 1 \right)}$$



习题 6-26 图



习题 6-27 图

6-27 汽油机可近似地看成如图所示的理想循环, 这个循环也叫奥托(Otto)循环. 其中 DE 和 BC 是绝热过程.

(1) 证明此热机的效率为

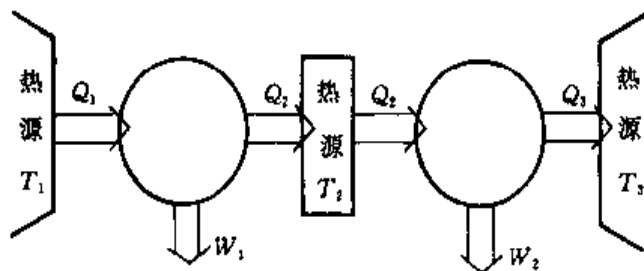
$$\eta = 1 - \frac{T_F - T_B}{T_D - T_C}$$

(2) 利用 $TV^{\gamma-1} = C$, 上述效率公式亦可写成

$$\eta = 1 - (V_C/V_B)^{\gamma-1}$$

6-28 如图所示,把两部卡诺热机连接起来,使从一个热机输出的热量,输入到另一个热机中去. 设第一个热机工作在温度为 T_1 和 T_2 的两热源之间,其效率为 η_1 ,而第二个热机工作在温度为 T_2 和 T_3 的两热源之间,其效率为 η_2 . 若组合热机的总效率以 $\eta = (W_1 + W_2)/Q_1$ 表示,试证总效率表达式为

$$\eta = (1 - \eta_1)\eta_2 + \eta_1 \quad \text{或} \quad \eta = 1 - T_3/T_1$$

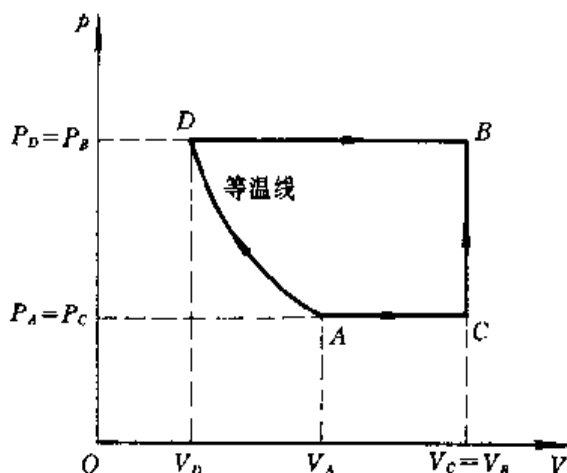


习题 6-28 图

6-29 在夏季,假定室外温度恒定为 37.0°C ,启动空调使室内温度始终保持在 17.0°C . 如果每天有 $2.51 \times 10^8 \text{ J}$ 的热量通过热传导等方式自室外流入室内,则空调一天耗电多少? (设该空调致冷机的致冷系数为同条件下的卡诺致冷机致冷系数的 60%.)

6-30 有质量为 $2.0 \times 10^{-2} \text{ kg}$ 、温度为 -10.0°C 的冰,在压力为 $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ 下转变成 10.0°C 的水,试计算在此过程中的熵变. (已知水的定压比热容 $c_{p2} = 4.22 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$,冰的定压比热容 $c_{p1} = 2.09 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$,冰的熔解热 $L = 3.34 \times 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$.)

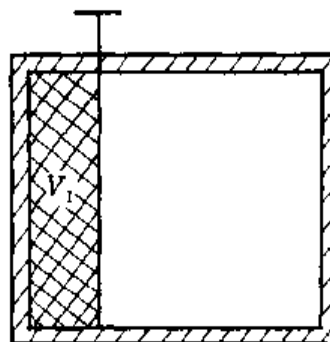
6-31 有 $n \text{ mol}$ 定体摩尔热容 $C_{V,m} = 3R/2$ 的理想气体,从状态 $A(p_A, V_A, T_A)$ 分别经如图所示的 ADB 过程和 ACB 过程,到达状态 $B(p_B, V_B, T_B)$. 试问在这两个过程中气体的熵变各为多少? 图中 AD 为等温线.



习题 6-31 图

6-32 有一体积为 $2.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ 的绝热容器,用一隔板将其分为两部分,如图所示. 开始时在左边(体积 $V_1 = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$)一侧充有 1 mol 理想气体,右边一侧为真空. 现打开

隔板让气体自由膨胀而充满整个容器,求熵变.



习题 6-32 图

第七章 气体动理论

本章以气体为研究对象,从气体分子热运动观点出发,运用统计方法来研究大量气体分子的热运动规律,并对理想气体的热学性质给予微观说明.这些内容就称为气体动理论.

本章的主要内容有:物质的微观模型,理想气体的压强和温度的微观本质,能量均分定理,理想气体的内能,麦克斯韦气体分子速率分布律,玻耳兹曼能量分布律,以及分子平均自由程、碰撞次数等,并简略介绍在非平衡态下气体内的迁移现象,简述热力学第二定律的统计解释和玻耳兹曼关系式.

7-1 物质的微观模型 统计规律性

一 分子的数密度和线度

虽然人们用肉眼不能直接观察到气体、液体和固体这些物质的内部结构,但借助于近代的实验仪器和实验方法,人们还是能觉察到气体、液体和固体这些物质是由大量的分子所组成.实验表明,任何一种物质每 1 mol 所含有的分子(或原子)数目均相同,这个数叫做阿伏伽德罗常数,用符号 N_A 表示,有

$$N_A = 6.022\ 136\ 7\ (36) \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$$

在一般计算时,取 $N_A^* = 6.02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$. 可见,气体、液体和固体内分子的数目是很多的.单位体积内的分子数叫做分子数密度,用符号 n 表示.由实验可测得在通常温度和压强下,氮的 $n \approx 2.47 \times 10^{19}\ \text{cm}^{-3}$,水的 $n \approx 3.3 \times 10^{22}\ \text{cm}^{-3}$,铜的 $n \approx 7.3 \times 10^{22}\ \text{cm}^{-3}$.

我们知道分子有单原子分子(如 He)、双原子分子(如 O_2)、多原子分子(如 CO_2 , CH_4),甚至还有由千万个原子构成的高分子(如聚丙烯).因此,不同结构的分子,其尺度是不一样的.下面以氧气分子为例进行讨论.实验表明,在标准状态下,氧分子的直径约为 $4 \times 10^{-10}\ \text{m}$.实验还表明,在标准状态下,气体分子间的距离约为分子直径的 10 倍.于是,在标准状态下,每个氧分子占有的体积 V 约为氧分子本身体积的 1 000 倍,换句话说,在标准状态下容器中的气体分子可以看成大小可略去不计的质点.应当指出,随着气体压强的增加,分子间的距离要变

小,但在不太大的压强下,每个分子占有的体积仍比分子本身的大小要大得多.

二 分子力

固体和液体的分子之所以会聚集在一起而不分散开,是因为分子之间有相互吸引力.例如,切削一块金属或锯开一段木材时都必须用力,要使钢材发生形变也需要用很大的力.这都说明物体各部分之间存在着相互吸引力.分子之间不仅表现有吸引力,而且也表现有排斥力,液体和固体都很难压缩,就说明分子之间有排斥力,阻止它们相互靠拢.

图 7-1 为分子力 F 与分子间距离 r 的关系曲线.从图上可以看出,当分子之间的距离 $r < r_0$ (r_0 约在 10^{-10} m 左右)时,分子力主要表现为斥力,并且随 r 的减小,斥力急剧增加.当 $r = r_0$ 时,分子力为零. $r > r_0$ 时,分子力主要表现为引力. r 继续增大到大于 10^{-9} m 时,分子间的作用力就可以忽略不计了.可见,分子力的作用范围是极小的,分子力属短程力.气体在低压情况下,其分子之间的作用力可以不考虑.

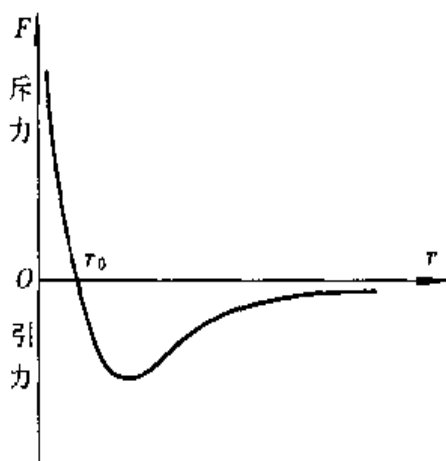


图 7-1 $F-r$ 关系曲线

应当指出,分子力属于电磁相互作用,每个分子都有带负电的电子、带正电的核,所以分子力是十分复杂的,不是静电力——库仑力所能涵盖的,其计算要用到量子力学.限于本课程的要求,对此不予讨论.

三 分子热运动的无序性及统计规律性

由前述可知,一切宏观物体都是由大量分子组成的,分子间还有作用力,同时大量实验事实也表明,这些分子都在不停地作无规热运动.布朗运动^①是表现分子作无规热运动的典型例子.应当指出,物质内的分子在分子力作用下欲使分子聚集在一起,形成有序的排列,而分子的热运动则要使分子尽量分开,这样一来,物质内的分子究竟是聚集还是散开,起决定作用的就是它所处环境的温度和压强.由于环境的差异,从而导致物质形成气、液、固以及等离子态等不同的集合体.

① 布朗(R. Brown, 1773—1858),英国植物学家.他在 1827 年发现,悬浮在液体中的花粉粒子要不停地作无规运动;后来发现,不单是悬浮在液体中的颗粒,就连悬浮在静止气体中的尘粒也不停地作无规运动.人们把这种悬浮在流体中的颗粒所作的不停的无规运动,统称之为布朗运动.它是由大量分子不对称碰撞悬浮在流体中的颗粒而引起的.所以,布朗运动是分子无规热运动的一种间接表现形式.

由于分子数目巨大,故分子在热运动中发生相互间的碰撞是极其频繁的.对气体来说,在通常温度和压强下,一个分子在 1 s 的时间里大约要经历 10^9 次碰撞.在这样频繁的碰撞下,分子的速度不断变化,导致分子间的能量频繁进行交换,从而使气体内各部分分子的平均速率相同,气体内各部分的温度、压强趋于相等,从而达到平衡状态.所以说,无序性是气体分子热运动的基本特性.

从牛顿力学的观点来看,虽然每个气体分子的运动都是遵从牛顿定律的,但由于分子间的极其频繁而又无法预测的碰撞所导致的分子运动的无序性,使得气体分子在某一时刻位于容器中哪一位置、具有什么速度都有一定的偶然性.这是不是说分子的运动状态就无规律性可言了呢?我们仔细考察一下可以发现,气体处于平衡态时,不管个别分子的运动状态具有何种偶然性,但大量分子的整体表现却是有规律的.例如平衡态时,容器中各处的温度、密度、压强都是均匀分布的.这表明,在大量的偶然、无序的分子运动中,包含着一种规律性.这种规律性来自大量偶然事件的集合,故称之为统计规律性.统计规律性是对大量分子整体而言的.总之,在研究气体分子的行为时,应做到牛顿力学的决定性和统计力学的概率性的统一,缺一不可.本章将要讨论的麦克斯韦气体分子速率分布律、能量均分定理、气体的压强公式和温度公式等都是大量气体分子统计规律性的表现.

下面我们举两个容易理解的例子来说明统计规律性.

设骰子为密度均匀的正六面体.每个面分别标有 1 至 6 点.我们不能预先知道所掷骰子一定出现哪一点,从 1 点到 6 点都有可能.骰子出现哪一点纯属是偶然的.但是,如果我们投掷的次数逐渐增多,譬如说有上亿次,那么出现 1 点至 6 点中任意一点的次数就几乎相等,约为总次数的 $1/6$.显然,投掷一次,骰子出现的点数是偶然的,但连续地大数量地投掷,骰子点数的出现却显示出是有规律的.这表明在一定条件下(密度均匀正六面体),大量偶然事件确实具有统计规律性.

伽尔顿板的实验也可说明存在统计规律性.

如图7-2所示,有一块竖直平板,上部钉上一排排等间隔的铁钉,下部用隔板隔成等宽的狭槽,板顶装有漏斗形入口,小球可通过此入口落入狭槽内.这个装置称为伽尔顿板.若在入口处投入一个小球,小球在下落过程中将与一些铁钉发生碰撞,最后落入某一槽中.再投入另一小球,它落入槽中的位置与前者可能完全不相同.这说明,小球从入口处下落后,与哪些铁钉相碰撞以及落入哪个槽中完全是偶然的.但是,如果我们把很多小球从入口中投入,可以发现落入中间狭槽的小球较多,而落入两端狭槽的小球则较少,出现如图7-2所示的有规律的分布.重复这个实验也得到相似的结果.因此这个实验表明,尽管单个小球落入哪个狭槽是完全偶然的,而小球在各个狭槽内的分布则是确定的,小球的分布

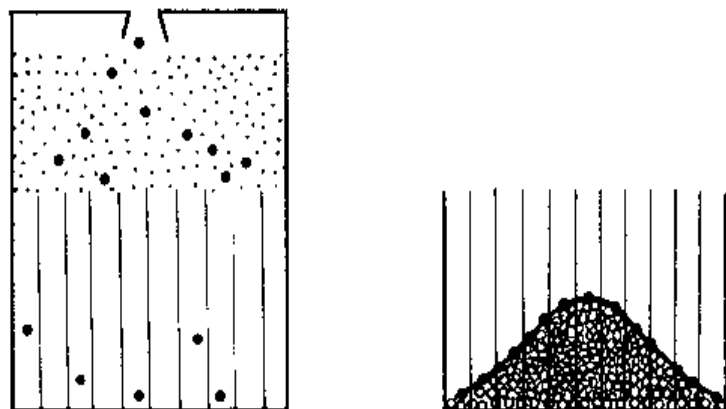


图 7-2 小球在伽尔顿板中的分布

具有统计规律性。

7-2 理想气体的压强公式

我们知道,容器中气体分子的数目是很多的.虽然每个分子的尺寸和质量都很小,但分子在容器中都应占有一定的体积.此外,分子除与器壁碰撞时受力作用外,分子间还有相互作用力,而且这些相互作用力又是十分复杂的.可以认为气体中每个分子都遵守经典力学定律,那么要完整地描述大量分子所组成的系统的行为,就必须同时建立和求解这些分子所遵循的力学方程.由于方程的数量如此之多,而且分子间相互作用力又如此之复杂,因此同时建立和求解这么多的方程显然是不现实的和不可能的,从而也无助于说明大量分子集体的宏观性质.然而,大量分子作热运动时只有一种有别于力学规律性的统计规律性.因此我们可以用统计的方法求出与大量分子运动有关的一些物理量的平均值,如平均能量、平均速度、平均碰撞次数等,从而就能对与大量气体分子热运动相联系的宏观现象作出微观解释.理想气体的压强公式是我们应用统计方法讨论的第一个问题.

一 理想气体的微观模型

从气体动理论的观点来看,理想气体是一种最简单的气体.理想气体的微观模型是:

(1) 分子本身的大小与分子间平均距离相比可以忽略不计,分子间的平均距离很大,分子可以看作是质点.

(2) 除碰撞的瞬间外,分子间的相互作用力可忽略不计.因此在两次碰撞之间,分子的运动可当作匀速直线运动.

(3) 气体分子间的碰撞以及气体分子与器壁间的碰撞可看作是完全弹性碰撞. 分子与器壁间的碰撞只改变分子运动的方向, 不改变它的速率, 气体分子的动能不因与器壁碰撞而有任何改变.

这样, 从气体动理论的观点来看, 理想气体可看成是由大量的不断作无规运动的、本身体积可以略去不计的、彼此间相互作用可不予考虑的弹性小球所组成. 显然这是一个理想的模型, 它只是真实气体在压强较小时的近似模型.

下面我们以理想气体微观模型为对象, 运用牛顿定律, 采取求平均值的统计方法来导出理想气体的压强公式.

二 理想气体的压强公式

利用气体分子运动概念来导出作用于器壁上的压强公式, 这最早是由伯努利^①提出的. 后来, 经过克劳修斯、麦克斯韦等人的发展, 导出的方法越来越合理. 伯努利认为, 气体作用于器壁的压力是气体中大量分子对器壁碰撞的结果. 碰撞时气体分子对器壁作用以冲量, 由于分子与器壁的碰撞为弹性碰撞, 所以作用在器壁上的力的方向都与器壁相垂直.

假设有一个边长分别为 x 、 y 及 z 的长方体容器, 其中含有 N 个同类气体分子, 每个分子的质量均为 m . 由于气体处在平衡状态, 容器内分子数目又十分巨大(在通常情况下, 气体分子数密度 n 的数量级为 10^{19} cm^{-3}), 所以容器壁上的每部分都受到大量分子的碰撞, 容器中的每个器壁都受到均匀的连续的冲力. 因为气体处于平衡态, 各处的压强均相等, 因此只要计算容器中任何一个器壁所受的压强就可以了. 现在来计算与 x 轴相垂直的壁面 A_1 所受的压强(图 7-3).

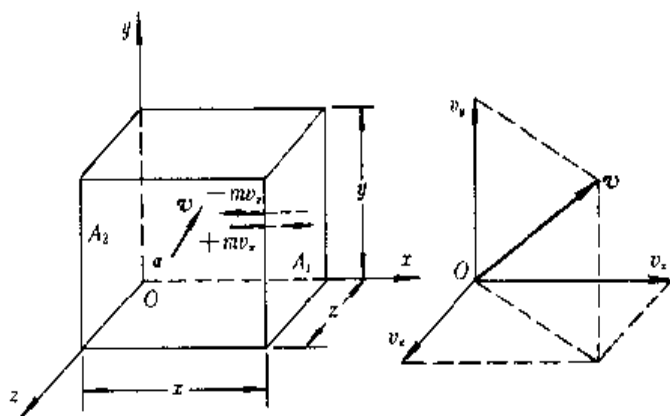


图 7-3 气体动理论的压强公式的推导

^① 伯努利(D. Bernoulli, 1700—1782), 瑞士数学家和物理学家. 1738 年, 他首先从物质分子结构观点以及分子无规运动的假设出发, 对气体压强予以微观解释, 建立了气体动理论和热学的基本概念.

先讨论容器中 α 分子, 其质量为 m , 速度为 \mathbf{v} , \mathbf{v} 在直角坐标上的速度分量为 v_x 、 v_y 及 v_z , 且 $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. 当 α 分子和壁面 A_1 碰撞时, 它受到壁面 A_1 对它沿 $-x$ 轴方向的作用力. 在这个力的作用下, α 分子在 x 轴上的动量由 mv_x 改变为 $-mv_x$, 它在 x 轴上的动量增量为 $(-mv_x) - mv_x = -2mv_x$. 根据动量定理, α 分子动量增量等于器壁给予 α 分子的力的冲量. 力的方向与 x 轴正方向相反. 根据牛顿第三定律, α 分子也给予壁面 A_1 一个大小相等方向相反的力的冲量, 力的方向与 x 轴正方向相同. α 分子对器壁碰撞的力是间歇的, 而不是连续的. 就它沿 x 轴的运动情况而论, 它以 $-v_x$ 从面 A_1 弹回, 飞向面 A_2 并与面 A_2 碰撞后, 又以 v_x 回到面 A_1 再作碰撞. α 分子与面 A_1 的相继两次碰撞, 在 x 轴方向上所移动的距离是 $2x$, 所需要的时间为 $2x/v_x$, 因此在单位时间内, α 分子与面 A_1 碰撞的次数为 $v_x/(2x)$ 次. 于是在单位时间内, α 分子作用在面 A_1 的总冲量为 $2mv_x \times \frac{v_x}{2x}$, 这也就是 α 分子作用于面 A_1 的力的平均值. 以上讨论的是一个分子对壁面 A_1 的碰撞. 实际上容器内有大量分子对壁面 A_1 碰撞, 使壁受到一个几乎连续不断的力. 这个力的大小应等于每个分子作用在面 A_1 上的力的平均值之和, 即

$$F = 2mv_{1x} \frac{v_{1x}}{2x} + 2mv_{2x} \frac{v_{2x}}{2x} + \cdots + 2mv_{Nx} \frac{v_{Nx}}{2x}$$

式中 v_{1x} 、 v_{2x} 、 \cdots 、 v_{Nx} 是各个分子速度在 x 轴上的分量. 面 A_1 所受到的压强为

$$\begin{aligned} p &= \frac{F}{yz} = \frac{1}{yz} \left[2mv_{1x} \frac{v_{1x}}{2x} + 2mv_{2x} \frac{v_{2x}}{2x} + \cdots + 2mv_{Nx} \frac{v_{Nx}}{2x} \right] \\ &= \frac{m}{xyz} [v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \cdots + v_{Nx}^2] \\ p &= \frac{Nm}{xyz} \left(\frac{v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \cdots + v_{Nx}^2}{N} \right) \end{aligned} \quad (7-1)$$

式中括弧内的物理量表示容器内 N 个分子沿 x 轴的速度分量的平方平均值, 用 $\overline{v_x^2}$ 表示, 即

$$\overline{v_x^2} = \frac{v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \cdots + v_{Nx}^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N v_{ix}^2}{N}$$

同样也可以得到

$$\overline{v_y^2} = \frac{\sum_{i=1}^N v_{iy}^2}{N} \quad \text{和} \quad \overline{v_z^2} = \frac{\sum_{i=1}^N v_{iz}^2}{N}$$

考虑到 $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, 所以有

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

由于气体处于平衡态,故可以认为分子沿各个方向运动的概率是相等的,没有哪个方向占有优势.这也就是在平衡态下气体分子热运动的各向同性的表现.因此对大量分子来说,它们在 x 、 y 、 z 三个轴上的速度分量的平均值应是相等的,即

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2} \quad (7-2)$$

把它代入式(7-1),并设 $n = \frac{N}{xyz}$ 为单位体积内的分子数,也就是分子数密度,则式(7-1)为

$$p = \frac{1}{3} nm \overline{v^2} \quad (7-3a)$$

或
$$p = \frac{2}{3} n \left(\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) \quad (7-3b)$$

如以 $\bar{\epsilon}_k$ 表示分子平均平动动能,有 $\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$,则上式为

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_k \quad (7-3c)$$

上式叫做理想气体的压强公式.由式(7-3c)可见,气体作用于器壁的压强正比于分子数密度 n 和分子的平均平动动能 $\bar{\epsilon}_k$.分子数密度越大,压强越大;分子平均平动动能越大,压强也越大.实际上,分子对器壁的碰撞是不连续的,器壁所受到的冲量的数值是起伏不定的,只有在气体的分子数足够大时,器壁所获得的冲量才有确定的统计平均值.若说个别分子产生多大压强,这是无意义的,压强是一个统计量.应当指出,压强虽说是由大量分子对器壁碰撞而产生的,但它是一个宏观量,可以从实验直接测得.而式(7-3)的右方是不能直接测量的微观量,所以式(7-3)是无法直接用实验来验证的.但是从此公式出发,可以满意地解释或论证已经验证过的理想气体诸定律.式(7-3)是气体动理论的基本公式之一.

在式(7-3a)中, $nm = \rho$ 为气体的密度,故理想气体压强公式亦可写成为

$$p = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2}$$

7-3 理想气体分子的平均平动动能与温度的关系

由理想气体的物态方程和压强公式可以得到气体的温度与分子的平均平动动能之间的关系,从而说明温度这一宏观量的微观本质.

设质量为 m' 的气体的分子数为 N ,分子的质量为 m ,又已知 1 mol 气体的

分子数为 N_A , 1 mol 气体的质量为 μ , 故有 $m' = mN$ 和 $\mu = mN_A$. 把它们代入理想气体物态方程

$$pV = \frac{m'}{M}RT$$

中可得

$$p = \frac{N}{V} \frac{R}{N_A} T \quad (7-4)$$

式中 R 为摩尔气体常量, N_A 为阿伏伽德罗常数. 它们之比 R/N_A 也为一常量, 用 k 表示, 叫做玻耳兹曼常量, 有

$$k = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

式(7-4)中 $N/V = n$, 为分子数密度. 于是, 式(7-4)可写成

$$p = nkT \quad (7-5)$$

将上式与理想气体压强公式(7-3b)

$$p = \frac{2}{3} n \left(\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right)$$

相比较, 可得

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT \quad (7-6)$$

这就是理想气体分子的平均平动动能与温度的关系式. 如同压强公式一样, 它也是气体动理论的基本公式之一. 式(7-6)表明, 处于平衡态时的理想气体, 其分子的平均平动动能与气体的温度成正比. 气体的温度越高, 分子的平均平动动能越大; 分子平均平动动能越大, 分子热运动的程度越激烈. 因此, 我们可以说温度是表征大量分子热运动激烈程度的宏观物理量, 它是大量分子热运动的集体表现. 如同压强一样, 温度也是一个统计量. 对个别分子来说, 说它有多少温度是没有意义的.

如有两种气体, 它们分别处于平衡态. 若这两种气体的温度也相等, 那么由式(7-6)可以看出, 这两种气体分子的平均平动动能也相等, 若气体分子平均平动动能用 ϵ_k 表示, 则有

$$\bar{\epsilon}_{k1} = \bar{\epsilon}_{k2} = \frac{3}{2} kT$$

换句话说, 如果分别处于各自平衡态的两种气体, 其分子的平均平动动能相等, 那么这两种气体的温度也必相等. 这时, 若使这两种气体相接触, 两种气体间将没有宏观的能量传递, 它们各自处于热平衡状态. 因此, 我们也可以说温度是表征气体处于热平衡状态的物理量.

从式(7-6)可以得到, 当气体的温度为 300 K 时, 分子的平均平动动能 ϵ_k 为 6.21×10^{-21} J; 若理想气体的温度高达 100×10^6 K, 分子的平均平动动能也

只有 10^{-15} J. 但是由于气体的分子数密度很大, 气体分子的平均平动动能的总和还是很大的. 例如在 $T = 300$ K, $p = 1.013 \times 10^5$ Pa 时, 分子数密度为

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1.013 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} \text{ m}^{-3} = 2.66 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

那么, 在 1m^3 内, 气体分子的平均平动动能的总和为

$$\bar{E} = \bar{\epsilon}_k n = 6.21 \times 10^{-21} \times 2.66 \times 10^{25} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} = 1.65 \times 10^5 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

这个能量就很大了.

7-4 能量均分定理 理想气体内能

一 自由度

上一节曾指出, 温度为 T 的理想气体处于热平衡时, 气体分子的平均平动动能与温度的关系为

$$\epsilon_{kt} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$$

式中 $\bar{\epsilon}_{kt}$ 为分子平均平动动能的符号, 其中足标“k”表示动能, “t”表示平动. 此外, 考虑到气体处于平衡态时, 分子在任何一个方向的运动都不能比其它方向占有优势, 分子在各个方向运动的概率是相等的, 即 $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$, 于是, 由上式可得

$$\frac{1}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} m \overline{v_y^2} = \frac{1}{2} m \overline{v_z^2} = \frac{1}{2} kT \quad (7-7)$$

上式表明, 分子平均平动动能有三个独立的速度二次方项, 而且与每一个独立的速度二次方项相对应的平均平动动能是相等的, 都为 $\frac{1}{2} kT$.

对由单原子分子组成的理想气体来说, 分子本身大小可以略去不计, 故单原子分子可当成是质点, 只需考虑其平动动能, 而可略去其转动和振动能量. 这样, 单原子分子的平均能量只含有平均平动动能. 由式(7-7)可知, 单原子分子的平均能量有三个独立的速度二次方项, 而每一个独立的速度二次方项都具有 $\frac{1}{2} kT$ 的能量, 故单原子分子的平均能量 $\bar{\epsilon}$ 为 $3 \times \frac{1}{2} kT$.

如果理想气体是由双原子分子组成, 分子的运动不仅有平移运动, 还可能有转动和振动. 双原子分子又分两类: 哑铃式双原子分子和非哑铃式双原子分子. 如图 7-4(a)所示, 若两原子 m_1 和 m_2 之间的距离, 在运动过程中可视为不变,

这就好像两原子 m_1 和 m_2 之间由一根质量不计的刚性细杆相连. 这种双原子分子叫做哑铃式双原子分子或刚性双原子分子. 设点 C 为双原子分子的质心,

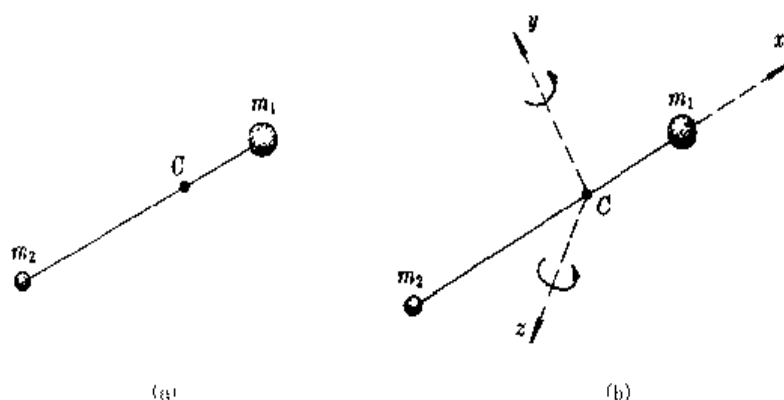


图 7-4 哑铃式双原子分子

并选如图 7-4(b)所示的坐标轴. 于是, 双原子分子的运动可看作是质心 C 的平动, 以及通过点 C 绕 y 轴和 z 轴的转动^①. 因此, 哑铃式双原子分子的平均能量 $\bar{\epsilon}$ 应为质心 C 的平均平动动能 $\bar{\epsilon}_{\text{kt}}$ 和绕 y 轴和 z 轴的平均转动动能 $\bar{\epsilon}_{\text{kr}}$ 之和, 足标“r”表示转动. 由于

$$\bar{\epsilon}_{\text{kt}} = \frac{1}{2} m \overline{v_{Cx}^2} + \frac{1}{2} m \overline{v_{Cy}^2} + \frac{1}{2} m \overline{v_{Cz}^2}$$

其中 m 为双原子分子的质量 (即 $m = m_1 + m_2$), v_{Cx} 、 v_{Cy} 和 v_{Cz} 是质心的速度在 x 、 y 、 z 轴上的分量. 而绕 y 轴和 z 轴的平均转动动能

$$\bar{\epsilon}_{\text{kr}} = \frac{1}{2} J \overline{\omega_y^2} + \frac{1}{2} J \overline{\omega_z^2}$$

其中 J 为双原子分子绕过点 C 的 y 轴或 z 轴的转动惯量, ω_y 和 ω_z 分别为双原子分子绕过点 C 的 y 轴和 z 轴的角速度. 所以哑铃式双原子分子的平均能量为

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_{\text{kt}} + \bar{\epsilon}_{\text{kr}} = \frac{1}{2} m \overline{v_{Cx}^2} + \frac{1}{2} m \overline{v_{Cy}^2} + \frac{1}{2} m \overline{v_{Cz}^2} + \frac{1}{2} J \overline{\omega_y^2} + \frac{1}{2} J \overline{\omega_z^2} \quad (7-8)$$

从式(7-8)可以看出, 刚性(哑铃式)双原子分子的平均能量共有 5 个独立的速度二次方项, 其中三项属平均平动动能, 两项属平均转动动能.

有些双原子分子是不能当作哑铃式的. 因为这些分子中的两原子间的距离随时间而改变, 双原子间不能看成是由一无质量的细杆相连. 这时可认为两原子好像被一根质量略去不计的弹簧相连 (图 7-5). 这种双原子分子叫做非哑铃式

^① 由于我们把原子看作是质点, 故双原子分子绕 x 轴的转动惯量 J_x 可视为零, 所以绕 x 轴的转动动能 $\frac{1}{2} J_x \omega_x^2$ 亦可不计.

双原子分子或非刚性双原子分子. 为简便计, 设想非哑铃式双原子分子沿 x 轴作一维简谐振动, 一维简谐振动的能量含一项振动动能和一项振动势能^①. 可以证明, 这种双原子分子的平均振动能量 $\bar{\epsilon}_v$ (足标 v 表示振动) 为

$$\bar{\epsilon}_v = \frac{1}{2} \mu \overline{v_{Cx}^2} + \frac{1}{2} k \overline{x^2} \quad (7-9)$$

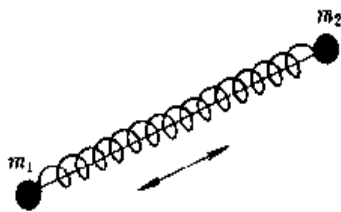


图 7-5 非哑铃式双原子分子的振动

式中 v_{Cx} 是质心沿 x 轴的速度, 所以 $\frac{1}{2} \mu \overline{v_{Cx}^2}$ 是平

均振动动能^②, 其中 μ 是双原子分子的折合质量; x 是两原子振动的相对位移, $\frac{1}{2} k \overline{x^2}$ 是平均振动势能. 由此可见, 非哑铃式双原子分子的平均振动能量共有两个独立的二次方项, 一个是速度平方项, 另一个是坐标二次方项. 于是非哑铃式的双原子分子的平均能量为

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= \bar{\epsilon}_{tx} + \bar{\epsilon}_{ty} + \bar{\epsilon}_v \\ &= \frac{1}{2} m \overline{v_x^2} + \frac{1}{2} m \overline{v_y^2} + \frac{1}{2} m \overline{v_z^2} + \frac{1}{2} J \overline{\omega_x^2} + \frac{1}{2} J \overline{\omega_z^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \mu \overline{v_{Cx}^2} + \frac{1}{2} k \overline{x^2} \end{aligned} \quad (7-10)$$

由式(7-10)可以看出, 非哑铃式双原子分子的平均能量共有 7 个独立的能量二次方项, 其中 6 个是独立的速度二次方项, 1 个是独立的坐标二次方项. 从式(7-10)还可看出, 在这 7 个独立的能量二次方项中, 三项属平动的、两项属转动的、两项属振动的.

我们定义, 分子能量中独立的速度和坐标的二次方项数目叫做分子能量自

① 一维简谐振动的动能和势能的计算可参阅本书第十四章.

② 平均振动动能可证明如下: 设 v_{1x} 和 v_{2x} 分别是原子 m_1 和 m_2 相对实验室参考系在 x 轴上的分速度, v_{Cx} 是质心相对同一参考系的分速度, 那么 m_1 和 m_2 相对质心的速度为 $(v_{1x} - v_{Cx})$ 和 $(v_{2x} - v_{Cx})$. 于是, 双原子分子相对质心沿 x 轴(即两原子连线)的动能为

$$\epsilon_{kv} = \frac{1}{2} m_1 (v_{1x} - v_{Cx})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2x} - v_{Cx})^2 \quad (1)$$

由式(3-28)可得 $v_{Cx} = (m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}) / (m_1 + m_2)$, 代入式(1), 得

$$\epsilon_{kv} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x})^2 \quad (2)$$

式(2)中取 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, μ 的量纲为质量的量纲, 故 μ 叫折合质量; 而 $v_{1x} - v_{2x} = v_{Cx}$ 为两原子的相对速度. 于是, 双原子分子平均振动动能式(2)为

$$\bar{\epsilon}_{kv} = \frac{1}{2} \mu \overline{v_{Cx}^2}$$

由度的数目,简称自由度,用符号 i 表示.按照自由度的定义,单原子分子有三个速度二次方项,所以单原子分子的自由度 $i=3$;刚性双原子分子有五个速度二次方项,所以刚性双原子分子的自由度 $i=5$;而非刚性双原子分子有六个速度二次方项,一个坐标二次方项,所以非刚性双原子分子的自由度 $i=7$.

二 能量均分定理

在式(7-7)中,我们认为单原子分子每一个独立的速度二次方项(即自由度)所对应的平均平动动能均为 $\frac{1}{2}kT$.然而,在双原子分子乃至多原子分子中,分子不仅有平动,而且还有转动和振动,既有动能,也有势能.那么,与每一个独立的速度二次方项或每一个独立的坐标二次方项所对应的平均能量是多少呢?

玻耳兹曼假设:气体处于平衡态时,分子任何一个自由度的平均能量都相等,均为 $\frac{1}{2}kT$.这就是能量按自由度均分定理,或简称能量均分定理.能量均分定理指出,无论是平动、转动或者振动,每一个独立的速度二次方项或每一个独立的坐标二次方项所对应的平均能量均相等,都等于 $\frac{1}{2}kT$.

由能量均分定理,我们可以很方便地求得各种分子的平均能量.对自由度为 i 的分子,其平均能量为 $\bar{\epsilon} = \frac{i}{2}kT$.如以 t 、 r 和 v 分别表示分子能量中属于平动、转动和振动的独立坐标和速度的二次方项的数目,则分子的平均能量亦可一般表示为

$$\bar{\epsilon} = (t + r + v) \frac{1}{2}kT$$

式中 $(t + r + v) = i$.显然,对单原子分子 $t=3$ 、 $r=v=0$,有 $i=3$, $\bar{\epsilon} = \frac{3}{2}kT$;对刚性双原子分子 $t=3$ 、 $r=2$ 、 $v=0$,有 $i=5$, $\bar{\epsilon} = \frac{5}{2}kT$;对非刚性双原子分子 $t=3$ 、 $r=2$ 、 $v=2$,有 $i=7$, $\bar{\epsilon} = \frac{7}{2}kT$;对刚性多原子分子 $t=3$ 、 $r=3$ 、 $v=0$,有 $i=6$, $\bar{\epsilon} = 3kT$.

三 理想气体的内能和摩尔热容

一般气体的内能除掉分子的动能和势能外,还应包括分子间的相互作用能.但对理想气体来说,由于分子间的相互作用可略去不计,所以理想气体的内能,只是气体内所有分子的动能和分子内原子间的势能之和.已知 1 mol 理想气体的分子数为 N_A .若该气体分子的自由度为 i ,那么, 1 mol 理想气体分子的平均

能量,即 1 mol 理想气体的内能 E 为

$$E = N_A \bar{\epsilon} = N_A i \frac{1}{2} kT = \frac{i}{2} N_A kT$$

已知 $N_A k = R$, 故 1 mol 理想气体的内能为

$$E = \frac{i}{2} RT \quad (7-11a)$$

而 $\frac{m}{M}$ mol 理想气体的内能则为

$$E = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT \quad (7-11b)$$

从上式可以看出理想气体的内能不仅与温度有关,而且还与分子的自由度有关. 对给定的理想气体,其内能仅是温度的单值函数,即 $E = E(T)$. 这是理想气体的一个重要性质. 当气体的温度改变 dT 时,其内能也相应变化 dE , 有

$$dE = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R dT \quad (7-12)$$

在节 6-4 中,我们已讨论了在通常情况下一些气体的定体摩尔热容 $C_{V,m}$ 、定压摩尔热容 $C_{p,m}$ 以及它们之间的关系 $C_{p,m} - C_{V,m} = R$, 并由表 6-1 给出了它们的实验测定值. 这里我们将从能量按自由度均分定理出发,讨论理想气体的 $C_{V,m}$ 、 $C_{p,m}$ 和它们之间的关系.

将式(7-12)与式(6-7b)相比较,可以得到理想气体的定体摩尔热容为

$$C_{V,m} = \frac{i}{2} R \quad (7-13)$$

把上式代入式(6-10),可得定压摩尔热容为

$$C_{p,m} = \frac{i+2}{2} R \quad (7-14)$$

摩尔热容比 γ 为

$$\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{V,m}} = \frac{i+2}{i} \quad (7-15)$$

表 7-1 给出了理想气体分子自由度 i 、内能 E 、摩尔热容 $C_{V,m}$ 和 $C_{p,m}$ 等的理论值. 在一般情况下,当知道气体的自由度后,可用表 7-1 中的 $C_{V,m}$ 和 $C_{p,m}$ 的理论值进行计算.

在第六章的第 6-4 节里,我们曾给出了在压强为 1.013×10^5 Pa、温度为 25 °C 的情况下,一些气体的摩尔热容 $C_{V,m}$ 和 $C_{p,m}$ 以及 $C_{p,m} - C_{V,m}$ 和 $\gamma(C_{p,m}/C_{V,m})$ 的实验值(表 6-1). 而表 7-1 的有关量值则是从能量均分定理得出的理论值. 把表 7-1 和表 6-1 的相关量值相比较可以看出,在 1.013×10^5 Pa、25 °C 的实验条件下,各种气体的 $C_{p,m} - C_{V,m}$ 的实验值接近于摩尔气体常量 R , 特别

表 7-1 理想气体分子自由度、分子平均能量和摩尔热容的理论值

(C_{p,m}、C_{v,m}的单位均为 J·mol⁻¹·K⁻¹, R 取 8.31 J·mol⁻¹·K⁻¹)

气 体	<i>i</i>	$\bar{\epsilon}$	C _{v,m}	C _{p,m}	C _{p,m} - C _{v,m}	$\gamma(C_{p,m}/C_{v,m})$
单原子分子	3	$\frac{3}{2}kT$	$\frac{3}{2}R = 12.47$	$\frac{5}{2}R = 20.78$	8.31	1.67
刚性双原子分子	5	$\frac{5}{2}kT$	$\frac{5}{2}R = 20.78$	$\frac{7}{2}R = 29.09$	8.31	1.40
非刚性双原子分子	7	$\frac{7}{2}kT$	$\frac{7}{2}R = 29.09$	$\frac{9}{2}R = 37.39$	8.31	1.39
刚性三原子分子	6	$\frac{6}{2}kT$	3R = 24.93	4R = 33.24	8.31	1.33
非刚性三原子分子	12	6kT	6R = 49.86	7R = 58.17	8.31	1.17

是单原子分子气体和双原子分子气体, C_{p,m} - C_{v,m} 的实验值与理论值较为接近. 这表明, 能量均分定理关于每一自由度均分 $\frac{1}{2}kT$ 能量的说法, 对理想气体是合适的. 但是从表 7-1 和表 6-1 中还可以看到, 对某些三原子分子气体, C_{p,m} - C_{v,m} 的实验值与理论值则有较大的差异.

不仅如此, 我们从实验中还发现 C_{v,m} 还与温度有关. 表 7-2 给出了双原子氢气在不同温度下的 C_{v,m} 的值.

表 7-2 双原子分子氢气(H₂)的定体摩尔热容的实验值(压强为 1.013 × 10⁵ Pa)

温度 T/K	40	90	197	273	775	1273	1773	2273	2773
摩尔热容 C _{v,m} /(J·mol ⁻¹ ·K ⁻¹)	12.46	13.59	18.31	20.27	21.04	22.95	25.04	26.71	27.96

用表 7-2 的数据可作如图 7-6 所示的 C_{v,m} 与 T 的实验关系曲线. 从该实验曲线可以看出: 氢气的 C_{v,m} 是随温度的升高而增加的; 当氢气的温度低于 100 K 时, 其 C_{v,m} 近似为 $\frac{3}{2}R$, 似乎此时只有分子的平均平动动能对摩尔热容有贡献; 当氢气的温度介于 250—1 000 K 之间时, 其 C_{v,m} 约为 $\frac{5}{2}R$, 此时除分子的平均平动动能外, 转动动能也对 C_{v,m} 起作用; 当氢气的温度高达 2 500 K 以上时, 其 C_{v,m} 逐渐达到 $\frac{7}{2}R$, 这时分子的平动、转动和振动能量都对热容有贡献. 这种 C_{v,m} 随 T 的增加而变化的特点, 不是氢气所独有, 其它气体也有类似的情况. 能量均分定理是无法对此予以说明的, 只有用量子理论才能较好地处理这个问题,

这也是能量均分定理局限性的一个方面.

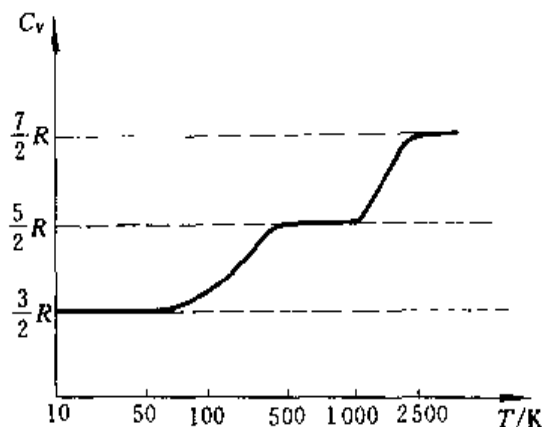


图 7-6 氢气的 $C_{v,m}$ - T 曲线

四 固体热容

运用能量均分定理还可以理解固体的热容问题,从中亦可以发现能量均分定理的局限性.

就固体来说,当温度发生变化时,其体积变化很小,压强变化不大,对外做功亦可略去不计,所以固体的热容不必区分定体热容和定压热容,而统称为固体热容 C .

设一固体是由 N 个原子组成的晶体,原子间好像是由弹簧相联系着.这些原子可在各自平衡位置附近作微小振动,但不考虑原子在晶体内的平移运动[图 7-7(a)].因此,晶体内部原子的热运动可以看作是它们在平衡位置附近的振动.铅、铝、金刚石就是这样的晶体.

由于原子的振动是在三维空间进行的,我们可以把原子的三维振动看作是三个一维振动的叠加.这样 N 个原子的三维振动,就可以看成是 $3N$ 个一维振动.由本节所述的自由度的概念已知,原子作一维振动时,它的平均振动能量共有两个独立的二次方项,一项属振动动能,另一项属振动势能,其自由度 $i=2$.所以,由能量均分定理可得原子作一维振动时的平均能量为 $\epsilon = 2 \times \frac{1}{2} kT = kT$.于是, N 个原子振动的平均能量则为

$$E = 3N\epsilon = 3NkT$$

已知 1 mol 的原子数为 N_A ,故 1 mol 晶体的原子振动的平均能量,即 1 mol 晶体的内能为

$$E = 3N_A kT = 3RT$$

根据摩尔热容的定义, N 个原子组成的理想晶体的摩尔热容为

$$C_m = \left(\frac{dQ}{dT} \right) = \frac{dE}{dT} = 3R \approx 25 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad (7-16)$$

上式表明,理想晶体的摩尔热容是不依赖于温度的常量.上式称为杜隆-珀蒂定律.这个定律是由杜隆和珀蒂于 1819 年在实验中首先发现的.表 7-3 给出几种固体在温度为 293 K 时的摩尔热容的实验值.从表中所列数据来看,实验值与理论值符合得相当好.温度越高,两者更为接近.但是,在低温的情况下,固体热容的实验值随温度的变化就比较显著了.图 7-7(b)

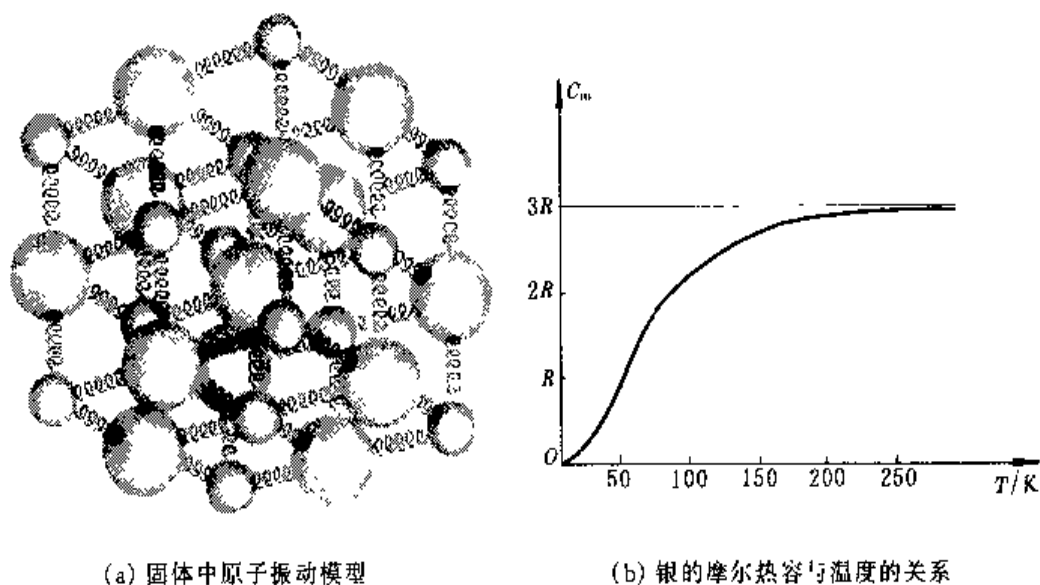


图 7-7 固体的热容

是银在不同温度下的 C_m 与 T 之间关系的实验曲线. 从图中可以看出, 在低温下, 银的摩尔热容显著地依赖于固体的温度. 特别是在极低温度的情况下, 固体热容下降的梯度如此之陡是杜隆-帕蒂定律所不能解释的. 这进一步表明了能量均分定理的局限性. 这个问题的解决也要依赖于在量子统计理论上发展起来的固体热容的量子理论^①.

表 7-3 几种固体摩尔热容的实验值(20 ℃)

金属	铝(Al)	铜(Cu)	镉(Cd)	金(Au)	铂(Pt)	银(Ag)	锡(Sn)
$C_m/(\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	25.7	24.7	25.6	26.6	26.3	25.7	27.8

7-5 麦克斯韦气体分子速率分布律

设容器中有 N 个理想气体分子, 当气体处于温度为 T 的平衡态时, 分子的平均平动动能为

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$$

如果我们把 $\sqrt{\overline{v^2}}$ 叫做分子的方均根速率, 用符号 v_{rms} 表示^②, 那么由上式可得分子的方均根速率为

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (7-17)$$

① 想进一步了解这方面内容的读者可参阅汪志诚编《热力学与统计物理学》(高等教育出版社出版).

② 方均根速率 v_{rms} 的下标是英文名称 root mean square speed 的缩写.

上式表明,对给定气体来说,当其温度恒定时,气体分子的方均根速率也是恒定的.实际上, N 个分子中任意一个分子的速率都可能与式(7-17)所表示的方均根速率相差很大.这一点是不难理解的.首先,分子数目是极其巨大的,在标准状态下 1 cm^3 的气体中约有 2.7×10^{19} 个分子;其次,分子处于无规则的热运动,这些巨大数目的作热运动的分子之间必然要产生极其频繁的碰撞,由于这种碰撞使得气体分子的速度大小和方向时刻不停地发生变化.就一个分子而言,其他分子对它的碰撞纯属偶然的,因此它的速度变化也是偶然的,它的速率可以具有从零到无限大^①之间任意可能的值.然而式(7-17)告诉我们,在给定温度 T 的情况下,分子的方均根速率却又是确定的.这就是说,在给定温度下,处于热平衡状态的气体,个别分子的速率是偶然的,而大量分子的速率是有一定分布规律的.气体分子按速率分布的统计定律最早是麦克斯韦^②于 1859 年在概率理论的基础上导出的,后来由玻耳兹曼从经典统计力学中导出.1920 年施特恩(O. Stern, 1888—1969)从实验中证实了麦克斯韦分子按速率分布的统计定律.我国物理学家葛正权在 1934 年也从实验中验明了这条定律.限于数学上的原因和本课程的要求,我们不准备来导出这个定律,而只介绍它的一些最基本的概念.

一 测定气体分子速率分布的实验

继施特恩之后,分子速率分布实验装置有了不少改进,图 7-8 是其中一种装置.全部装置放在高真空的容器中,图中 A 是产生金属蒸气分子的气源,分子

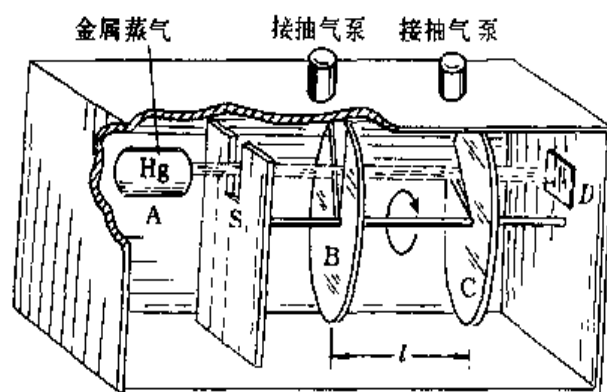


图 7-8 测定气体分子速率的实验装置

通过狭缝 S 后形成一条很窄的分子射线. B 和 C 是两个相距为 l 的共轴圆盘,盘

① 由狭义相对论知道,任何物体的速度是不能超过光速的,这里所说的分子速率无限大,其实是表示在数学上所研究的分子速率范围是涵盖着所有可能的速率.

② 麦克斯韦(J. C. Maxwell, 1831—1879),英国物理学家,是气体动理论的创始人之一.他的最伟大的成就是建立了经典电磁理论,并预言了电磁波的存在.

上各开一个很窄的狭缝,两狭缝成一个很小的夹角 θ ,约 2° 左右(为便于分析,图上此角是夸张放大画出的).D 是一个接受分子的显示屏.

当 B、C 两圆盘以角速度 ω 转动时,圆盘每转一周,分子射线通过 B 圆盘一次.由于在分子射线中分子的速率不同,分子由 B 到 C 的时间也不一样,所以并非所有通过 B 的分子都能通过 C 射到显示屏 D 上.只有分子速率 v 满足下列关系式的那些分子才能通过 C 而射到 D 上,即

$$\frac{l}{v} = \frac{\theta}{\omega}$$

或
$$v = \frac{\omega}{\theta} l$$

可见,圆盘 B 与 C 起了速率选择器的作用.当改变角速度 ω (或改变两圆盘间距离 l 、圆盘间夹角 θ) 时,可以使不同速率的分子通过.考虑到 B 和 C 的狭缝都具有一定的宽度,所以实际当 ω 一定时,能射到显示屏 D 上的,只是分子射线中速率在 $v \sim v + \Delta v$ 区间之内的分子.

实验指出,当圆盘以不同的角速度 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ 转动时,从屏上可测量出每次所沉积的金属层的厚度,各次沉积的厚度对应于不同速率区间内的分子数.比较这些厚度的比率,就可以知道在分子射线中,不同速率区间内的分子数与总分子数之比,即相对分子数 $\Delta N/N$.这个比值也就是气体分子处于速率区间 $v \sim v + \Delta v$ 的概率.

图 7-9 是直接从实验结果作出的金属气体分子射线中分子速率分布图线.其中一块块矩形面积表示分布在各速率区间内的相对分子数.

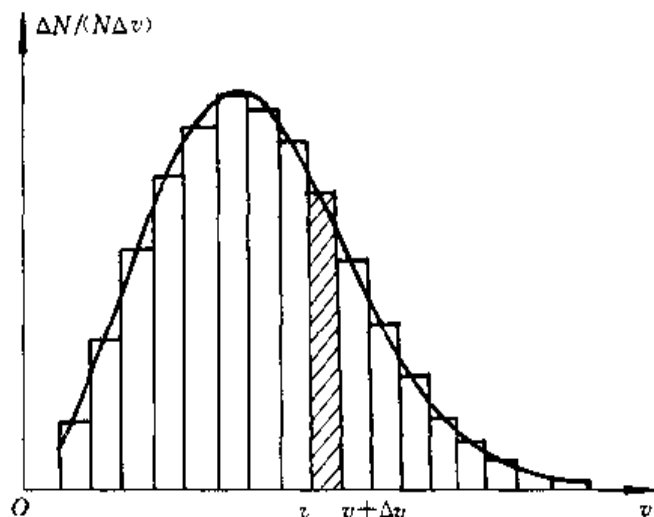


图 7-9 分子速率分布情况

实验结果表明,分布在不同速率区间内的相对分子数是不相同的,但在实验条件不变的情况下,分布在给定速率区间内的相对分子数则是完全确定的.尽管

个别分子的速率等于多少具有偶然性,但从整体来说,大量分子的速率分布却遵从一定的规律,这个规律叫分子速率的分布规律.值得一提的是,我国物理学家丁西林在1921年以热电子发射实验,直接验明高温下的电子和气体分子一样遵守这个速率分布规律,从而为经典电子理论提供了有力的佐证.

二 麦克斯韦气体分子速率分布定律

麦克斯韦根据气体在平衡态下,分子热运动具有各向同性的特点,运用概率的方法,导出了在平衡态下气体分子按速率的分布规律.这里我们只介绍其最基本的内容.

设在平衡状态下,一定量气体的分子总数为 N ,其中速率在 $v \sim v + \Delta v$ 区间内的分子数为 ΔN .从上面的实验知道, $\Delta N/N$ 与速率区间有关,在不同的速率区间,它的数值不同(图7-9).如果所取的速率区间 Δv 越大,则 $\Delta N/N$ 就越大.当取 $\Delta v \rightarrow 0$ 时,则 $\Delta N/N\Delta v$ 的极限值就变成 v 的一个连续函数了,并用 $f(v)$ 表示,如图7-10所示.我们把这一函数 $f(v)$ 叫做速率分布函数,即

$$f(v) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{N\Delta v} = \frac{1}{N} \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta v} = \frac{1}{N} \frac{dN}{dv}$$

于是有

$$\frac{dN}{N} = f(v)dv \quad (7-18)$$

式中 dN/N 为 N 个气体分子中,在速率 v 附近处于速率区间 dv 内的分子数 dN 与总分子数 N 的比值.这个比值也表示分子在速率 $v \rightarrow v + dv$ 区间内的概率.于是速率分布函数的物理意义又能表述为:气体分子的速率处于 v 附近单位速率区间的概率,也叫做概率密度.

1859年麦克斯韦首先从理论上导出在平衡态时,气体分子的速率分布函数的数学形式为

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \quad (7-19)$$

式中 T 为气体的温度, m 为分子的质量, k 为玻耳兹曼常量.这样,式(7-18)可写成

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv \quad (7-20)$$

上式给出了一定量的理想气体,当它处于平衡态时,分布在速率区间 $v \rightarrow v + dv$ 的相对分子数 dN/N ,或者说给出了分子处于此速率区间的概率.这个气体分子速率分布规律叫做麦克斯韦速率分布定律.图7-10是分布函数 $f(v)$ 与 v 的图线,图中的矩形面积,表示在速率区间 $v \rightarrow v + dv$ 的相对分子数,或分子处于此速率区间的概率.如果速率区间取得越小,则矩形面积数目就越多,这无数个

矩形面积的总和就越接近于分布曲线下方的总面积. 曲线下的总面积表示速率分布在由零到无限大整个区间内的全部相对分子数的总和, 也即分子具有各种速率的概率的总和, 应当等于 100%. 麦克斯韦气体分子速率分布定律是气体动理论的基本规律之一.

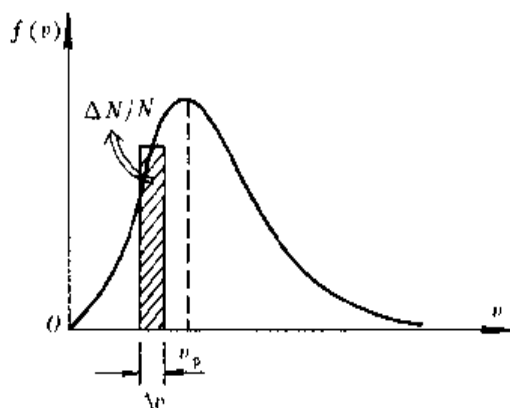


图 7-10 $f(v)$ 与 v 的关系曲线

三 三种统计速率

从速率分布曲线可以看出, 气体分子的速率可以取自零到无限大之间的任一数值, 但速率很大和很小的分子, 其相对分子数或概率都很少, 而具有中等速率的分子, 其相对分子数或概率却很大. 这里讨论三种具有代表性的分子速率, 它们是分子速率的三种统计值.

1 最概然速率 v_p

从 $f(v)$ 与 v 的关系曲线中可以看到, $f(v)$ 有一极大值, 与 $f(v)$ 的极大值相对应的速率叫做最概然速率, 并用 v_p 表示 (图 7-10). v_p 的物理意义是: 如把气体分子的速率分成许多相等速率间隔, 则气体在一定温度下分布在最概然速率 v_p 附近单位速率间隔内的相对分子数最多. 也就是说, 分子分布在 v_p 附近的概率最大. 由数学可知

$$\left. \frac{df(v)}{dv} \right|_{v=v_p} = 0$$

把式 (7-19) 代入上式, 可求得最概然速率为

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \approx 1.41 \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

由于气体摩尔质量 $M = mN_A$, 摩尔气体常量 $R = N_A k$, 故上式亦可写成

$$v_p = 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M}} \quad (7-21)$$

2 平均速率 \bar{v}

若一定量气体的分子数为 N , 则所有分子速率的算术平均值叫做平均速率, 用 \bar{v} 表示. 如取 dN 代表气体分子速率在 $v \rightarrow v + dv$ 区间内的分子数, 按照算术平均值的计算方法, 有

$$\bar{v} = \frac{v_1 dN_1 + v_2 dN_2 + \cdots + v_i dN_i + \cdots + v_n dN_n}{N}$$

由于分子速率可以在零至无限大之间取值, 故平均速率可由积分运算得到, 为

$$\bar{v} = \frac{\int_0^{\infty} v dN}{N}$$

把式(7-19)代入上式, 有

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^3 dv$$

如取 $\alpha = m/2kT$, 式中积分为

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha v^2} v^3 dv = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^3 dx$$

利用已有定积分公式

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^3 dx = \frac{1}{2\alpha^2}$$

则上式的积分为

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha v^2} v^3 dv = \frac{1}{2\alpha^2} = 2 \left(\frac{kT}{m} \right)^2$$

于是平均速率为

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \approx 1.60 \sqrt{\frac{RT}{M}} \quad (7-22)$$

3 方均根速率 v_{rms}

分子速率平方的平均值为

$$\overline{v^2} = \frac{\int_0^{\infty} v^2 dN}{N}$$

同样把式(7-20)代入上式, 经积分运算^①, 可得速率平方的平均值为

$$\overline{v^2} = \frac{3kT}{m}$$

由上式可得气体分子的方均根速率 v_{rms} 为

^① 利用已有积分公式 $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^4 dx = \frac{3}{8} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{1/2}$.

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (7-23)$$

这与由平均平动动能与温度关系式(7-17)所得是相同的。

由上面的结果可以看出,气体的三种速率都与 \sqrt{T} 成正比,与 \sqrt{m} (或 $\sqrt{\mu}$)成反比.在数值上 v_{rms} 最大; v 次之; v_p 最小,如图7-11所示.在计算分子的平均平动动能时,我们已经用了方均根速率.在讨论速率的分布时,要用到最概然速率,因为它是速率分布曲线中的极大值所对应的速率.在讨论分子的碰撞时,将要用到平均速率.

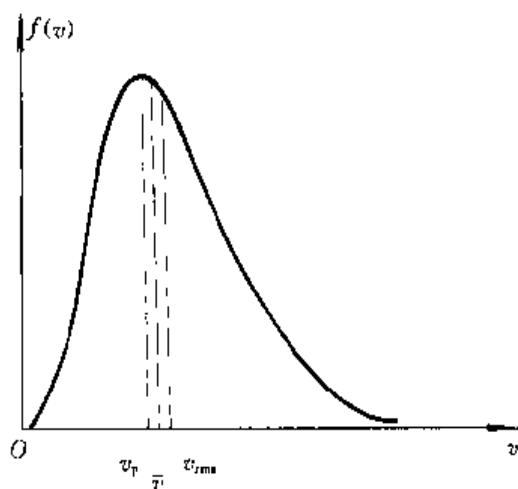


图 7-11 三种速率

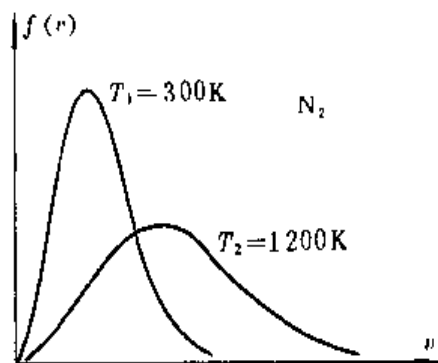


图 7-12 N_2 分子在两种温度下的速率分布

以上三种速率都具有统计平均的意义,都反映了大量分子作热运动的统计规律.对给定的气体来说,它们只依赖于气体的温度.当温度升高时,气体分子热运动加剧,其中速率较小的分子数减少,而速率较大的分子数则有所增加,分布曲线中的最高点向速率大的方向移动.图7-12给出 N_2 气分子在不同温度下的速率分布图线.温度升高时(图中 $T_2 > T_1$),曲线显得较为平坦.

例 计算在 27°C 时,氢气和氧气分子的方均根速率 v_{rms} .

解 已知氢气和氧气的摩尔质量分别为 $M_{\text{H}} = 0.002 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, $M_{\text{O}} = 0.032 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$. 又知 $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$, $T = 300 \text{ K}$. 把它们分别代入方均根速率公式 $v_{\text{rms}} = (3RT/M)^{1/2}$, 可得氢分子的 $v_{\text{rms}} = 1.93 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 氧分子的 $v_{\text{rms}} = 483 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

从以上数值可以看出,在通常温度下气体分子的方均根速率是很大的,一般均可达数百米每秒,这个值与气体中的声速具有相同的数量级.

在力学中我们已经知道,地球表面附近的物体要脱离地球引力场的束缚,其逃逸速率为 $11.2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. 这个速率约为氢分子的方均根速率的6倍.这样一来似乎在地球的大气层中有可能存在大量的自由氢分子.然而,从观测中发现在地球的大气层中几乎没有自由的氢分子.

这是为什么呢?

从麦克斯韦分子速率分布曲线图 7-11 可以看出,有相当数量的一部分气体分子的速率比方均根速率要大得多,当这些分子的速率到达逃逸速率时,它们将逃逸出地球的大气层.因为不断有氢分子逃出大气层,所以在地球大气层中自由的氢分子就为数很少了,可以认为大气层不存在自由的氢分子.在另一方面,氧分子的方均根速率只约为氢分子的方均根速率的 $1/4$,而只有很少的氧分子能达到逃逸速率,所以在地球大气层中能找到较多的自由氧分子.同样,与氧分子质量差不多的氮分子,也很少能逃逸出地球大气层.

此外还可提出,在 27°C 时,气体分子的方均根速率(或平均速率)具有数百米每秒这一计算结果,早期曾引起一些人对气体动理论的怀疑和责难.当时,因为 $\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{3RT/M}$ 是由气体压强公式(7-3)和理想气体物态方程式(7-5)得出的,而气体压强公式最早由克劳修斯从分子作无规热运动这一观点出发导出的,因此有人就下述现象向克劳修斯提出质疑.在离开我们几米远的地方,打开一瓶酒精的瓶塞,我们并不能立刻嗅到酒精味,而要经过好几秒甚至更长的时间才能嗅到酒精味.既然,在 27°C 时,氧气分子的平均速率就有数百米每秒,为何酒精分子扩散几米远却要几秒的时间,甚至更长呢?这是否意味着克劳修斯关于分子作无规热运动的观点以及导出的气体压强公式是不正确的呢?

克劳修斯坚持分子作无规热运动的观点.他认为如果想象分子在气体中运动时,不与其他分子发生碰撞,那么分子在一秒钟内就要经过几百米的直线距离,我们应当在瓶塞打开后极短时间内嗅到酒精味.但是,气体内分子的数密度(n)是非常巨大的,分子在气体中运动时,必然要与其他分子发生频繁的碰撞,从而使分子经历曲折的路径,以致其平均速率虽很大而扩散速率却很小.克劳修斯为说明这类分子碰撞问题,还提出了分子碰撞次数和自由程的概念,它不仅解决了上述质疑,而且使气体动理论建立在更加坚实的基础上,并向前推进了一步.在科学史上,像这一类因受到质疑而使理论获得发展的事例是很多的.关于分子碰撞次数与自由程等概念以及如何用它们来解决分子碰撞问题,将在本章第 7-7 节中介绍.

* 7-6 玻耳兹曼能量分布律 等温气压公式

前面介绍的麦克斯韦气体分子速率分布律是气体处于平衡态时分子的速率分布规律.在讨论中,我们没有论及力场(如重力场)对气体中分子的影响.这一节我们将讨论这个问题.

— 玻耳兹曼能量分布律

分子的平均动能为 $\epsilon_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$. 因此,麦克斯韦分子速率分布公式

$$dN = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv$$

中,因子 $e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$ 可以写成 $e^{-\epsilon_k/kT}$, 于是麦克斯韦速率分布律可为

$$dN = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\epsilon_k/kT} 4\pi v^2 dv \quad (7-24)$$

如果把气体放在力场中,那么气体分子不仅有动能,而且还有势能.大家知道,动能是速率的函数,即 $\epsilon_k = \epsilon_k(v)$,而势能则是分子在空间的位置坐标的函数,即 $\epsilon_p = \epsilon_p(x, y, z)$.例如,在重力场中分子的势能为 $\epsilon_p = mgz$.由于在有力场的情况下,分子同时具有动能和势能,因此我们既需考虑分子按速率的分布(即动能分布),也需考虑分子按空间位置的分布(即势能分布).

为此,玻耳兹曼认为麦克斯韦速率分布公式[式(7-24)]中因 $f e^{-\epsilon_k/kT}$ 里的 ϵ_k ,应当用 $\epsilon_k + \epsilon_p$ 来替代.从这个观点出发,他运用统计方法得到,分子速度处于在 $v_x \rightarrow v_x + dv_x, v_y \rightarrow v_y + dv_y, v_z \rightarrow v_z + dv_z$ 区间内,坐标处于 $x \rightarrow x + dx, y \rightarrow y + dy, z \rightarrow z + dz$ 区间的空间体积元 $dV = dx dy dz$ 内的分子数为

$$dN_{v_x, v_y, v_z, x, y, z} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{(\epsilon_k + \epsilon_p)}{kT}} dv_x dv_y dv_z dx dy dz \quad (7-25)$$

式中 n_0 表示势能 $\epsilon_p = 0$ 处单位体积内所含各种速度的分子数.上式是在平衡态下,气体分子按能量的分布规律,叫做玻耳兹曼能量分布律.

从式(7-25)中可以看出,当气体的温度给定时,在确定的速度区间和坐标区间内,分子的能量(即 $\epsilon = \epsilon_p + \epsilon_k$)越大,分子数就越小.这表明,从统计意义上来看,气体分子占据能量较低状态的概率比占据能量较高状态的概率要大.

由于在体积元 dV 中各种速度的分子都有,因此若将式(7-25)对速度积分,可得在坐标 x, y, z 附近空间体积元 dV 中各种速率的分子数为

$$dN_{x, y, z} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\epsilon_k}{kT}} dv_x dv_y dv_z \right] e^{-\frac{\epsilon_p}{kT}} dx dy dz \quad (7-26)$$

由于 $\epsilon_k = \frac{1}{2} m v^2$, 且 $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, 故上式中的积分②可写成

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m v_x^2 / 2kT} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m v_y^2 / 2kT} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m v_z^2 / 2kT} dv_z = \left(\frac{2\pi kT}{m} \right)^{3/2}$$

把它代入式(7-26),得

$$dN_{x, y, z} = n_0 e^{-\epsilon_p/kT} dx dy dz$$

因为在空间坐标 x, y, z 附近单位体积中具有各种速率的分子数即分子的数密度为

① 由 $\epsilon_k = \frac{1}{2} m v^2$, 有 $d\epsilon_k = m v dv$, 把它们代入式(7-24)中可得

$$dN = N \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} e^{-\epsilon_k/kT} \sqrt{\epsilon_k} d\epsilon_k$$

这是无力场时气体分子按平动动能分布的公式.

② 由已知积分公式 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 t^2} dt = \left(\frac{\pi}{a} \right)^{1/2}$, 令 $a = (m/2kT)$, 有 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m v_x^2 / 2kT} dv_x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 v_x^2} dv_x = \left(\frac{2\pi kT}{m} \right)^{1/2}$.

$$n = \frac{dN_{x,y,z}}{dV} = \frac{dN_{x,y,z}}{dx dy dz}$$

于是上式即是

$$n = n_0 e^{-\epsilon_p/kT} \quad (7-27)$$

在重力场中,地球表面附近分子的势能为 $\epsilon_p = mgz$,式(7-27)可写为

$$n = n_0 e^{-mgz/kT} \quad (7-28)$$

式中 n_0 和 n 分别是 $z=0$ 和 $z=z$ 处分子的数密度, T 为气体的温度. 式(7-28)是重力场中气体分子数密度随高度变化的公式. 这个公式也叫做重力场中气体分子数密度公式. 从式(7-28)可以看出,重力场中气体分子的数密度随高度的增加按指数规律减小;分子质量 m 越大,分子数密度减小得越迅速;而温度较高的气体,其分子数密度随高度的减小就比较缓慢,如图 7-13 所示. 为什么会有这种情况呢? 这是因为温度越高,气体分子的无规热运动越剧烈,剧烈的热运动降低了分子数密度随高度的变化,从而使分子数密度减小得比较缓慢些.

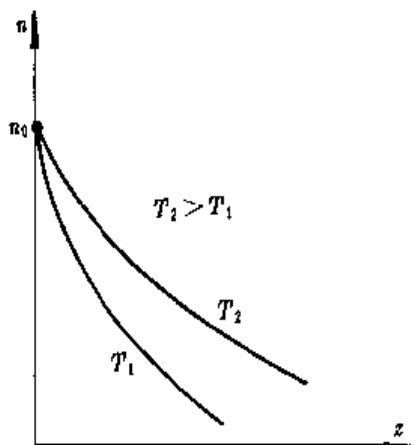


图 7-13 分子数密度随高度递减与温度的关系

在式(7-28)中,除 k 以外,其他几个量都可以由实验测定. 因此,如测出在 $z=0$ 和 $z=z$ 处分子的数密度为 n_0 和 n ,那么由式(7-28)可算得玻耳兹曼常量 k ,从而可算得阿伏伽德罗常数 N_A . 1908 年,法国物理学家佩兰(J. B. Perrin, 1870—1942)第一次利用式(7-28)比较精确地测出了 k . 下面简略地介绍一下这方面的情况.

我们知道气体分子是很小的,而分子的数密度又十分大,因此要直接数出分子的数目是很困难的. 佩兰观察一种悬浮在水中的胶态粒子(如藤黄微粒),这种胶态粒子的密度(即单位体积的质量)比液体的密度大,该胶态粒子虽然很小,但用显微镜可以观察到,并且可以计数. 佩兰从实验中发现粒子数随高度的变化符合式(7-28)按指数衰减的规律. 于是,测出两已知高度处的粒子数密度 n_0 和 n ,再测出粒子的质量 m 和液体的温度,即可由 $k = R/N_A$ 算出阿伏伽德罗常数. 佩兰测得的实验值为 $N_A = 6.5 \times 10^{23} \sim 7.2 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. 现代对阿伏伽德罗常数的精确测量值为 $6.022 136 7 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$,可见佩兰的实验已相当准确了. 这里顺便提一下,在佩兰实验中,所有粒子必须是完全相同的,粒子的质量必须能够测出,单位体积中的

粒子数必须能较准确地数出,所有这些在当时确实是很困难的.佩兰采用巧妙的实验技术都将它们逐一加以解决了,至于具体方法就不在此叙述了.

最后还要指出,佩兰实验还验证了1905年爱因斯坦提出的关于布朗运动的分子理论,终于证实了分子运动的实在性,这对当时确立气体动理论是极有力的支持.为此佩兰于1926年获得了诺贝尔物理学奖金.

二 重力场中等温气压公式

我们知道地球表面覆盖着一层大气,而且大气的密度是随高度变化的,高空处气体的密度较之地面要稀疏.现假定大气是理想气体,并忽略大气层上下的温度以及重力加速度的差异.

把式(7-28)代入理想气体物态方程 $p = nkT$ 中,可得

$$p = p_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} \quad (7-29)$$

式中 p_0 和 p 分别表示 $z=0$ 和 $z=z$ 处大气的压强.上式称为重力场中的等温气压公式.

应当指出,实际上大气层中气体的温度是随高度而有所变化的,由式(7-29)所得的结果,与实际情况略有出入.但是,在两点间的高度差不大时,式(7-29)与实际情况仍是十分接近的.

由式(7-29)可得

$$z = \frac{kT}{mg} \ln \frac{p_0}{p}$$

由于 $k/m = R/\mu$,所以上式亦可写成

$$z = \frac{RT}{\mu g} \ln \frac{p_0}{p} \quad (7-30)$$

在航测、登山、地质考察等活动中,可利用式(7-30)来估计某处的高度.



玻耳兹曼 (Ludwig Boltzmann, 1844—1906), 奥地利理论物理学家, 经典统计物理学的奠基人之一. 他提出的玻耳兹曼能量分布律是经典统计的基础. 他给予热力学第二定律以统计解释, 提出著名的玻耳兹曼关系式. 他还用热力学定律从理论上导出黑体的辐射能量密度与其温度的四次方成正比的新特藩-玻耳兹曼定律.

7-7 分子平均碰撞次数和平均自由程

前面我们讨论了分子对给定平面的碰撞, 得出了气体的压强公式. 除了分子对给定平面碰撞外, 分子间的碰撞也是气体动理论的重要内容之一. 分子间通过碰撞来实现动量、动能的交换, 而气体由非平衡态达到平衡态的过程, 就是通过分子间的碰撞来实现的. 例如, 容器中气体各个地方的温度不相同, 通过分子间的碰撞来实现动能的交换, 从而使容器内温度达到处处相等.

设想气体中有一个分子,在时刻 t 与 A 处分子发生碰撞,经 Δt 时间后,到达 B 处,如图 7-14 所示.在此时间里,这个分子在前进过程中要与其它分子发生非常频繁的碰撞,每发生一次碰撞,分子的速度不仅大小会变化,而且方向还会变化,其路径是曲折的,因此,分子从 A 处到达 B 处要经历较长的时间.分子两次相邻碰撞之间自由通过的路程,叫做自由程.从图 7-14 可以看出,分子自由程有长有短,似乎没有规律可循.但从大量分子无规热运动观点来看,自由程的长短分布仍然是有规律的^①.

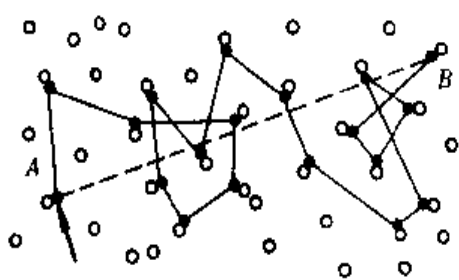


图 7-14 分子碰撞

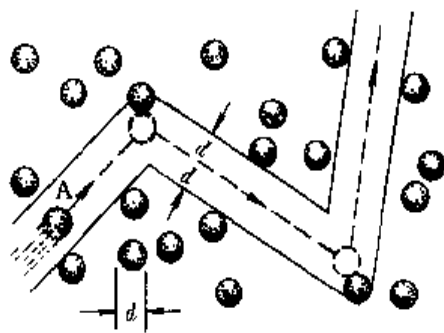


图 7-15 分子碰撞次数的计算

在单位时间内分子与其他分子碰撞的平均次数叫做分子的每秒平均碰撞次数(或称平均碰撞频率),用 \bar{Z} 表示.分子在连续两次碰撞间所经过的路程的平均值叫做平均自由程,用 $\bar{\lambda}$ 表示.

平均自由程 $\bar{\lambda}$ 与每秒平均碰撞次数 \bar{Z} 之间存在着下列关系

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}} \quad (7-31)$$

式中 \bar{v} 为分子的平均速率.上式表明,分子间的碰撞越频繁,即 \bar{Z} 越大,平均自由程 $\bar{\lambda}$ 越小.

为了使问题简化,在讨论分子的碰撞时,先假设分子中只有一个分子 A 以平均速率 \bar{v} 运动,其余分子都看成是静止不动的,并把分子看成是具有直径为 d 的弹性小球,分子 A 与其他分子碰撞时,都是完全弹性碰撞,如图 7-15 所示.

在分子 A 的运动过程中,分子 A 的球心轨迹是一系列折线,凡是其他分子的球心离开折线的距离小于 d (或等于 d)的,它们都将和分子 A 发生碰撞.如果以 1 s 内分子 A 的球心所经过的轨迹为轴,以 d 为半径作一圆柱体,由于圆柱体的长度为 \bar{v} ,所以圆柱体的体积是 $\pi d^2 \bar{v}$.这样,球心在这圆柱体内的其他分子,

^① 读者如有兴趣可参阅:复旦大学物理学编写组编《物理学》(上册)第二版第 420 页(高等教育出版社出版).

均将与分子 A 发生碰撞. 设分子数密度为 n , 则圆柱体内的分子数为

$$\bar{Z} = \pi d^2 \bar{v} n \quad (7-32)$$

显然, 这就是分子 A 在 1 s 内和其他分子发生碰撞的平均次数, πd^2 也叫碰撞截面.

在推导式(7-32)的过程中, 曾作如下假设: 分子 A 以平均速率 \bar{v} 运动, 而其他分子都没有运动, 这个假设与实际情况有很大差别. 实际上, 一切分子都在不停地运动着. 另外, 各个分子运动的速率各不相同, 且遵守麦克斯韦气体分子速率分布定律. 考虑到以上因素, 必须对式(7-32)加以修改. 修改后, 分子的平均碰撞次数增大到式(7-32)所给数值的 $\sqrt{2}$ 倍, 即

$$\bar{Z} = \sqrt{2} \pi d^2 \bar{v} n \quad (7-33)$$

上式表明, 平均碰撞次数 \bar{Z} 与分子数密度 n 、分子平均速率 \bar{v} 成正比, 也与分子直径 d 的平方成正比.

把式(7-33)代入式(7-31), 得

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} \quad (7-34)$$

上式表明, 平均自由程与分子碰撞截面、分子数密度成反比, 而与分子平均速率无关.

因为 $p = nkT$, 式(7-34)还可以写成

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p} \quad (7-35)$$

从上式可以看出, 当气体的温度给定时, 气体的压强越大 (即气体越密集), 分子的平均自由程越短; 反之, 若气体压强越小 (即气体越稀疏), 分子的平均自由程越长.

应该指出, 在推导平均碰撞次数的过程中, 我们把气体分子当作直径为 d 的弹性小球, 并且把分子间的碰撞看成完全弹性碰撞, 这样求出的分子直径并不能准确表示分子的大小. 首先, 因为分子不是真正的球体; 其次, 分子的碰撞过程也并非完全弹性碰撞. 分子是一个复杂的系统, 分子之间的相互作用也很复杂, 所以, 用式(7-35)计算出来的分子直径 d , 一般称为分子的有效直径.

根据计算, 在标准状态下, 各种气体的每秒平均碰撞次数 \bar{Z} 的数量级为 10^9 s^{-1} , 平均自由程 $\bar{\lambda}$ 的数量级为 $10^{-8} \sim 10^{-7} \text{ m}$ 左右, 也就是说, 一个分子在 1 s 内平均要与其他分子发生约几十亿次碰撞. 由于频繁的碰撞, 使得分子平均自由程非常之短. 表 7-4 给出了在 0°C 和 $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 下, 几种气体分子的平均自由程和分子的有效直径. 表 7-5 给出了不同压强下, 空气分子的平均自由程.

从表 7-5 可以看出, 0°C 、 $1.33 \times 10^{-2} \text{ Pa}$ 时, 空气分子的平均自由程为 0.5 m . 这个值大于日常生活中的容器 (像杜瓦瓶) 的线度. 如把空气装在这个容

表 7-4 在 $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ 和 $1.013 \times 10^5\text{ Pa}$ 下,几种气体分子的平均自由程和有效直径

气体	氢	氮	氧	空气
λ/m	1.123×10^{-7}	0.599×10^{-7}	0.647×10^{-7}	7.0×10^{-8}
d/m	2.30×10^{-10}	3.10×10^{-10}	2.98×10^{-10}	3.10×10^{-10}

表 7-5 在 $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时,不同压强下空气分子的平均自由程

p/Pa	1.013×10^5	1.33×10^2	1.33	1.33×10^{-2}	1.33×10^{-4}
λ/m	6×10^{-8}	5×10^{-5}	5×10^{-3}	0.5	50

器中,空气分子彼此间碰撞就很少了,分子只与容器壁发生碰撞.我们就说该容器内腔已处于“真空”状态.虽然这时容器中仍有大量分子存在,但其数密度 n 已很小.可见,容器中的真空度越高,气体分子的平均自由程越长.

例 试估计下列两种情况下空气分子的平均自由程:(1) 273 K , $1.013 \times 10^5\text{ Pa}$ 时,(2) 273 K , $1.333 \times 10^{-3}\text{ Pa}$ 时.

解 空气中气体的成份绝大部分是氧和氮分子.它们有效直径 d 的数值均在 $3.10 \times 10^{-10}\text{ m}$ 附近.把已知数据代入式(7-35),可得

(1) 在 $T = 273\text{ K}$, $p = 1.013 \times 10^5\text{ Pa} = 1.013 \times 10^5\text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$ 时,

$$\bar{\lambda} = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 273}{\sqrt{2}\pi \times (3.10 \times 10^{-10})^2 \times 1.013 \times 10^5}\text{ m} = 8.71 \times 10^{-8}\text{ m}$$

(2) 在 $T = 273\text{ K}$, $p = 1.333 \times 10^{-3}\text{ Pa} = 1.333 \times 10^{-3}\text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$ 时,

$$\bar{\lambda} = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 273}{\sqrt{2}\pi \times (3.10 \times 10^{-10})^2 \times 1.333 \times 10^{-3}}\text{ m} = 6.62\text{ m}$$

$\bar{\lambda} = 6.62\text{ m}$,这个值是很大的.所以在通常的容器中,在高度真空($p = 1.33 \times 10^{-3}\text{ Pa}$)的情况下,分子间发生碰撞的概率是很小的.

7-8 气体的迁移现象

我们知道气体处于平衡态时,各部分的温度和压强都是相同的,气体内各气层之间没有相对运动.前面几节我们只讨论了气体处于平衡态时的性质,但是在许多实际问题中,气体常处于非平衡状态.也就是说,气体内或许各部分的温度不相等,或许各部分的压强不相同,或许各气层之间有相对运动,或许这三者同时存在.在这些非平衡态的情况下,气体内将有能量、质量或动量从一部分向另一部分定向迁移.这就是在非平衡状态下气体的迁移现象.迁移现象有粘滞现象,热传导现象和扩散现象等.下面分别对它们简要地作一些介绍.

一 粘滞现象

在第二章里我们曾指出,物体在流体中运动时要受到粘滞力的作用.气体中

各气层间有相对运动时,气层间也有粘滞力的作用.这种粘滞力是气体内部各气层之间相互作用的力.粘滞力是成对出现的,它可使流动速度较快的气层变慢,而使流动速度较慢的气层变快.这种由于气体内部各气层间存在相对流动速度,而使气体内部产生流动速度变化的现象,叫做气体粘滞现象.在如图 7-16 所示的气体中,气体的温度和分子数密度均为恒定值,气体可分成许多平行于 Oyz 平

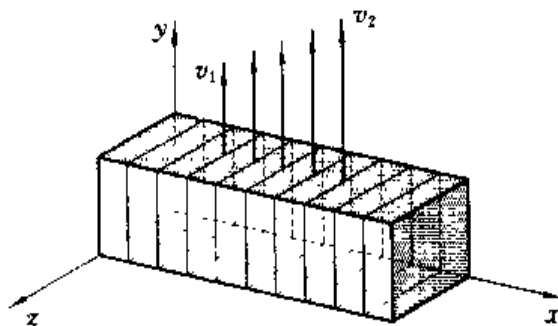


图 7-16 气体中各气层的流动速度不同

面的气层,但各气层在 y 轴方向的流动速度是不同的,且沿 x 轴的正向增大.如图 7-17 所示,在 x 轴上取 A 、 B 两点,点 A 处气层的流动速度为 v ,点 B 处气层的流动速度为 $v + \Delta v$, A 、 B 两点间的距离为 Δx ,那么 $\Delta v / \Delta x$ 就称为速度梯度,它表示距离为 Δx 的两气层流动速度变化的情况.设想在 A 、 B 两点之间取一小面积 ΔS , ΔS 与 x 轴相垂直.由图可知, ΔS 左边气层的流动速度较 ΔS 右边气层的流动速度要小.由实验可知, ΔS 两边的气层要受到一对等值反向的粘滞力.作用在 ΔS 左边气层的粘滞力使该气层的流动速度变大,而 ΔS 右边的气层则因粘滞力而使流动速度变小.实验还指出,气层间粘滞力的大小与气层的面积 ΔS 成正比,与两气层间流动速度的梯度 $\Delta v / \Delta x$ 成正比,因此有

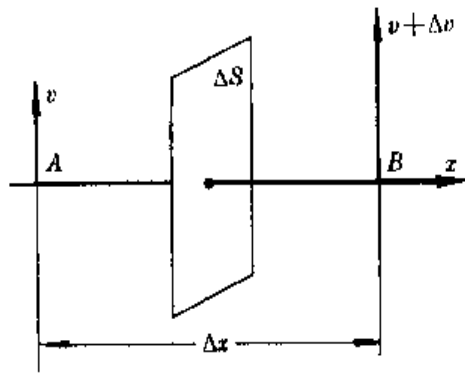


图 7-17 导出气体粘滞力公式用图

$$f = \eta \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta S \quad (7-36)$$

式中 η 叫做粘度(又称粘性系数).在国际单位制中, η 的单位是 $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.气体粘度与气体的性质和状态有关,可由实验测定.

从气体动理论的观点来看,气体流动时,气体分子除具有热运动的速度外,还具有定向运动速度(即气体的流动速度).由于我们假定气体的温度处处相等(即气体分子的热运动平均速率 \bar{v} 为一常量),气体分子数密度处处相等(即

在任意时间内, ΔS 两侧的分子通过 ΔS 所交换的分子数亦相等. 但是 ΔS 右侧分子的定向运动速度比 ΔS 左侧分子的定向运动速度要大一些, 也就是说 ΔS 右侧分子定向运动的动量大于 ΔS 左侧分子定向运动的动量. 因此, 当 ΔS 右侧的分子穿过 ΔS 进入左侧后, 分子将把较大的定向运动的动量通过与右侧分子的碰撞而带给左侧的气层, 同时, ΔS 左侧的分子穿过 ΔS 进入右侧后, 则把较小的定向运动的动量带给右侧的气层. 由于分子的热运动, ΔS 左右两侧分子不断地交换, 致使 ΔS 右侧气层分子定向运动的动量不断地转移给左侧气层, 结果使右侧气层的定向运动动量有所减少, 而左侧气层的定向运动动量有相应的增加. 从宏观上来看, 这就表现为有粘滞力作用在右侧气层上, 使气层的流动速度有所减小, 而与之相等的粘滞力则使左侧气层的流动速度有相应的增加. 总之, 从气体动理论的观点来看, 气体粘滞现象的微观本质是分子定向运动动量的迁移, 而这种迁移是通过气体分子无规热运动来实现的.

二 热传导现象

设气体内各气层之间没有相对流动速度, 且各处气体分子数密度均相同, 但气体内存在温度差, 这时就有热量从温度较高的区域向温度较低的区域传递. 这种由于温度差而产生的热量传递现象, 叫做热传导现象.^①

如图7-18所示, 气体的温度沿 x 轴正向逐渐升高. 设通过点 A 且垂直于 x 轴的平面上各点温度为 T_1 , 通过点 B 处且垂直 x 轴的平面上各点温度为 T_2 , 且有 $T_2 > T_1$. 点 A 和点 B 的距离为 Δx , 则 $\Delta T / \Delta x$ 为 A 、 B 两点间的温度梯度. 由于 $\Delta T = T_2 - T_1 > 0$, 故 $\Delta T / \Delta x$ 为正值. 若在 A 、 B 两点间取一小面积 ΔS , 且 ΔS 与 x 轴相垂直, 由实验可知, 在 Δt 时间内通过 ΔS 的热量 ΔQ 与温度梯度 $\Delta T / \Delta x$ 成正比, 与面积 ΔS 成正比, 有

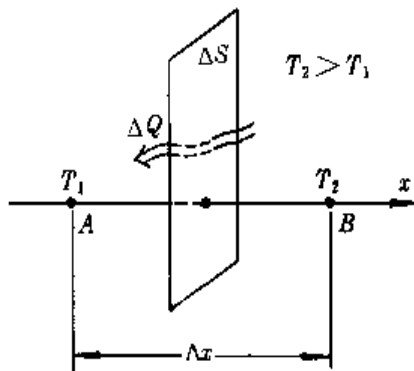


图 7-18 导出热传导公式用图

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\kappa \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta S \quad (7-37)$$

式中负号表示热量传递的方向与温度梯度的方向相反, κ 称为热导率. 热导率可由实验测定. 在国际单位制中, 热导率的单位为 $\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$. 顺便指出, 上式

^① 气体热传导现象的一个实用例子是保温瓶内两玻璃夹层间的气体热传导与气体的压强、气体分子的平均自由程有关. 如有兴趣, 可阅马文蔚等主编《物理学原理在工程技术中的应用》之“保温瓶的真空度”(高等教育出版社出版).

虽是讨论气体热传导的公式,但对液体和固体也是适用的。

从气体动理论观点来看,当 ΔS 右侧气体的温度 T_2 高于左侧气体的温度 T_1 时,右侧气体分子的平均动能要大于左侧气体分子的平均动能.因为气体分子的数密度 n 处处相等,所以在 Δt 时间内,由于热运动的原故, ΔS 两侧气体穿过 ΔS 交换的分子数亦应相等.但右侧分子的平均动能比左侧的大,因而 ΔS 左右两侧的气体分子穿过 ΔS 交换的平均动能是不等值的.子是从宏观来看,就有能量从温度高的地方传递到温度低的地方.我们可以说,气体热传导现象的微观本质是分子热运动能量的定向迁移,这种迁移是通过分子无规热运动来完成的.

三 扩散现象

在自然界中气体的扩散现象是常见的.例如,一种气体可以渗透到另一种气体中去.或者从气体某一部分渗透到其他部分,前者称为互扩散,后者称为自扩散.使气体产生扩散的原因是多方面的,容器中气体的分子数密度不同、温度不同,或者气体中各气层流动速度不同都可以产生气体的扩散.下面我们只讨论由于分子数密度不同而产生的扩散.

如图 7-19 所示,有一种气体,其分子数密度 n 沿 x 轴正向增加.设在点 A 处分子数密度为 n_1 ,在点 B 处分子数密度为 n_2 ,且 $n_2 > n_1$,点 A 和点 B 之间的距离为 Δx ,则 $\Delta n/\Delta x$ 为 A 、 B 两点间的分子数密度梯度.由于 $\Delta n = n_2 - n_1 > 0$,故 $\Delta n/\Delta x$ 为正值.若在 A 、 B 两点间取一小面积 ΔS ,且 ΔS 与 x 轴相垂直,由实验可知,在 Δt 时间内通过 ΔS 的分子数 ΔN 与分子数密度梯度 $\Delta n/\Delta x$ 成正比,与面积 ΔS 成正比,有

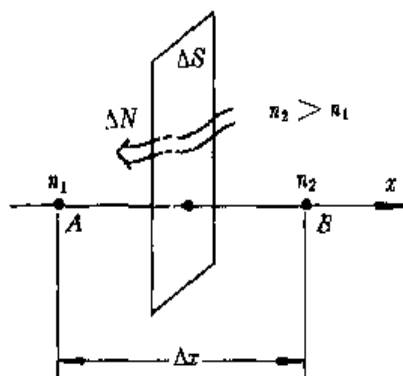


图 7-19 导出气体的扩散公式用图

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -D \frac{\Delta n}{\Delta x} \Delta S \quad (7-38)$$

式中负号表示分子扩散的方向与分子数密度梯度的方向相反, D 称为扩散系数.在国际单位制中,扩散系数的单位为 $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

如以分子质量 m 乘式(7-38),上式可写成

$$\frac{\Delta m'}{\Delta t} = -D \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \Delta S \quad (7-39)$$

其中 $m' = Nm$, $\rho = nm$,而 $\Delta m'/\Delta t$ 为在单位时间内,由于气体的密度不同而通过 ΔS 迁移的质量, $\Delta \rho/\Delta x$ 为气体的密度梯度.

从气体动理论的观点来看,由于分子的无规热运动, ΔS 左右两侧都会有气

体分子穿过 ΔS , 但是在 Δt 时间内, 右侧的分子穿过 ΔS 的数目比左侧的分子穿过 ΔS 的数目要多. 也就是说, ΔS 两侧分子进行了不等量的交换. 于是 ΔS 右侧的分子数有所减少, 而 ΔS 左侧的分子则有所增加, 即有一部分气体分子从 ΔS 的右侧迁移到左侧. 从宏观上来看, 就产生了气体的扩散, 或者说气体的质量发生了定向迁移. 总之, 气体扩散现象的微观本质是气体分子数密度的定向迁移, 这种迁移亦是通过对分子的无规热运动来完成的.

四 三种迁移系数

由气体动理论可以导出粘度 η 、热导率 κ 和扩散系数 D 分别为

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} \\ \kappa &= \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} \frac{C_{V,m}}{M} \\ D &= \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}\end{aligned}\quad (7-40)$$

式中 ρ 为气体的密度, \bar{v} 为气体分子的平均速率, $\bar{\lambda}$ 为气体分子平均自由程, $C_{V,m}$ 为定体摩尔热容, M 为气体的摩尔质量. 表 7-6、表 7-7 和表 7-8 列出了由实验得出的几种气体的粘度、热导率和扩散系数.

表 7-6 几种气体的粘度实验值 (293 K, 1.013×10^5 Pa)

气体	Ne	Ar	CO
$\eta/(\text{Pa}\cdot\text{s})$	3.14×10^{-5}	2.23×10^{-5}	1.75×10^{-5}

气体	N ₂	O ₂	SO ₂	NH ₃
$\eta/(\text{Pa}\cdot\text{s})$	1.76×10^{-5}	2.03×10^{-5}	1.25×10^{-5}	0.974×10^{-5}

表 7-7 几种气体的热导率实验值 (300 K, 1.013×10^5 Pa)

气体	Ne	Ar	CO	
$\kappa/(\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})$	4.89×10^{-2}	1.77×10^{-2}	2.52×10^{-2}	
气体	N ₂	O ₂	CO ₂	NH ₃
$\kappa/(\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})$	2.61×10^{-2}	2.66×10^{-2}	1.66×10^{-2}	2.46×10^{-2}

表 7-8 几种气体的扩散系数实验值 (1.013×10^5 Pa)

气体	Ne	Ar	H ₂	
温度/K	293	273	273	
D/(m ² ·s ⁻¹)	4.73×10 ⁻⁵	1.58×10 ⁻⁵	12.9×10 ⁻⁵	

气体	HCl	O ₂	Kr	Xe
温度/K	295	293	294	292
D/(m ² ·s ⁻¹)	1.25×10 ⁻⁵	1.81×10 ⁻⁵	0.9×10 ⁻⁵	0.443×10 ⁻⁵

1 杜瓦瓶保温的物理原理

图 7-20 是杜瓦瓶的示意图,在它的双层玻璃壳间充以低压气体.这时,内外壁之间的气体起着导热作用.由式(7-40)知,气体的热导率为

$$\kappa = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \frac{C_{V,m}}{M}$$

前面曾指出,气体分子的平均自由程是随气压而改变的.在表 7-3 中,气压达到 1.333×10^{-2} Pa 的低气压时,平均自由程为 0.5 m,这个值远大于杜瓦瓶内外玻璃壳之间的距离.于是,随着真空度的提高,对玻璃壳内的气体来说,其平均自由程可看成是不变的.而气体分子的数密度 n 将有所降低(气体的密度 ρ 亦降低).由上式可见,气体的热导率 κ 有所减少,从而提高了杜瓦瓶的保温性.正因为杜瓦瓶具有良好的隔热作用,人们常用它来存放热水或冰块.

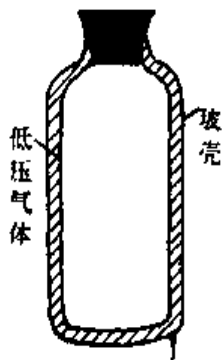


图 7-20 杜瓦瓶

2 同位素分离

前面已给出气体的扩散系数为

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}$$

如将式(7-22)中的 \bar{v} 及式(7-35)中的 $\bar{\lambda}$ 代入上式,得

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{3} \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2} \left(\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{4k}{\pi m} \right)^{1/2} \frac{kT^{3/2}}{\pi d^2 p} = \frac{1}{3} \left(\frac{4R}{\pi M} \right)^{1/2} \frac{kT^{3/2}}{\pi d^2 p} \end{aligned}$$

从上式可以看出,若容器中有摩尔质量 M 不同的两种同位素气体,而其他条件相同,那么,摩尔质量小的同位素气体的扩散系数大于摩尔质量大的同位素气体的扩散系数.于是,摩尔质量大的同位素气体比摩尔质量小的同位素气体扩散得慢.在原子能工业中常根据这一方法来分离同位素.此外,还可利用放射性同位素扩散(即示踪原子)的方法,来测定气体的浓度.

* 7-9 实际气体的范德瓦耳斯方程

前面在讲述理想气体物态方程时曾指出,这个方程只适用于压强不太大、温度不太低的气体.但是,当气体的压强比较大、温度比较低即气体分子的数密度 n 比较大时,气体的行为与理想气体物态方程就有较大的差异,因此,必须找出实际气体所遵循的物态方程.我们知道,当气体分子的数密度比较大时,平均来说,气体分子之间就没有理想气体分子之间的间距那么大了.分子间的相互作用力和分子本身的体积就必须加以考虑,而不能略去不计.

关于实际气体的物态方程有许多个,而且这些方程多半是经验性的,但也有一些是从气体动理论或经典统计力学得出的,其中范德瓦耳斯^①方程就是在理想气体物态方程的基础上,考虑了分子间的相互作用力和分子本身的体积这两个因素,对理想气体物态方程加以修

^① 范德瓦耳斯(J. D. Van der Waals, 1837—1923),荷兰物理学家.1873年他导出实际气体的范德瓦耳斯方程,1910年因此获得诺贝尔物理学奖.

正后得出来的. 虽然范德瓦耳斯方程不如有些经验方程那样与实际气体符合得那么好, 但范德瓦耳斯所提出的物理模型比较明确, 且能定性说明液体与气体共存时的一些特性.

范德瓦耳斯模型是把气体分子看作是相互间有吸引力的具有一定体积的刚性小球. 如将分子看作是直径为 d 的刚性小球, 那么从图 7-21(a) 可见, 两个分子中心的最小间距也等于 d . 这也就是说, 如以 d 为半径作一球面, 凡其他分子的中心进入这个球面均要因碰撞而被排斥在球面之外. 这样气体分子在容器中所能达到的空间, 要比容器的体积小. 为了估算 1 mol 气体分子占有的体积 b , 不妨设想所有分子被排成简单立方阵列, 如图 7-21(b) 所示. 这样, 每个分子所占有的体积便是边长为 d 的一个小立方体积 d^3 . 由于 1 mol 气体含有 N_A 个气体分子, 它们占有的体积 b 为

$$b = N_A d^3 \approx 2 N_A \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2} \right)^3$$

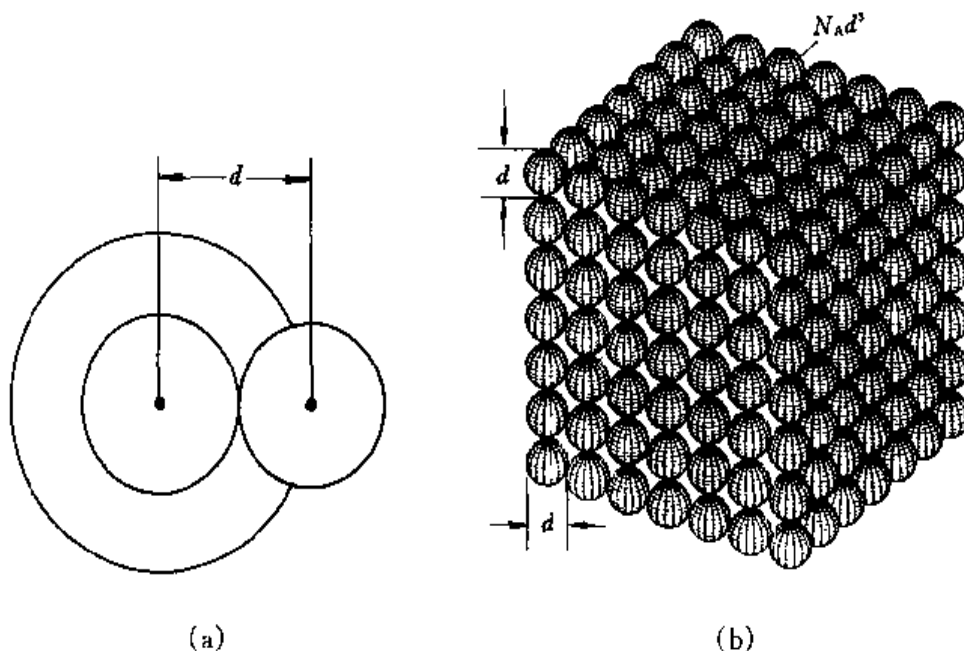


图 7-21 气体分子占有的体积

从上式可以看出, 1 mol 气体分子所占有的体积 b 至少是它们实有体积的 2 倍.

考虑到分子本身的体积, 1 mol 气体的物态方程可修改成

$$p(V - b) = RT \quad (7-41)$$

应当指出, 式(7-41)中的修正项 b , 首先是由伯努利提出的. 他提出了气体分子的刚性模型, 并指出分子可能达到的体积比容器的体积要小.

下面我们来考虑由于分子间的引力作用, 而在气体物态方程中加入的另一个修正项. 这是 1873 年范德瓦耳斯提出的. 我们知道, 分子间的引力 F 是随距离的增加而迅速地减小的 (大约是 $F \sim 1/r^6$), 因此可以说分子间的引力是短程力. 分子只与其邻近的分子才有引力作用, 较远分子的引力则可以略去不计了. 如图 7-22 所示, 设分子引力平均作用距离为 r , 那么, 以 r 为半径作一球面, 其他分子若处在此球面内, 均要受引力作用, 此球面也叫分子引力作用圈. 对于气体内部的分子, 平均来说, 它受到各个方向的引力是相等的. 只有那些处于器壁附近的分子才受到指向气体内部的引力 F 的作用. 在这个引力作用下, 当分子接近于器壁

时,其速度被减小,从而使分子在与器壁碰撞时,施与器壁的冲量被减少了.这就是说,观测到的压强 p 要略小于引力不存在时气体的压强.这种由于气体分子引力作用而产生的压强,叫做内压强 p_i .由式(7-41)可知,气体的实际压强应为

$$p = \frac{RT}{V-b} - p_i$$

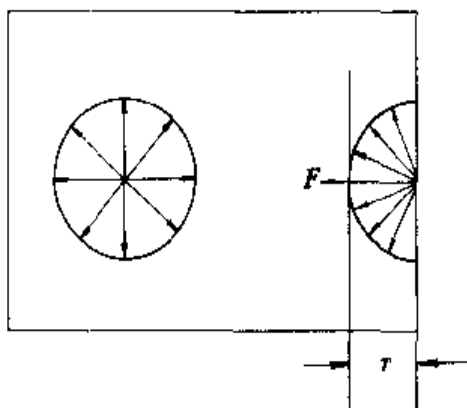


图 7-22 分子间引力而产生的内压强 p_i

即
$$(p + p_i)(V - b) = RT \quad (7-42)$$

如单位体积中的分子数为 n ,那么 n 个分子与器壁相碰撞时,分子受到的引力又要与作用圈内分子的数密度 n 成正比.这就是说,气体的内压强 $p_i \propto n^2$,或者 $p_i \propto \frac{1}{V^2}$,写成等式有 $p_i = a/V^2$.于是式(7-42)为

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (7-43)$$

上式叫做实际气体的范德瓦耳斯方程. a 是另一个修正数.

应当指出,范德瓦耳斯方程虽然考虑了分子间的吸引力和分子是直径为 d 的刚性小球这两个因素,但实际上,分子的运动还要复杂得多.因此,范德瓦耳斯方程也只反映了实际气体的一些特性.它只是对理想气体物态方程做了一些最简单的修正.此外还应指出,在气体的密度较低的情况下,范德瓦耳斯方程与理想气体物态方程还是十分接近的.

一般来说,范德瓦耳斯修正数 a 和 b 可由实验测定.表 7-9 给出了几种气体的 a 、 b 的实验值.

表 7-9 范德瓦耳斯修正数 a 和 b 的实验值

气 体	$a/(\text{Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2})$	$b/(\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1})$
氢	0.554	3.0×10^{-5}
氧	0.137	3.0×10^{-5}
氮	0.132	3.0×10^{-5}
二氧化碳	0.365	4.3×10^{-5}
氯	0.137	4.0×10^{-5}

表 7-10 给出了在 $T = 273 \text{ K}$ 的条件下, 1 mol 氮气其压强由 $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 增加到 $1.013 \times 10^8 \text{ Pa}$ 的过程中,测出的相应压强下氮气的体积,并将理想气体物态方程与范德瓦耳斯方程作了比较.

表 7-10 范德瓦耳斯方程与理想气体方程的比较

p/Pa	V/m^3	$pV/(\text{Pa}\cdot\text{m}^3)$	$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b)/(\text{Pa}\cdot\text{m}^3)$
1.013×10^5	2.241×10^{-2}	2.27×10^3	2.27×10^3
1.013×10^7	2.241×10^{-4}	2.27×10^3	2.27×10^3
5.065×10^7	0.6235×10^{-4}	3.16×10^3	2.30×10^3
7.09×10^7	0.533×10^{-4}	3.77×10^3	2.29×10^3
1.013×10^8	0.464×10^{-4}	4.70×10^3	2.23×10^3

从表中可以看出,当气体的压强小于 $1.013 \times 10^7 \text{ Pa}$ (即 100 个标准大气压)时,氮气的理想气体方程和范德瓦耳斯方程符合得比较好,两个方程都能较好地反映氮气的规律;当气体的压强大于 $1.013 \times 10^7 \text{ Pa}$ 时,两个方程间的差别越来越显著,但范德瓦耳斯方程仍能较好地反映氮气的规律,而理想气体方程与实际气体的行为就相差很大了.

7-10 热力学第二定律的统计意义

上一章,我们曾从宏观观点出发讨论了表述热现象过程方向性的热力学第二定律,以及熵增加原理.熵增加原理指出,在孤立系统所经历的不可逆过程中,其熵是增加的,直至孤立系统处于平衡态时,其熵达到最大值.这里我们将从微观观点出发,用统计方法略述熵的微观本质以及热力学第二定律的统计意义,从而增加对熵函数和熵增加原理的理解.

一 熵与无序

物质的状态和结构的无序度是与它的混乱程度相联系的,混乱程度愈高,其无序度愈大,反之则小.例如,将几滴红墨水放到清水中,开始时,红墨水只存在于局部空间,这时红墨水在清水中的分布是不均匀的,其混乱程度较低,我们认为其无序度也较小.由于分子的无规则运动,红墨水逐渐扩散到整个清水中,随着时间的推移,红墨水在空间的分布逐渐趋于均匀,其混乱程度亦逐渐提高,我们说其无序度也增大.当红墨水在清水中达到均匀分布时,其混乱程度最高,无序度也最大.上面仅就物质在空间的分布,阐述了无序度的概念.下面讨论其他一些热力学过程,并把无序度与熵变联系起来.

若在一孤立系统中有两个温度不等的物体相接触,由于热传导的缘故,系统内两物体的温度将由不均匀趋于均匀.在此过程中,系统的无序度将随温度均匀性的提

高而有所增加.在第6-8节的例2里曾讨论了孤立系统中两个温度不等的物体间的热传导问题,并得出在此过程中系统的熵是增加的,即 $\Delta S > 0$.由这个例子可见,在孤立系统的热传导过程中,系统熵的增加就意味着系统的无序度的增加.

在第6-8节的例4里所讨论的关于在孤立系统中气体向真空的扩散也是一个很好的例子.在图6-28中,原来容器A中有气体分子,容器B中是真空,没有气体分子.如果不打开隔板,不使气体扩散,这种状态不会受到破坏.但打开隔板后,气体分子就逐渐扩散到整个容器中,时间越长,分子在容器内的分布越均匀.气体分子的扩散使得无序度有所增加.当气体均匀分布时,气体的无序度达到极限.从热力学第二定律来看,在此过程中熵是增加的.因此,我们也可以说,在气体扩散这个不可逆过程中,熵的增加也意味着无序程度的增加.此外,固体的熔解、液体的汽化或者固体的升华等过程,系统的无序程度也将增加.同时,在这些过程中,孤立系统的熵也要增加.

综上所述,热力学第二定律可以这样来理解:在孤立系统中,系统处于平衡态时,系统的熵趋于最大值,同时,系统无序度也最高,因此可以说熵是孤立系统的无序度的一种量度.

二 无序度与微观状态数

我们能否用数量关系来表示系统的无序度呢?为此我们将先介绍宏观状态的微观状态数,然后说明微观状态数与无序度的关系.这个问题涉及统计物理学的一些基本原理,远超出本课程的范围.下面我们从一特例出发,对这个问题作一点粗略介绍.

如图7-23所示,在体积为 V 的容器中有四个可以分辨的气体分子a、b、c、d.设想它们为红、黄、蓝、白4个小球,现把容器分为大小相等的A、B两部分.四个分子在容器中的分布,如表7-11所示.从表7-11可以看出,分子在容器中的分布共有五种可能的宏观状态,而不同宏观状态的微观状态(即分布方式)又各不相同.这五种宏观状态共有16个微观状态.其中I、V这两种宏观状态各有1个微观状态;II、IV这两种宏观状态各有4个微观状态;而III这种宏观状态(即容器A、B两部分各有两个分子)则有6个微观状态.我们假设,在孤立系统中任一微观状态出现的概率都是相同的^①.我们并把与某一宏观状态相对应的微观状态数称作热力学概率,

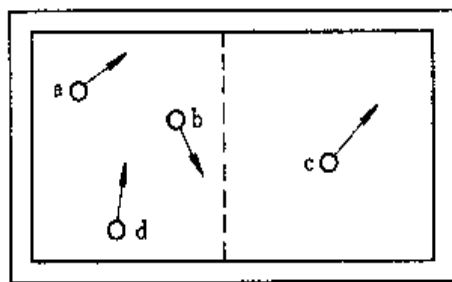


图7-23 分子在容器中的分布方式

^① 这是统计物理的一条基本假设,也称为微观态的等概率原理.它是由玻耳兹曼最先提出的.

用 W 表示. 那么, 由于 I、V 这两种宏观状态的微观状态数均为 1, 其热力学概率最小, 而 III 这种宏观状态的微观状态数则为 6, 其热力学概率最大. III 这种宏观状态的热力学概率最大是很好理解的, 因为这种状态下分子的分布最均匀, 其无序度也最高. 孤立系统总是从热力学概率较小的状态向热力学概率较大的状态过渡, 此时系统的无序度也在提高. 所以说, 热力学概率 W 是分子热运动的系统无序度的量度. 前面我们提到的红墨水向清水的扩散过程就是向最概率的演变过程. 当红墨水均匀分布在清水中时, 其热力学概率 W 最大, 无序度也最高, 系统的熵也达最大值.

表 7-11 四个分子在容积中的分布

宏观状态 (分配种类)	I		II		III		IV		V	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
	4	0	3	1	2	2	1	3	0	4
微观状态 (分子分布方式)	abcd		abc bcd eda dab	d a b c	ab ac ad bc bd cd	cd bd bc ad ac ab	a b c d	bcd eda dab abc		abcd
一个宏观状态对应的微观状态数	1		4		6		4		1	

三 熵与热力学概率 玻耳兹曼关系式

对一孤立系统的宏观不可逆过程, 可以从宏观和微观两个方面来表述. 从热力学观点来看, 孤立系统的熵要增加; 而熵增加的同时系统的无序度也增大. 从统计观点来看, 热力学概率是系统无序度的量度, 当系统的无序度增大时, 其相应的热力学概率也增大. 由上述分析可知, 一孤立系统的熵 S 增加时, 系统的热力学概率也相应增大. 至于它们之间的关系, 玻耳兹曼提出应取如下形式:

$$S = k \ln W \quad (7-44)$$

k 为玻耳兹曼常数. 式(8-44)常称为玻耳兹曼关系式. 玻耳兹曼关系式的重要意义在于把宏观量熵与微观量热力学概率联系起来, 并对熵给予了统计解释.

如一个孤立系统的热力学概率由 W_1 变至 W_2 , 且 $W_2 > W_1$, 那么, 由式(8-44)可得

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln \frac{W_2}{W_1} > 0$$

上式表明,孤立系统熵增加的过程是热力学概率增大的过程,是系统从非平衡态趋于平衡态的过程,是系统的无序度加大的过程,是一个宏观的不可逆过程。

作为玻耳兹曼关系式应用的一个例子,我们再来具体讨论一下理想气体向真空膨胀时熵的变化(参见第6-8节例4)。

假使我们将气体分子运动的空间分成为许多体积相等的小格子,每个小格子的体积为 τ ,那么体积为 V 的空间里就有 V/τ 个小格子。分子处在不同位置的小格子里,分子的微观状态是不同的。因此,分子在体积 V 中共有 V/τ 个微观态。每一个分子在体积 V 中都有 V/τ 个微观态。于是,我们可以说, N 个分子同时处在体积为 V 的 V/τ 个格子中,共有 $(V/\tau)^N$ 个微观态。前面,曾把系统的微观状态数称做热力学概率。因此, N 个分子同时处于体积 V 中的热力学概率与体积的 N 次方成正比,即

$$W \sim V^N$$

下面利用上式来讨论理想气体向真空的自由膨胀。如图6-28所示,打开隔板前,理想气体的体积为 V_1 ,其热力学概率为

$$W_1 \sim V_1^N$$

打开隔板后,气体的体积为 V_2 ,其热力学概率为

$$W_2 \sim V_2^N$$

两式相除,有

$$\frac{W_2}{W_1} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^N \quad (7-45)$$

取对数,得

$$\ln \frac{W_2}{W_1} = N \ln \frac{V_2}{V_1}$$

若是1 mol理想气体,并对上式两边分别乘以 k ,则得

$$k \ln W_2 - k \ln W_1 = k N_A \ln \frac{V_2}{V_1} = R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

由玻耳兹曼关系式(8-44),上式可写成

$$S_2 - S_1 = R \ln \frac{V_2}{V_1} > 0$$

这与第6-8节中例4的结果是一致的。

通过以上论述,我们对熵函数有了多方面比较深入的理解。

为了纪念玻耳兹曼给予熵以统计解释的卓越贡献,他的墓碑上虽没有惯用



玻耳兹曼墓碑

的墓志铭以记述他的功绩,却寓意隽永地刻着 $S = k \log W$ ^①. 这表达了人们对玻耳兹曼的深深怀念和尊敬.

玻耳兹曼关系式不仅给热力学熵 S 以统计解释,使人们对熵的微观本质有了进一步理解,而且由于在社会生活、生产和科学实验中存在大量的概率事件以及由概率所描述的不确定性问题,因此,熵的应用范围已经远远超出热力学范围,熵的概念和意义也有了新的发展,涉及到诸如信息论、控制论、宇宙论以及生命科学、人文科学等许多方面这是克劳修斯在提出熵函数和玻耳兹曼给予统计解释时所不曾料到的.

· 四 自组织现象

下面简略介绍一下自组织现象,这是对远离平衡态的物理现象的近代研究课题,目前尚未形成完整的理论体系.

我们知道有三种热的传递方式:热传导^②、热辐射^③和对流. 如图 7-24 所示的贮有流体的容器,其下部的温度为 T_2 ,上部的温度为 T_1 ,且 $T_2 > T_1$. 温度高处流体的密度比温度低处流体的密度要小,在浮力的作用下,热流体上升,此时上层温度较低而密度较大的流体将乘机补充下来,这样的过程称之为热对流.

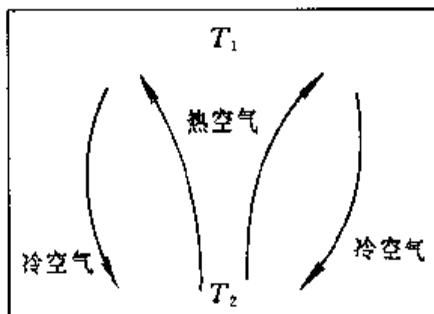


图 7-24 热对流

1900 年法国物理学家贝纳尔(H. Benard)在做热对流实验时发现一个在液面产生的从无序到

有序的有趣现象. 在如图 7-25(a)的扁平器皿中放有一薄层液体,液体上下保持一定的温度差,在薄层液体里有热对流. 当温差达到某一临界值时,液面呈现出一种如图 7-25(b)所示的由许多六角形构成的规则图案. 热对流所形成的液流则是从每个六角形中心涌起,然后再沿六角形边缘下沉形成热环流. 图 7-25(b)叫做贝纳尔花样.

贝纳尔花样是一个十分奇异的现象,这就是当薄层的温度差达到临界值时,液体表面的分子好像信息相通似的,在统一的命令下自动地由无序状态构成有序的状态. 这个现象称之为自组织现象. 通过对自组织现象的研究,人们知道从无序向有序转变的自组织现象只能产生于远离平衡态的与外界有能量或物质交换的开放系统之中. 在自组织过程中,开放系统的状态由无序趋于有序,其时,开放系统的熵也将向减小的方向发展. 现已知道,生命过程也是从无序向有序的演化过程,生命体也是一个开放系统. 生物体在其生命的生长、发育过程中,把从外界得来的各种元素按一定的结构组成蛋白质和 DNA,从而形成细胞、组织和器官,这

① 读者如有兴趣可参阅冯端、冯步云著《熵》(科学出版社,1992年版). 玻耳兹曼墓碑上刻着的是 $S = k \log W$ 而非 $S = k \ln W$.

② 关于热传导已在本章第 7-8 节作了介绍.

③ 热辐射将在本书第 19-1 节介绍.

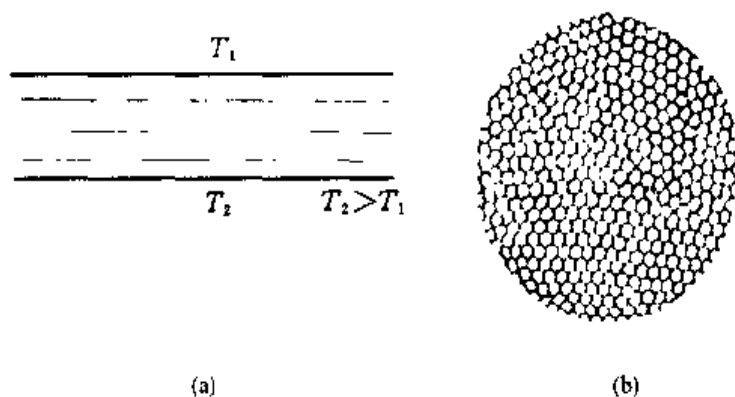


图 7-25 热对流的贝纳尔花样

是一个从无序趋向有序的过程.当这种有序过程终结时,生命也就丧失了.所以在开放系统远离平衡态时,系统可以实现从无序向有序的转变,熵也随之减少.

我们在热力学第二定律中曾指出,孤立系统中所进行的热力学过程,其熵是增加的,系统的状态是从有序向无序转变的.显然,熵增加定理只适用于与外界既无能量又无物质交换的孤立系统.而当系统与外界有能量、物质交换时就成为开放系统,这时系统状态的改变可由无序变为有序,系统的熵也会减少.自组织现象和生命的生长和发育过程都是这方面的例子.至于其它的一些有关内容,读者如有兴趣可参阅冯端等著《熵》,第 99 页~第 103 页.

问 题

7-1 你能从理想气体物态方程出发,得出玻意耳定律、查理定律和盖吕萨克定律吗?

7-2 一定量的某种理想气体,当温度不变时,其压强随体积的增大而变小;当体积不变时,其压强随温度的升高而增大.从微观角度来看,压强增加的原因是什么?

7-3 道尔顿(Dalton)分压定律指出:在一个容器中,有几种不发生化学反应的气体,当它们处于平衡态时,气体的总压强等于各种气体的压强之和.你能用气体动理论对该定律予以说明吗?

7-4 阿伏伽德罗定律指出:在温度和压强相同的条件下,相同体积中含有的分子数是相等的,与气体的种类无关.你能用气体动理论予以说明吗?

7-5 为什么说温度具有统计意义?讲一个分子具有多少温度,行吗?

7-6 (1)在一个封闭容器中装有某种理想气体,如果保持它的压强和体积不变,问温度能否改变?(2)有两个相同的封闭容器,装着同一种气体,压强也都相同,问它们的温度是否一定相同?

7-7 速率分布函数 $f(v)$ 的物理意义是什么?试说明下列各式的物理意义:(1) $f(v)dv$;
(2) $Nf(v)dv$, (3) $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$, (4) $\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv$.

7-8 若某气体分子的自由度是 i ,能否说每个分子的能量都等于 $\frac{i}{2}kT$?

7-9 气体分子的平均速率、最概然速率和方均根速率的物理意义有什么区别?它们与

温度有什么关系?它们与摩尔质量(M)有什么关系?最概然速率是否就是速率分布中的最大速率的值?

7-10 铀原子核裂变后的粒子具有 1.1×10^{-11} J 的平均平动动能,设想由这些粒子组成的“气体”,其温度的近似值为多少?

7-11 你能根据麦克斯韦速度分布律求出 \bar{v}_x^2 吗?并从而得出每一平动自由度所具有的平均平动动能(即 $\frac{1}{2} m \bar{v}_x^2$)为 $kT/2$ 吗?

7-12 气体分子的平均速率可达到几百米每秒,那么,为什么在房间内打开一汽油瓶的瓶塞后,需隔一段时间才能嗅到汽油味?

7-13 什么叫平均自由程?有人说:“平均自由程就是各个分子在两次碰撞间走过的路程”.这样的说法是否正确?

7-14 一定量的气体,容积不变,当温度增加时,分子运动得更剧烈,因而平均碰撞次数增多,试问,平均自由程是否也因此而减小?

7-15 在一个球形容器中,如果气体分子的平均自由程大于容器的直径,能否把容器当成是真空的?

7-16 你能否用描述气体分子运动的统计量的数量级(如 $n, N_A, v, \lambda, \bar{Z}, d$),来描绘大量气体分子的热运动图景?

7-17 气体内产生迁移现象的原因是什么?有哪些量迁移?从气体动理论的观点来看,迁移现象是怎样实现的?分子热运动和分子间碰撞在迁移现象中起什么作用?

7-18 你能说明在常压下气体的热导率与气体的压力无关吗?并以此来说明,只有把热水瓶胆的两层玻壳间抽成真空,才能使热水瓶胆起到保温作用.

7-19 为什么气体分子很稀薄时,范德瓦耳斯方程就趋于理想气体方程?

7-20 你知道孤立系统的无序度、热力学概率与熵之间有什么关系吗?

7-21 在体积为 V 的容器中均匀分布着 N 个理想气体分子,设想这些分子自动地集中到容器的一边(如 $V/2$),你能估计出现这种情况的概率吗?

习 题

7-1 如果将 1.0×10^3 kg 的水分子均匀地分布在地球表面上,则单位面积上将约有多少个水分子?

7-2 设想太阳是由氢原子组成的理想气体,其密度可当作是均匀的.若此理想气体的压强为 1.35×10^{14} Pa,试估计太阳的温度.(已知氢原子的质量 $m_H = 1.67 \times 10^{-27}$ kg,太阳半径 $R_s = 6.96 \times 10^8$ m,太阳质量 $m_s = 1.99 \times 10^{30}$ kg.)

7-3 一容器内储有氧气,其压强为 1.01×10^5 Pa,温度为 27.0°C ,求:(1) 气体分子的数密度;(2) 氧气的密度;(3) 分子的平均平动动能;(4) 分子间的平均距离.(设分子间均匀等距排列.)

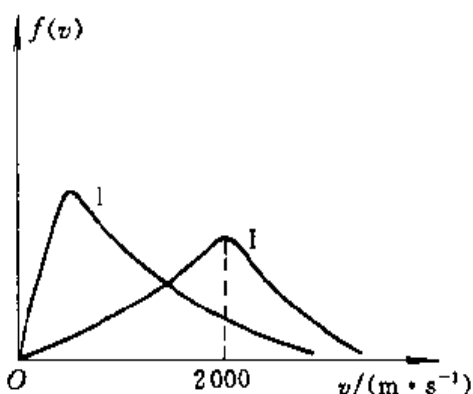
7-4 2.0×10^{-2} kg 氢气装在 4.0×10^{-2} m³ 的容器内,当容器内的压强为 3.90×10^5 Pa 时,氢气分子的平均平动动能为多大?

7-5 温度为 0°C 和 100°C 时理想气体分子的平均平动动能各为多少?欲使分子的平

均平动能等于 1 eV , 气体的温度需多高?

7-6 某些恒星的温度可达到约 $1.0 \times 10^8 \text{ K}$, 这也是发生聚变反应(也称热核反应)所需的温度. 在此温度下, 恒星可视为由质子组成. 问: (1) 质子的平均动能是多少? (2) 质子的方均根速率为多大?

7-7 求温度为 127.0°C 时的氢气分子和氧气分子的平均速率、方均根速率及最概然速率.



习题 7-8 图

7-8 图中, I、II 两条曲线是两种不同气体(氢气和氧气)在同一温度下的麦克斯韦分子速率分布曲线. 试由图中数据求: (1) 氢气分子和氧气分子的最概然速率; (2) 两种气体所处的温度.

7-9 体积为 $1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ 的容器中含有 1.01×10^{23} 个氢气分子, 如果其中压强为 $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$. 求该氢气的温度和分子的方均根速率.

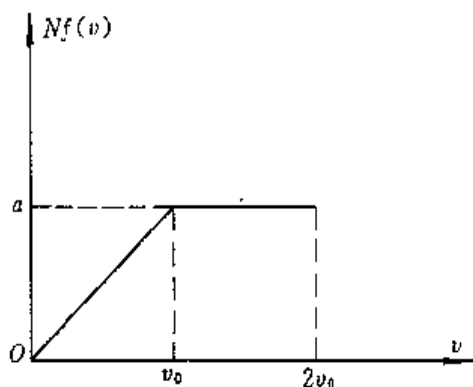
7-10 在容积为 $2.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ 的容器中, 有内能为 $6.75 \times 10^2 \text{ J}$ 的刚性双原子分子理想气体. (1) 求气体的压强; (2) 若容器中分子总数为 5.4×10^{22} 个, 求分子的平均平动动能及气体的温度.

7-11 在 $3.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ 的容器中装有 $2.0 \times 10^{-2} \text{ kg}$ 气体, 容器内气体的压强为 $5.06 \times 10^4 \text{ Pa}$, 求气体分子的最概然速率.

7-12 声波在理想气体中传播的速率正比于气体分子的方均根速率. 问声波通过氧气的速率与通过氢气的速率之比是多少? 设这两种气体都为理想气体并具有相同的温度.

7-13 在万有引力一章中, 曾介绍过质点离开地球引力作用所需的逃逸速率为 $v = \sqrt{2gr}$, 其中 r 为地球半径. (1) 若使氢气分子和氧气分子的平均速率分别与逃逸速率相等, 它们各自应有多高的温度; (2) 说明大气层中为什么氢气比氧气要少. (取 $r = 6.40 \times 10^6 \text{ m}$)

7-14 有 N 个质量均为 m 的同种气体分子, 它们的速率分布如图所示. (1) 说明曲线与横坐标所包围面积的含义; (2) 由 N 和 v_0 求 a 值; (3) 求在速率 $v_0/2$ 到 $3v_0/2$ 间隔内的分子数; (4) 求分子的平均平动动能.



习题 7-14 图

7-15 试用麦克斯韦分子速率分布定律导出方均根速率和最概然速率.

7-16 一飞机在地面时机舱中的压力计指示为 $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$, 到高空后压强降为 $8.11 \times 10^4 \text{ Pa}$. 设大气的温度均为 27.0°C . 问此时飞机距地面的高度为多少? (设空气的摩尔质量为 $2.89 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.)

7-17 在压强为 $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ 下, 氮气分子的平均自由程为 $6.0 \times 10^{-6} \text{ cm}$, 当温度不

变时,在多大压强下,其平均自由程为 1.0 mm .

7-18 目前实验室获得的极限真空约为 $1.33 \times 10^{-11} \text{ Pa}$.这与距地球表面 $1.0 \times 10^4 \text{ km}$ 处的压强大致相等.试求在 27°C 时单位体积中的分子数及分子的平均自由程.(设气体分子的有效直径 $d = 3.0 \times 10^{-8} \text{ cm}$.)

7-19 若氮气分子的有效直径为 $2.59 \times 10^{-8} \text{ cm}$,问在温度为 600 K ,压强为 $1.33 \times 10^2 \text{ Pa}$ 时氮分子 1 s 内的平均碰撞次数为多少?

7-20 如果理想气体的温度保持不变,当压强降为原值的一半时,分子的碰撞频率和平均自由程如何变化?

7-21 对于 CO_2 气体有范德瓦斯常量 $a = 0.37 \text{ Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2}$, $b = 4.3 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$.当 0°C 时其摩尔体积为 $6.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$.试求其压强.如果将其当作理想气体处理,结果又如何?

附录一 矢 量

矢量代数在物理学中是常用的数学工具,它可用较为简洁的数学语言表达某些物理量及其变化规律,这对加深理解物理量及物理定律的涵义是很有帮助的.这里主要介绍矢量的概念,矢量的加减和分解,矢量的标积和矢积以及矢量的导数和积分.希望读者在教师指导下,随着课程的进行,经常查阅本附录有关内容,这样就可以逐步熟练掌握矢量的基本概念和计算方法.

一 标量和矢量

物理学研究物质最简单、最基本的运动形式,它科学地说明了这些运动的特性和规律,而描述物质运动的特性和规律离不开物理量.在基础物理学范围内,我们经常遇到两类物理量,一类是标量物理量(简称标量),如质量、时间、体积等,它们仅有大小和单位,并遵循通常的代数运算法则;另一类是矢量物理量(简称矢量),如位移、速度、力等,它们不仅有大小和单位,还有方向,它们遵循矢量代数运算法则.

矢量通常用黑体字母 A 或带有箭号的字母 \vec{A} 来表示,在作图时,常用有向

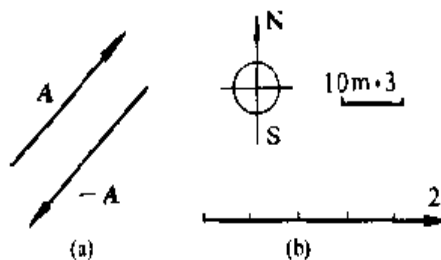


图 1 矢量的图象表示

线段表示[图 1(a)].线段的长短按一定比例表示矢量的大小,箭头的指向表示矢量的方向.如一系列高速火车以 $50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度向东行驶,则其速度矢量 v 可用图 1(b)中的有向线段表示.

矢量的大小叫做矢量的模,矢量 A 的模常用符号 $|A|$ 或 A 表示.

如果有一矢量,其模与矢量 A 的模相等,方向相反,这时就可用 $-A$ 来表示这个矢量[图 1(a)].

如图 2 所示,如把矢量 A 在空间平移,则矢量 A 的大小和方向都不会因平

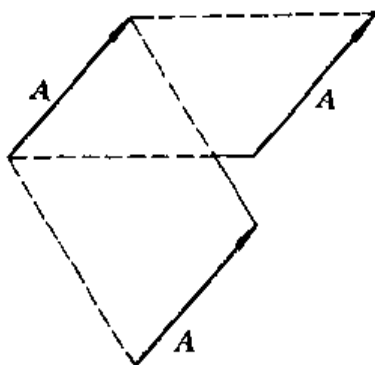


图2 矢量平移

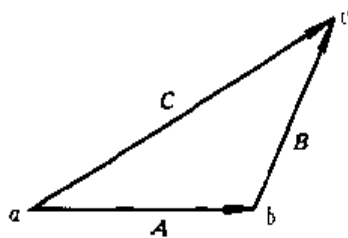


图3 两矢量合成的三角形法则

移而改变.矢量的这个性质称为矢量平移的不变性,它是矢量的一个重要性质.

二 矢量合成的几何法

1 矢量相加

下面以质点在平面上的位移为例来说明矢量相加的法则.如图3所示,设一质点最初位于点 a ,然后到达点 b ,最后处于点 c .它从 a 到 b 的位移为 A ,从 b 到 c 的位移为 B ;且质点从 a 直接到 c 的位移为 C .因此

$$A + B = C \quad (1)$$

即位移 C 为位移 A 与位移 B 的矢量和.应当指出,式(1)虽是从物理量位移得出的,实际上对任何具有矢量性质的相同的物理量相加都可用此关系式.图3所示的矢量相加也常叫做矢量相加的三角形法则.这个法则为:自矢量 A 的末端画出矢量 B ,则自矢量 A 的始端到矢量 B 的末端画出矢量 C , C 就是 A 和 B 的合矢量.

利用矢量平移不变性,可把图3中矢量 B 的始端平移到点 a ,这样,点 a 就为 A 、 B 的交点(图4).从图4中可以看出, C 是从以 A 和 B 为邻边的平行四边形交点 a 所作的对角线,这就是说,两矢量 A 和 B 相加的合矢量是以这两矢量为邻边的平行四边形对角线矢量 C .利用平行四边形求合矢量的方法叫做矢量相加的平行四边形法则.要注意,在画此平行四边形时,矢量 A 、 B 和 C 的始端应共处于一点.

合矢量的大小和方向,除了上述几何作图法外,还可由计算求得.

在图4中,设 α 为矢量 A 和 B 之间小于 π 的夹角,合矢量 C 与矢量 A 的夹角为 φ .由图5可知

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos \alpha} \quad (2a)$$

$$\varphi = \arctg \frac{B\sin \alpha}{A + B\cos \alpha} \quad (2b)$$

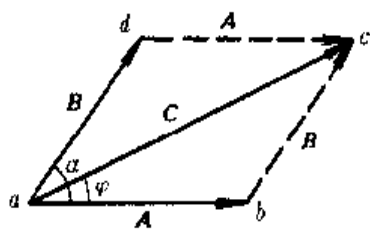
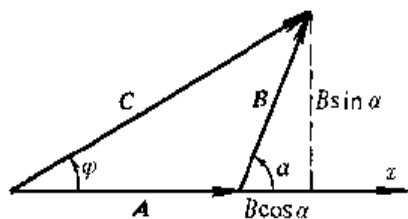


图4 两矢量合成的平行四边形法则

图5 合矢量 C 的计算

合矢量 C 的大小和方向由式(2a)和式(2b)确定。

对于在同一平面上多矢量的相加,原则上可以逐次采用三角形法则进行,先求出其中两个矢量的合矢量,然后将该合矢量再与第三个矢量相加,求得三矢量的合矢量……,依此类推,即得到多个矢量合成时的多边形法则。如图6所示,若要求出 A 、 B 、 C 、 D 四个矢量的合矢量时,可从 A 矢量出发,首尾相接地依次画

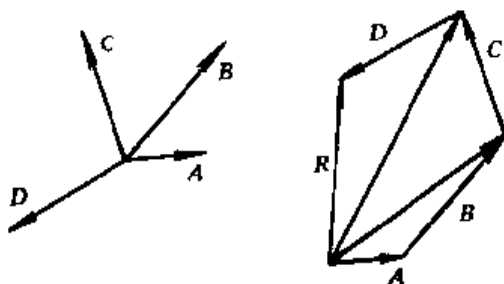


图6 同平面多矢量相加

出 B 、 C 、 D 各矢量,然后由第一矢量 A 的始端到最后一个矢量 D 的末端联一有向线段 R ,这个矢量 R 就是 A 、 B 、 C 、 D 四个矢量的合矢量。

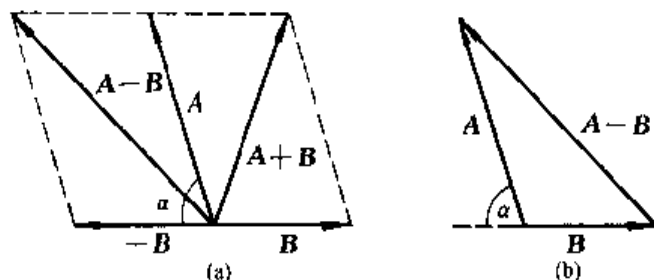


图7 两矢量相减

2 矢量相减

两个矢量 A 与 B 之差也是一个矢量,可用 $A - B$ 表示。矢量 A 与 B 之差可写成矢量 A 与矢量 $-B$ 之和,即

$$A - B = A + (-B) \quad (3)$$

如同两矢量相加一样,两矢量相减也可以采用平行四边形法则[图 7(a)].从图 7(b)中也可以看出,如两矢量 A 和 B 从同一点画起,则自 B 末端向 A 末端作一矢量,就是矢量 A 与 B 之差 $A - B$.

求矢量差的大小和方向,仍可用式(2a)及(2b)进行计算,但必须注意,这时角 α 是 A 与 $-B$ 之间小于 π 的夹角,而不是矢量 A 、 B 之间的夹角.

三 矢量合成的解析法

1 矢量在直角坐标轴上的分矢量和分量

由前述已知,任意几个矢量可以相加为一个合矢量.反过来,一个矢量也可以分解为任意数目的分矢量.就一个矢量分解为两个分矢量而言,相当于已知一平行四边形的对角线求平行四边形两邻边的问题.由于对角线不变的平行四边

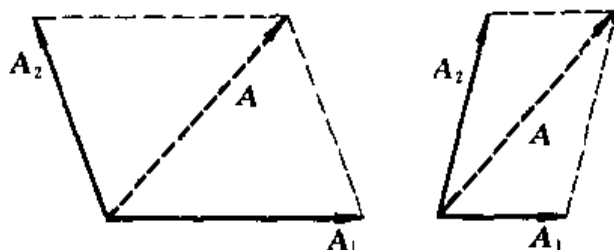


图 8 矢量分解

形可以有无限多种,因此把一个矢量分解为两个分矢量可以有无限多种方法,图 8 所示只是其中的两种.

在实际问题中,常把一个矢量在选定的直角坐标系上进行分解.如图 9 所示,在平面直角坐标系 Oxy 上,矢量 A 的始端位于原点 O ,它与 x 轴的夹角为 α .从图可见,矢量 A 在 x 轴上的分矢量 A_x 和在 y 轴上的分矢量 A_y 都是一定的,即

$$A = A_x + A_y \quad (4)$$

若沿 Ox 轴的正向取一长度为 1 的单位矢量 i ,沿 Oy 轴的正向取一长度为 1 的单位矢量 j ,则分矢量 A_x 和 A_y 为

$$A_x = A_x i, \quad A_y = A_y j \quad (5)$$

其中 A_x 和 A_y 分别叫做矢量 A 在 x 轴和在 y 轴上的分量,即它们是矢量 A_x 和 A_y 的模,所以有

$$A_x = A \cos \alpha, \quad A_y = A \sin \alpha$$

应当注意角 α 系由 Ox 轴按逆时针方向旋转至 A 的角度.于是式(4)可写成

$$A = A_x i + A_y j \quad (6)$$

显然,矢量 A 的模为

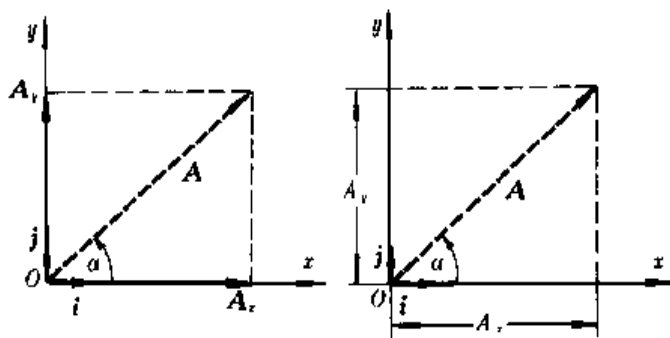


图9 矢量在平面直角坐标轴的正交分量

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

矢量 A 与 x 轴的夹角 α 以及分量 A_x 、 A_y 之间的关系为

$$\alpha = \arctg \frac{A_y}{A_x}$$

分量 A_x 、 A_y 的值可正可负,取决于矢量 A 与 x 轴的夹角 α .由式(5)可见,当 A 与 x 轴的夹角 $\alpha = 0^\circ$ 时, $A_x = A$, $A_y = 0$; 当 $\alpha = \pi$ 时, $A_x = -A$, $A_y = 0$.

若一矢量 A 在如图 10 所示的三维直角坐标系中,那么它在 x 、 y 和 z 轴上的分矢量分别为 A_x 、 A_y 和 A_z ,于是有

$$A = A_x + A_y + A_z$$

另外,矢量 A 在 x 、 y 和 z 轴上的分量分别为 A_x 、 A_y 和 A_z .如以 i 、 j 和 k 分别表示 x 、 y 和 z 轴上的单位矢量,则有

$$A = A_x i + A_y j + A_z k \quad (7)$$

矢量 A 的模为

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

矢量 A 的方向由该矢量与 x 、 y 和 z 轴的夹角 α 、 β 和 γ 来确定,有

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A}, \cos \beta = \frac{A_y}{A}, \cos \gamma = \frac{A_z}{A}$$

2 矢量合成的解析法

运用矢量在直角坐标轴上的分量表示法,可以使矢量加减运算简化.设平面直角坐标内有矢量 A 和 B ,它们与 x 轴的夹角分别为 α 和 β (图 11).根据式(5),矢量 A 和 B 在两坐标轴上的分量可分别表示为

$$\begin{cases} A_x = A \cos \alpha \\ A_y = A \sin \alpha \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} B_x = B \cos \beta \\ B_y = B \sin \beta \end{cases}$$

由图 11. 可以看出,合矢量 C 在两坐标轴的分量 C_x 和 C_y 与矢量 A 、 B 的分量之

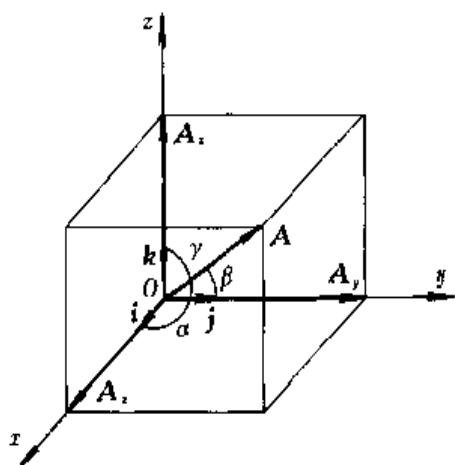


图 10 矢量在三维直角坐标轴上的正交分量

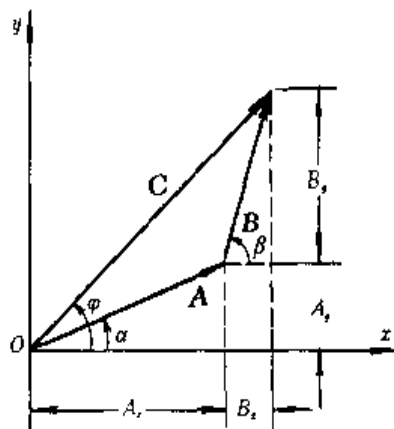


图 11 两矢量合成的解析法

间的关系为

$$\begin{cases} C_x = A_x + B_x \\ C_y = A_y + B_y \end{cases} \quad (8)$$

式(8)亦可用式(4)导出. 因为

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}, \mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j}$$

所以

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x) \mathbf{i} + (A_y + B_y) \mathbf{j}$$

而

$$\mathbf{C} = C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j}$$

故亦有

$$\begin{cases} C_x = A_x + B_x \\ C_y = A_y + B_y \end{cases}$$

矢量 \mathbf{C} 的大小和方向由下列两式确定:

$$\begin{cases} C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \\ \varphi = \arctg \frac{C_y}{C_x} \end{cases} \quad (9)$$

四 矢量的标积和矢积

在物理学中,除经常遇到相同矢量的加减外,还经常遇到不同矢量的乘积. 矢量乘积常见的有两种,一种是标积(或称点积、点乘),一种是矢积(或称叉积、叉乘). 例如,功是力和位移两矢量的标积,力矩是位矢和力两矢量的矢积.

1 矢量的标积

设两矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 之间小于 π 的夹角为 α , 矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的标积用符号 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 表示,并定义

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \alpha \quad (10)$$

即矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的标积是矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的大小及它们夹角 α 余弦的乘积,为一标

量.由图 12 可见, $A \cdot B$ 也相当于 A 的大小与 B 沿 A 方向分量的乘积(或相当于 B 的大小与 A 沿 B 方向分量的乘积).当 A 与 B 同向时($\alpha = 0^\circ$), $A \cdot B = AB$; 当 A 与 B 反向时($\alpha = 180^\circ$), $A \cdot B = -AB$; 当 A 与 B 互相垂直时($\alpha = 90^\circ$), $A \cdot B = 0$.

从标积的定义可以得到标积的如下性质:

$$(1) \quad A \cdot B = AB \cos \alpha = BA \cos \alpha = B \cdot A \quad (11)$$

即标积遵守交换律.

(2) 标积遵守分配律, 即

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \quad (12)$$

标积有分配律的性质是容易证明的. 设 $A + B = D$, 且取 C 的方向为 Ox 轴的正向, 则

$$D \cdot C = DC \cos \alpha$$

而 $D \cos \alpha = D_x$ 为 D 在 Ox 轴上(C 方向上)的分量.

由矢量的加法可知 $D_x = A_x + B_x$, 所以

$$\begin{aligned} DC \cos \alpha &= CD_x = C(A_x + B_x) \\ &= CA_x + CB_x = A \cdot C + B \cdot C \end{aligned}$$

这就证明了式(12). 在平面直角坐标系中, 有两矢量 A 和 B , 它们分别为

$$A = A_x i + A_y j + A_z k, \quad B = B_x i + B_y j + B_z k$$

于是它们的标积为

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (A_x i + A_y j + A_z k) \cdot (B_x i + B_y j + B_z k) \\ &= A_x B_x i \cdot i + A_y B_y j \cdot j + A_z B_z k \cdot k + A_x B_y i \cdot j \\ &\quad + A_x B_z i \cdot k + A_y B_x j \cdot i + A_y B_z j \cdot k + A_z B_x k \cdot i \\ &\quad + A_z B_y k \cdot j \end{aligned}$$

利用上述标积的性质, 可得 $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1, i \cdot j = j \cdot i = i \cdot k = k \cdot i = j \cdot k = k \cdot j = 0$, 于是, 上式为

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (13)$$

例 1 已知 $A = 3i + 5j, B = 5i - 3j$, 求 $A \cdot B$.

解 $A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y = 3 \times 5 + 5 \times (-3) = 0$

由上可见, A, B 虽不为零, 但 $A \cdot B = 0$. 而按矢量标积的定义, 只有 A 与 B 互相垂直时才能使 $A \cdot B = 0$, 所以说, 矢量 A 与 B 互相垂直. 关于这一点读者可把 A 与 B 画出来再进行几何证明

2 矢量的矢积

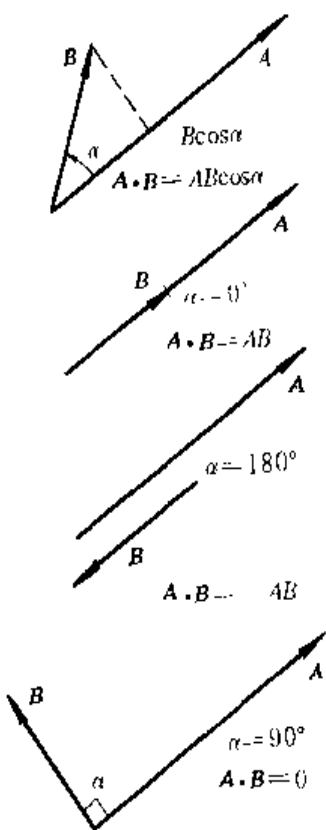


图 12 两矢量的夹角与它们标积的关系

设两矢量 A 和 B 之间小于 180° 的夹角为 α . A 和 B 的矢积用符号 $A \times B$ 表示, 并定义它为另一矢量 C , 即

$$C = A \times B \quad (14)$$

矢量 C 的大小为

$$C = AB \sin \alpha \quad (15)$$

矢量 C 的方向垂直于 A 和 B 所在的平面, 其指向可用右手螺旋法则确定. 如图 13 所示, 当右手四指从 A 经小于 180° 的角转向 B 时, 右手拇指的指向 (即右螺旋前进的方向) 就是 C 的方向. 如果以 A 和 B 构成平行四边形的邻边, 则 C 是这样一个矢量, 它垂直于四边形所在的平面, 且其指向代表着此平面的正法线方

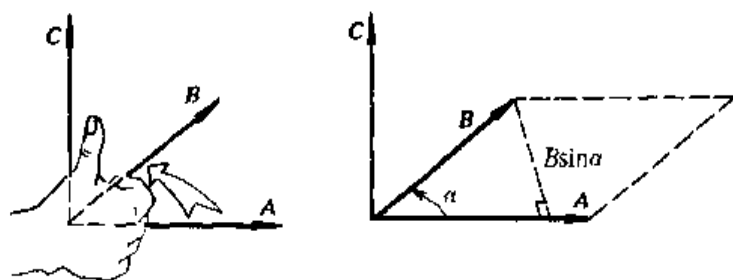


图 13 矢量 A 和 B 的矢积

向; 而它的大小则等于平行四边形的面积.

利用矢积的定义, 可以得到矢积具有如下性质:

(1) 由于 $A \times B$ 的大小 $AB \sin \alpha$ 与 $B \times A$ 的大小 $BA \sin \alpha$ 相同, 但 $A \times B$ 和 $B \times A$ 的方向相反, 所以

$$A \times B = -B \times A \quad (16)$$

即矢量的矢积不遵守交换定律.

(2) 如果矢量 A 和 B 是平行或反平行, 即它们之间的夹角 α 为 0° 或 180° 时, 由于 $\sin \alpha = 0$, 所以 $B \times A = 0$

(3) 矢积遵守分配律, 即

$$C \times (A + B) = C \times A + C \times B \quad (17)$$

下面证明式 (17). 如图 14 所示, 矢量 A 、 B 和 C 在同一平面内, A 和 B 与 x 轴的夹角分别为 α 和 β , $A + B$ 与 x 轴的夹角为 φ . 由式 (15), 有

$$|C \times (A + B)| = |C| |A + B| \sin \varphi$$

由图可知, $|A + B| \sin \varphi = b$. 与此相似,

$$|C \times A| = |C| |A| \sin \alpha = |C| a$$

$$|C \times B| = |C| |B| \sin \beta = |C| b - a$$

上两式相加, 得

$$|C \times A| + |C \times B| = |C| a + |C| b - a = |C| b$$

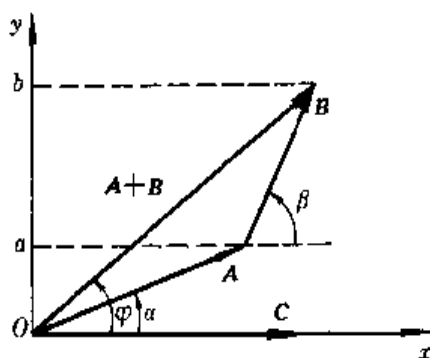


图 14 矢积分配律的证明用图

$$\text{即} \quad |\mathbf{C} \times \mathbf{A}| + |\mathbf{C} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{C} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B})|$$

$$\text{故} \quad \mathbf{C} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \times \mathbf{A} + \mathbf{C} \times \mathbf{B}$$

利用 $i \times j = k, i \times k = -j, i \times i = 0$, 以及相应的项, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x i + A_y j + A_z k) \times (B_x i + B_y j + B_z k) \\ &= (A_x B_z - A_z B_x) i + (A_z B_y - A_y B_z) j \\ &\quad + (A_y B_x - A_x B_y) k \end{aligned} \quad (18a)$$

上式还可写成行列式,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (18b)$$

例 2 已知 $\mathbf{A} = 2i + 4j - k, \mathbf{B} = 3i + j + 3k$, 求 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

解 由式(18b), 有

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 13i - 9j - 10k$$

五 矢量的导数和积分

1 矢量的导数

如图 15 所示, 在直角坐标系中有一矢量 \mathbf{A} , 它仅是时间的函数. 随着时间的流逝, 矢量 \mathbf{A} 的大小和方向都在改变. 设在时刻 t , 该矢量为 $\mathbf{A}_1(t)$, 在时刻 $t + \Delta t$, 这矢量为 $\mathbf{A}_2(t + \Delta t)$. 那么在 Δt 时间间隔内, 其增量为

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{A}_2(t + \Delta t) - \mathbf{A}_1(t)$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta \mathbf{A} / \Delta t$ 的极限值为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad (19)$$

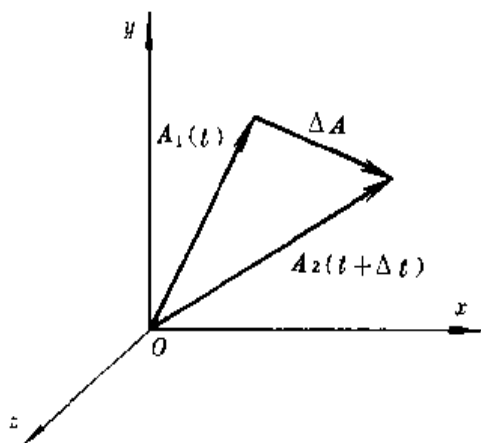


图 15 矢量导数

式中 $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ 为矢量 \mathbf{A} 对时间 t 的导数. 在一般情况下, 矢量 \mathbf{A} 不仅是时间 t 的函数, 还可以是坐标 x, y, z 等的函数, 即是一多元函数. 关于多元函数的求导, 请参阅有关数学书籍.

矢量函数的导数常用其分量函数的导数来表示. 在直角坐标系上, 矢量 \mathbf{A}_1 和 \mathbf{A}_2 可分别写成

$$\mathbf{A}_1 = A_{1x}\mathbf{i} + A_{1y}\mathbf{j} + A_{1z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A}_2 = A_{2x}\mathbf{i} + A_{2y}\mathbf{j} + A_{2z}\mathbf{k}$$

于是 $\Delta\mathbf{A} = (A_{2x} - A_{1x})\mathbf{i} + (A_{2y} - A_{1y})\mathbf{j} + (A_{2z} - A_{1z})\mathbf{k}$

如令 $\Delta A_x = A_{2x} - A_{1x}, \Delta A_y = A_{2y} - A_{1y}, \Delta A_z = A_{2z} - A_{1z}$

则有 $\Delta\mathbf{A} = \Delta A_x\mathbf{i} + \Delta A_y\mathbf{j} + \Delta A_z\mathbf{k}$

把上式代入式(19), 可得

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_x}{\Delta t}\mathbf{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_y}{\Delta t}\mathbf{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_z}{\Delta t}\mathbf{k}$$

$$\text{即} \quad \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt}\mathbf{k} \quad (20)$$

利用矢量导数的公式可以证明下列公式:

$$(1) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$(2) \quad \frac{d(C\mathbf{A})}{dt} = C \frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad (C \text{ 为常数})$$

$$(3) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

$$(4) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

作为举例,我们来证明式(3).已知式(13)为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

上式对时间 t 求导,有

$$\frac{d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{dt} = A_x \frac{dB_x}{dt} + B_x \frac{dA_x}{dt} + A_y \frac{dB_y}{dt} + B_y \frac{dA_y}{dt} + A_z \frac{dB_z}{dt} + B_z \frac{dA_z}{dt} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad & A_x \frac{dB_x}{dt} + A_y \frac{dB_y}{dt} + A_z \frac{dB_z}{dt} = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \\ & B_x \frac{dA_x}{dt} + B_y \frac{dA_y}{dt} + B_z \frac{dA_z}{dt} = \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \end{aligned}$$

所以式(21)为

$$\frac{d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{dt} = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad (22)$$

矢量导数在物理学中是很有用的.读者可以参阅第一章关于瞬时速度和加速度的定义.

2 矢量的积分

矢量函数的积分是很复杂的.下面举两个简单的例子.

设 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 均在同一平面直角坐标系内,且 $\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{A}$.于是,有

$$d\mathbf{B} = \mathbf{A} dt$$

对上式积分并略去积分常数,得

$$\mathbf{B} = \int \mathbf{A} dt = \int (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}) dt$$

$$\text{即} \quad \mathbf{B} = \left(\int A_x dt \right) \mathbf{i} + \left(\int A_y dt \right) \mathbf{j} \quad (23)$$

$$\text{其中} \quad B_x = \int A_x dt, B_y = \int A_y dt$$

式(23)在物理学中是经常遇到的,如计算直线运动和曲线运动的位置矢量或位移,以及力的冲量等.

若矢量 \mathbf{A} 沿如图 16 所示的曲线变化,那么

$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

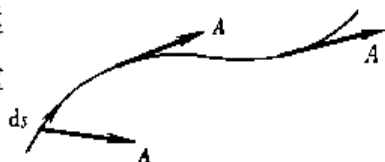
图 16 矢量线积分

为这个矢量沿此曲线的线积分.由于

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

$$d\mathbf{s} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$$

$$\text{所以} \quad \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k})$$



由于 $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1, i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$, 可得

$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int A_x dx + \int A_y dy + \int A_z dz \quad (24)$$

若上式中的 \mathbf{A} 为力, $d\mathbf{s}$ 为位移元, 则式(24)就是变力做功的计算式, 读者将在第三章见到.

附录二 一些基本物理常量

(国际科技数据委员会基本常数组 1986 年国际推荐值)

物理量	符 号	数 值	单 位
真空中光速	c	$2.997\,924\,58 \times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
真空磁导率	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	$\text{N} \cdot \text{A}^{-2}$
真空电容率	ϵ_0	$8.854\,187\,817 \times 10^{-12}$	$\text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
引力常量	G	$6.672\,59(85) \times 10^{-11}$	$\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
普朗克常量	h	$6.626\,075\,5(40) \times 10^{-34}$	$\text{J} \cdot \text{s}$
元电荷	e	$1.602\,177\,33(49) \times 10^{-19}$	C
里德伯常量	R_∞	$109\,737\,31.534$	m^{-1}
电子质量	m_e	$9.109\,389\,7(54) \times 10^{-31}$	kg
康普顿波长	λ_C	$2.426\,310\,58(22) \times 10^{-12}$	m
质子质量	m_p	$1.672\,623\,1(10) \times 10^{-27}$	kg
中子质量	m_n	$1.674\,928\,6(10) \times 10^{-27}$	kg
阿伏伽德罗常数	N_A	$6.022\,136\,7(36) \times 10^{23}$	mol^{-1}
摩尔气体常量	R	$8.314\,510(70)$	$\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
玻耳兹曼常量	k	$1.380\,658\,(12) \times 10^{-23}$	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$
斯特藩 - 玻耳兹曼常量	σ	$5.670\,51(19) \times 10^{-8}$	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

附录三 我国法定计量单位和国际单位制(SI)单位

我国法定计量单位,是以国际单位制单位为基础,同时选用了一些非国际单位制的单位.本书使用我国法定计量单位.为此,对国际单位制择要予以介绍.

一 国际单位制的基本单位

量	单位名称 ^①	单位符号	定 义
长 度	米	m	米是光在真空中($1/299\,792\,458$)s时间间隔内所经路径的长度.
质 量	千克(公斤) ^②	kg	千克是质量单位,等于国际千克原器的质量.
时 间	秒	s	秒是铯 133 原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射的 $9\,192\,631\,770$ 个周期的持续时间.
电 流	安[培]	A	在真空中,截面积可忽略的两根相距 1m 的无限长平行圆直导线内通以等量恒定电流时,若导线间相互作用力在每米长度上为 2×10^{-7} N,则每根导线中的电流为 1 A.
热力学温度	开[尔文]	K	热力学温度开尔文是水三相点热力学温度的 $1/273.16$.
物质的量	摩[尔]	mol	摩尔是一系统的物质的量,该系统中所包含的基本单元数与 0.012 kg 碳-12 的原子数目相等.在使用摩尔时,基本单元应予指明,可以是原子、分子、离子、电子及其它粒子,或是这些粒子的特定组合.
发光强度	坎[德拉]	cd	坎德拉是一光源在给定方向上的发光强度,该光源发出频率为 540×10^{12} Hz 的单色辐射,且在此方向上的辐射强度为 $(1/683)$ W /sr.

① 去掉方括号时为单位名称的简称,去掉方括号中的字时即成为单位名称的简称;无方括号的单位名称,简称与全称同.

② 圆括号中的名称与它前面的名称是同义词.

二 国际单位制的辅助单位

量	单位名称	单位符号	定 义
[平面]角	弧 度	rad	弧度是一圆内两条半径之间的平面角,这两条半径在圆周上截取的弧长与半径相等。
立体角	球面度	sr	球面度是一立体角,其顶点位于球心,而它在球面上所截取的面积等于以球半径为边长的正方形面积。

三 国际单位制中具有专门名称的导出单位

量	名 称	符 号	用其它 SI 单位 表示的表示式	用 SI 基本单位 表示的表示式
频率	赫[兹]	Hz		s^{-1}
力	牛[顿]	N		$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
压强,应力	帕[斯卡]	Pa	N/m^2	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
能[量],功,热量	焦[耳]	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
功率,辐[射能]通量	瓦[特]	W	J/s	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
电荷[量]	库[仑]	C		$s \cdot A$
电势,电压,电动势,	伏[特]	V	W/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
电容	法[拉]	F	C/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
电阻	欧[姆]	Ω	V/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
电导	西[门子]	S	A/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
磁通[量]	韦[伯]	Wb	$V \cdot s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
磁感应强度,磁通[量] 密度	特[斯拉]	T	Wb/m^2	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
电感	亨[利]	H	Wb/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
摄氏温度	摄氏度	$^{\circ}C$		K
光通量	流[明]	lm		$cd \cdot sr$
[光]照度	勒[克斯]	lx	lm/m^2	$m^{-2} \cdot cd \cdot sr$
[放射性]活度	贝可[勒尔]	Bq		s^{-1}
吸收剂量	戈[瑞]	Gy	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$
剂量当量	希[沃特]	Sv	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$

四 我国选定的非国际单位制单位

量	单位名称	单位符号	与 SI 单位的关系
时 间	分	min	$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$
	[小]时	h	$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3\,600 \text{ s}$
	日,(天)	d	$1 \text{ d} = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$
〔平面〕角	度	°	$1^\circ = (\pi/180) \text{ rad}$
	[角]分	'	$1' = (1/60)^\circ = (\pi/10\,800) \text{ rad}$
	[角]秒	"	$1'' = (1/60)' = (\pi/648\,000) \text{ rad}$
体 积	升	L, l	$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$
质 量	吨	t	$1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$
	[统 的] 原子质量单位	u	$1 \text{ u} \approx 1.660\,540 \times 10^{-27} \text{ kg}$
能	电子伏特	eV	$1 \text{ eV} \approx 1.602\,189\,2 \times 10^{-19} \text{ J}$

五 国际单位制倍数单位的词头

因数	词头名称	词头符号	因数	词头名称	词头符号
10^{18}	艾[可萨]	E	10^{-1}	分	d
10^{15}	拍[它]	P	10^{-2}	厘	c
10^{12}	太[拉]	T	10^{-3}	毫	m
10^9	吉[咖]	G	10^{-6}	微	μ
10^6	兆	M	10^{-9}	纳[诺]	n
10^3	千	k	10^{-12}	皮[可]	p
10^2	百	h	10^{-15}	飞[母托]	f
10^1	十	da	10^{-18}	阿[托]	a

附录四 空气、水、地球、太阳系的一些常用数据

空气和水的一些性质(在 20°C 、 $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 时)

	空 气	水
密 度	$1.20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$1.00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
比热容(c_p)	$1.00 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	$4.18 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
声 速	$343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	$1.26 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

有关地球的一些常用数据

密 度	$5.49 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
半 径	$6.37 \times 10^6 \text{ m}$
质 量	$5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$
大气压强 (地球表面)	$1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$
地球与太阳 间平均距离	$1.50 \times 10^{11} \text{ m}$

有关太阳系的一些常用数据

星 体	平均轨道半径/m	星体半径/m	轨道周期/s	星体质量/kg
太 阳	5.6×10^{20} (银河)	6.96×10^8	8×10^{16}	1.99×10^{30}
水 星	5.79×10^{10}	2.42×10^6	7.51×10^6	3.31×10^{22}
金 星	1.08×10^{11}	6.10×10^6	1.94×10^7	4.87×10^{22}
地 球	1.50×10^{11}	6.38×10^6	3.15×10^7	5.98×10^{24}
火 星	2.28×10^{11}	3.38×10^6	5.94×10^7	6.42×10^{22}
木 星	7.78×10^{11}	7.13×10^7	3.74×10^8	1.90×10^{27}
土 星	1.43×10^{12}	6.04×10^7	9.35×10^8	5.69×10^{26}
天王星	2.87×10^{12}	2.38×10^7	2.64×10^9	8.71×10^{25}
海王星	4.50×10^{12}	2.22×10^7	5.22×10^9	1.03×10^{26}
冥王星	5.91×10^{12}	3×10^6	7.82×10^9	1.20×10^{22}
月 球	3.84×10^8 (地球)	1.74×10^6	2.36×10^6	7.35×10^{22}

习 题 答 案

1-1 (1) -32 m; (2) 48 m

1-3 $-v[1 - \frac{h^2}{(l_0 - vt)^2}]^{-1/2}i$

1-4 (1) 0.705 s; (2) 0.716 m

1-5 (1) $(3 \text{ m})\cos[(0.1\pi\text{s}^{-1})t]i + (3\text{m})[\sin(0.1\pi\text{s}^{-1})t + 1]j$;
(2) $-(0.3\pi\text{m}\cdot\text{s}^{-1})i, -(0.03\pi^2\text{m}\cdot\text{s}^{-2})j$

1-6 $(4.0\text{m}\cdot\text{s}^{-1})i + (8.0\text{m}\cdot\text{s}^{-1})j; (16\text{m}\cdot\text{s}^{-2})j$

1-7 (1) $19\text{m} - \frac{1}{2}(x/\text{m})^2$; (2) $(2.00\text{m}\cdot\text{s}^{-1})i - (6.00\text{m}\cdot\text{s}^{-1})j$; (3) $(2.00\text{m}\cdot\text{s}^{-1})i$
 $+ (4.00\text{m}\cdot\text{s}^{-2})tj, a_t = 3.58\text{m}\cdot\text{s}^{-2}e_t, a_n = 1.79\text{m}\cdot\text{s}^{-2}e_n$

1-8 (1) $18.0\text{m}\cdot\text{s}^{-1}, v_0$ 与 x 轴夹角 $\alpha = 123^\circ 41'$; (2) $72.1\text{m}\cdot\text{s}^{-2}, a$ 与 x 轴的夹角 β
 $= -33^\circ 41'$ (或 $326^\circ 19'$)

1-9 (1) $(6\text{m}\cdot\text{s}^{-2})ti + (4\text{m}\cdot\text{s}^{-2})tj, [10\text{m} + (3\text{m}\cdot\text{s}^{-2})t^2]i + (2\text{m}\cdot\text{s}^{-2})t^2j$;
(2) $3y = 2x - 20\text{m}$

1-10 (1) 452 m; (2) 12.5° ; (3) $a_t = 1.88\text{m}\cdot\text{s}^{-2}, a_n = 9.62\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

1-11 $71.11^\circ \geq \theta \geq 69.92^\circ \quad 27.92^\circ \geq \theta \geq 18.89^\circ$

1-13 (2) $\bar{a}_1 \approx 0.9003 \frac{v^2}{R}, \bar{a}_2 \approx 0.9886 \frac{v^2}{R}, \bar{a}_3 \approx 0.9987 \frac{v^2}{R}, \bar{a}_4 \approx 1.000 \frac{v^2}{R}$

1-14 (1) $a = \frac{\sqrt{R^2 b^2 + (v_0 - bt)^4}}{R}, \theta = \arctg[-\frac{(v_0 - bt)^2}{Rb}]$; (2) $t = \frac{v_0}{b}$;

(3) $n = \frac{v_0^2}{4\pi bR}$

1-15 (1) 21.6s^{-1} ; (2) $53.8 \times 10^2\text{m}, 4.10 \times 10^3\text{s} \approx 1.15\text{h}$

1-16 $v = 1.94 \times 10^3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}, t = 3 \times 60 \times 60\text{s}$, 即下午 3 时正

1-17 (1) $\omega = 0.5\text{s}^{-1}, a_t = 1.0\text{m}\cdot\text{s}^{-2}, a = 1.01\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$;
(2) $\theta = 5.33$

1-18 (1) $a_n = 2.30 \times 10^2\text{m}\cdot\text{s}^{-2}, a_t = 4.80\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; (2) $\theta = 3.15$; (3) $t = 0.55\text{s}$

1-19 $5.36\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

1-21 $v_1 \geq v_2 (\frac{l \cos \theta}{h} + \sin \theta)$

1-22 (1) $1.05 \times 10^3\text{s}$; (2) $5.0 \times 10^2\text{m}$

1-23 $x' = 0, y' = \frac{1}{2}gt^2; a = g$

$$2-2 \quad 1.4 \text{ h}$$

$$2-3 \quad 1.23 \times 10^7 \text{ m}, 8.44 \times 10^3 \text{ m}; 1.49 \times 10^4 \text{ m}$$

$$2-4 \quad 49^\circ; 0.99 \text{ s}$$

$$2-5 \quad (1) \quad 5.94 \times 10^3 \text{ N}, \quad 1.98 \times 10^4 \text{ N}; (2) \quad -3.24 \times 10^3 \text{ N}, \quad 1.08 \times 10^4 \text{ N}$$

$$2-6 \quad 2.7 \text{ N}$$

$$2-7 \quad \frac{m'v'^2}{2\mu g(m' + m)}$$

$$2-8 \quad -2.79 \times 10^5 \text{ N}$$

$$2-9 \quad R = \frac{g}{\omega^2}$$

$$2-10 \quad \sqrt{2g \cos \alpha} / r, -3mg \cos \alpha$$

$$2-11 \quad (1) \frac{Rv_0}{R + v_0 \mu l}; (2) \frac{R}{\mu v_0}, \frac{R}{\mu} \ln 2$$

$$2-12 \quad 6.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} + (4.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})t + (6.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-3})t^2, 5.0 \text{ m} + (6.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})t \\ (2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})t^2 + (2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-3})t^3$$

$$2-13 \quad (1) 30.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; (2) 467 \text{ m}$$

$$2-14 \quad (1) \sqrt{2gh} e^{-\mu/\sin \alpha}; (2) 5.76 \text{ m}$$

$$2-15 \quad v = \sqrt{2gR} \approx 11.2 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$2-16 \quad (1) t \approx 6.11 \text{ s}; (2) s = 183 \text{ m}$$

$$2-17 \quad (1) h = y_0 + \frac{1}{2k} \ln \left(\frac{R}{g} + \frac{k v_0^2}{g} \right); (2) y = y_0 \left(1 + \frac{k v_0^2}{g} \right)^{-1/2}$$

$$2-18 \quad t = -\frac{mv_0}{2F} \ln 3, \quad t = \frac{mv_0^2}{2F} \ln \frac{4}{3} \approx 0.144 \frac{mv_0^2}{F}$$

$$2-19 \quad F_{11} = F_{12} = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (g + a),$$

$$a_1 = \frac{(m_1 - m_2)g - 2m_2 a}{m_1 + m_2},$$

$$a_2 = -\frac{2m_1 a + (m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$$

$$2-20 \quad (1) mg \sin \alpha \cos \alpha \frac{1}{m' + m \sin^2 \alpha};$$

$$(2) g \sin \alpha \frac{\sqrt{m'^2 + (2m'm + m^2) \sin^2 \alpha}}{m' + m \sin^2 \alpha}, \text{方向与 } y \text{ 轴负向夹角 } \theta = \arctg \frac{m' \cos \alpha}{m' + m};$$

$$(3) \frac{mm'g \cos \alpha}{m' + m \sin^2 \alpha}$$

$$3-1 \quad 2.25 \times 10^5 \text{ N}$$

$$3-2 \quad (1) -mv_0 \sin \alpha \mathbf{j}; (2) -2mv_0 \sin \alpha \mathbf{j}$$

$$3-3 \quad mg \frac{2\pi R}{v} \mathbf{k}$$

3-4 $1.14 \times 10^3 \text{ N}$

3-5 $2.5 \times 10^3 \text{ N}$, 作用力的方向则沿直角平分线指向弯管外侧。

3-6 500 m

3-7 $-0.40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $3.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

3-8 $\frac{mv_0 \sin \alpha}{(m' + m)g} u$

3-10 (1) $3.68 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$; (2) $2.47 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

3-11 $3.47 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $1.53 \times 10^4 \text{ m}$

3-12 (1) $\frac{Nm}{m' + Nm} u$; (2) $\sum_{n=1}^N \frac{m}{m' + nm} u$

3-13 1.69 J

3-14 $-\frac{27}{7} kc^{\frac{2}{3}} l^{\frac{7}{3}}$

3-15 882 J

3-16 (1) $0.53 \text{ J}, 0$; (2) $2.30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; (3) 2.49 N

3-17 4.00 kg

3-18 $k/2r^2$

3-20 (1) $-\frac{3}{8} mv_0^2$; (2) $\frac{3v_0^2}{16\pi rg}$; (3) $\frac{4}{3} \pi$

3-21 $F \geq (m_1 + m_2)g$

3-22 $\frac{1}{3}$

3-23 $0.41 \times 10^{-2} \text{ m}$

3-24 (1) $G \frac{m_E m}{6R_F}$; (2) $-G \frac{m_F m}{3R_E}$; (3) $E = -G \frac{m_E m}{6R_E}$

3-25 $\theta = 48.2^\circ$; $\sqrt{\frac{2Rg}{3}}$, 离开层面时的速度与重力方向间的夹角为 41.8°

3-26 $366 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$

3-27 $\sqrt{\frac{mm'}{k(m+m')}} v$

3-28 $\frac{2m'}{m} \sqrt{5gl}$

3-29 $\frac{E_H}{E_c} \approx 0.22 \times 10^{-2}$

3-30 (1) $4.69 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $54^\circ 6'$; (2) $22^\circ 20'$

3-31 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q^2}{mv_0^2}$, $\frac{1}{2} v_0$

3-32 $\sqrt{(\frac{m}{m' + m} v_0 \cos \alpha)^2 - 2hg(\mu \cot \alpha - 1)}$

3-33 $mg(3 + \frac{2m}{m'})$

$$3-34 \quad (1) 8.88 \text{ m}; (2) 0.2 \text{ m}; (3) 0.033 \text{ m}$$

$$3-35 \quad 4.93 \times 10^6 \text{ m}$$

$$3-36 \quad \mathbf{v}_3 = -(2.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})\mathbf{i} - (2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})\mathbf{j}$$

$$3-37 \quad (1) x_C = 1.5 \text{ m} + (0.25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})t^2, y_C = 1.9 \text{ m} + (0.19 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})t^2;$$

$$(2) \mathbf{p} = (8.0 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1})t\mathbf{i} + (6.0 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1})t\mathbf{j}$$

$$4-1 \quad 13.1 \text{ s}^{-2}; 390 \text{ 圈}$$

$$4-2 \quad (1) 8.6 \text{ s}^{-1}; (2) 9\pi e^{-\frac{t}{2}} \text{ s}^{-2}; (3) 5.87 \text{ 圈}$$

$$4-3 \quad (1) \frac{J}{c} \ln 2; (2) \frac{J\omega_0}{4\pi c}$$

$$4-4 \quad 10.8 \text{ s}$$

$$4-5 \quad mR^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right)$$

$$4-6 \quad 0.136 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$4-7 \quad \frac{3}{2} mR^2$$

$$4-8 \quad \frac{7}{5} mR^2$$

$$4-10 \quad (1) 2.45 \text{ m}; (2) F'_T = 39.2 \text{ N}$$

$$4-11 \quad a_1 = \frac{m_1 R + m_2 r}{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} gR, \quad a_2 = \frac{m_1 R - m_2 r}{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} gR,$$

$$F_{T1} = \frac{J_1 + J_2 + m_2 r^2 + m_2 Rr}{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} m_1 g, \quad F_{T2} = \frac{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_1 Rr}{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} m_2 g$$

$$4-12 \quad (1) \frac{m_2 g - m_1 g \sin \theta - \mu m_1 g \cos \theta}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}$$

$$(2) F_{T1} = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin \theta + \mu \cos \theta) + (\sin \theta + \mu \cos \theta) m_1 g l / r^2}{m_1 + m_2 + J / r^2},$$

$$F_{T2} = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin \theta + \mu \cos \theta) + m_2 g l / r^2}{m_1 + m_2 + J / r^2}$$

$$4-13 \quad 3.14 \times 10^2 \text{ N}$$

$$4-14 \quad (1) 1.13 \text{ s}; (2) 6.80 \text{ m}$$

$$4-15 \quad (1) \frac{2}{3} \mu mgRk; (2) 3\omega R / 4\mu g$$

$$4-16 \quad \frac{\omega^2 R^2}{2g}, \left(\frac{1}{2} m' - m \right) R^2 \omega$$

$$4-17 \quad 29.1 \text{ s}^{-1}$$

$$4-18 \quad \omega_1 = \frac{J_1 \omega_0 r_2^2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2}, \quad \omega_2 = \frac{J_1 \omega_0 r_1 r_2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2}$$

$$4-19 \quad 9.52 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$4-20 \quad 0.8\pi \text{ s}^{-1}$$

4-21 2.67 s

4-22 (1) $\frac{m'}{m'+2m}\omega_0$; (2) $\frac{m'R^2}{m'R^2+2mr^2}\omega_0$

4-23 (1) 2.0 m·N·s; (2) 88.38°

4-25 $8.11 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $6.31 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

4-26 (1) $2.12 \times 10^{29} \text{ J}$; (2) $7.47 \times 10^{16} \text{ N} \cdot \text{m}$

4-27 (1) $4\omega_0$; (2) $\frac{3}{2}mr_0^2\omega_0^2$

4-28 (1) 18.4 s^{-2} , 5.64 s^{-1} ; (2) 0.98 J ;
(3) 8.57 s^{-1}

4-29 (1) $20.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; (2) $1.32 \times 10^4 \text{ J}$

4-30 $v \geq \frac{4m'}{m}\sqrt{2gl}$

4-31 $v_0 = \sqrt{2gR + \frac{J_0\omega_0^2 R^2}{J_0 + mR^2}}$, $v_C = \sqrt{2gh} = \sqrt{4gR}$

4-32 $R\left(\sqrt{1 + \frac{m'}{4m}} - 1\right)$

4-33 $\sqrt{\left(\frac{m}{m'+m}\right)^2 v_0^2 - \frac{k(l-l_0)^2}{m'+m}}$,

$\arcsin \frac{ml_0 v_0}{l(m'+m)} \left[v_0^2 m / (m'+m)^2 - k(l-l_0)^2 / (m'+m) \right]^{-1/2}$, θ 为滑块速度
方向与弹簧连线间的夹角

4-34 $\frac{2}{3}g \sin \theta$

4-35 (1) $\omega/4$; (2) $-\frac{1}{32}ml^2\omega^2$

4-36 $\arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\theta_0\right)$

4-37 (1) $\frac{2(m_1+m_2)}{3m_1+2m_2}g$; (2) $\frac{m_1m_2}{3m_1+m_2}g$

5-1 106 N

5-2 $6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$, $\rho = 5.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

5-3 (1) 0; $\frac{Gm'_1m}{r_0^2}$; $\frac{G(m'_1+m'_2)m}{r_c^2}$;

(2) $-Gm\left(\frac{m'_1}{R_1} + \frac{m'_2}{R_2}\right)$, $-Gm\left(\frac{m'_1}{r_B} + \frac{m'_2}{R_2}\right)$, $Gm\left(\frac{m'_1+m'_2}{r_C}\right)$

5-4 $-G\frac{m'm}{r^2}\left[1 - \frac{1}{8\left(1 - \frac{R}{2r}\right)^2}\right]\mathbf{e}_r$

5-5 $g'_{\text{ex}} = (9.81 - 3.06 \times 10^{-6}h) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $g'_{\text{in}} = (9.81 + 1.53 \times 10^{-6}h) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

$$5-7 \quad 3.59 \times 10^7 \text{ m}, 3.07 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$5-8 \quad 0.634d$$

$$5-10 \quad (1) 3.45 \times 10^8 \text{ m}; (2) 1.11 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$5-11 \quad \frac{16 \rho^2 G \pi^2 r^3}{15}$$

$$5-12 \quad -2\pi Gm\lambda; 0$$

$$5-13 \quad -\frac{Gm'm}{\sqrt{R^2+r^2}}, -\frac{Gm'mr}{(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}i$$

$$5-15 \quad (1) 7.7 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; (2) 2.87 \times 10^{10} \text{ J}, -5.74 \times 10^{10} \text{ J}; \\ (3) -2.87 \times 10^{10} \text{ J}$$

$$5-16 \quad (1) 0.177r, 2.823r; (2) 11.5\left(\frac{r^3}{Gm_E}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$5-17 \quad 3\pi/GT^2$$

$$5-18 \quad (1) 5.29 \times 10^{12} \text{ m}, 8.87 \times 10^{10} \text{ m}; (2) 59.6$$

$$6-1 \quad 4.43 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$6-2 \quad 6.11 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$6-3 \quad 9.5 \text{ d}$$

$$6-4 \quad 1.15 \text{ K}$$

$$6-5 \quad 150 \text{ J}$$

$$6-6 \quad 9.97 \times 10^3 \text{ J}$$

$$6-7 \quad 5.0 \times 10^2 \text{ J}; 1.21 \times 10^3 \text{ J}$$

$$6-8 \quad 1.52 \times 10^5 \text{ J}; \text{外界对气体作功}$$

$$6-9 \quad (1) 3.1 \times 10^3 \text{ J}; (2) 4.0 \times 10^3 \text{ J}$$

$$6-10 \quad (1) 129.8 \text{ J}; 93.1 \text{ J}; (2) 36.6 \text{ J}; 0$$

$$6-11 \quad \text{系统向外界放热}; -252 \text{ J}$$

$$6-12 \quad 1000 \text{ J}$$

$$6-13 \quad (1) a(T_2 - T_1) + b(T_2^2 - T_1^2) - \frac{c}{3}(T_2^3 - T_1^3); (2) a + b(T_2 + T_1) - \frac{c}{3}(T_2^2 + T_1^2 + T_1^2); (3) -2.94 \times 10^{13} \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}; -3.05 \times 10^{13} \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$6-14 \quad -6.91 \times 10^3 \text{ J}; -6.91 \times 10^3 \text{ J}$$

$$6-15 \quad 55.7 \text{ J}$$

$$6-16 \quad (1) 2.77 \times 10^3 \text{ J}; 2.77 \times 10^3 \text{ J}; (2) 2.0 \times 10^3 \text{ J}; 2.0 \times 10^3 \text{ J}$$

$$6-17 \quad 9.61 \times 10^5 \text{ Pa}; 571 \text{ K}$$

$$6-18 \quad -23.0 \text{ J}$$

$$6-19 \quad 15\%$$

$$6-20 \quad \eta = 25\%, \text{其余略}$$

$$6-21 \quad (1) \text{不是致冷机}; (2) 12.3\%$$

$$6-22 \quad 93.3 \text{ K}$$

6-23 (2) 不是

6-24 $2.0 \times 10^7 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$ 6-29 $8.0 \text{ kW} \cdot \text{h}$ 6-30 $29.1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ 6-31 $nR \ln V_B/V_A + \frac{3}{2} nR \ln T_B/T_A$ 6-32 $11.52 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ 7-1 $6.56 \times 10^7 \text{ m}^{-2}$ 7-2 $1.16 \times 10^7 \text{ K}$ 7-3 (1) $2.44 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$; (2) $1.30 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; (3) $6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$; (4) $3.45 \times 10^{-9} \text{ m}$ 7-4 $3.89 \times 10^{-22} \text{ J}$ 7-5 $5.65 \times 10^{-21} \text{ J}$; $7.72 \times 10^{-21} \text{ J}$; $7.73 \times 10^3 \text{ K}$ 7-6 (1) $2.07 \times 10^{-15} \text{ J}$; (2) $1.58 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;7-7 $2.06 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $2.23 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $1.82 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
 $5.16 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $5.58 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $4.55 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 7-8 (1) $2.000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; (2) 481 K 7-9 72.5 K ; $951 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 7-10 (1) $1.35 \times 10^5 \text{ Pa}$; (2) 362 K ; $7.49 \times 10^{-21} \text{ J}$ 7-11 $389 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 7-12 0.25 7-13 (1) $1.18 \times 10^4 \text{ K}$, $1.89 \times 10^5 \text{ K}$ 7-14 (2) $2N/3v_0$; (3) $7N/12$; (4) $31mv_0^2/36$ 7-16 $1.93 \times 10^3 \text{ m}$ 7-17 6.06 Pa 7-18 $3.21 \times 10^9 \text{ m}^{-3}$, $7.8 \times 10^8 \text{ m}$ 7-19 $3.81 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ 7-20 $\bar{Z}_0/2$; $2\bar{\lambda}_0$ 7-21 $3.05 \times 10^6 \text{ Pa}$; $3.78 \times 10^6 \text{ Pa}$

索引

(按汉语拼音字母顺序排列)

A

阿伏伽德罗常数	Avogadro constant	(6-1)
爱因斯坦	Einstein	(4-6)

B

保守力	conservation force	(3-5)
玻耳兹曼	Boltzmann	(7-6)
玻耳兹曼常量	Boltzmann constant	(7-2)
玻耳兹曼关系式	Boltzmann relation	(7-16)
玻耳兹曼能量分布	energy distribution of Boltzmann	(7-6)
不可逆过程	irreversible process	(6-7)
布朗运动	Brown motion	(7-1)
玻意耳定律	Boyle law	(6-1)

C

参考系	reference frame	(1-1)
查理定律	Charles law	(6-1)
长度收缩	length contraction	(4-6)
冲量	impulse	(3-1)

D

等概率假设	postulate of equal a priori probabilities	(7-10)
等体过程	isochoric process	(6-4)
等体线	isochore	(6-4)
等温过程	isothermal process	(6-5)
等温线	isotherm	(6-5)
等压过程	isobaric process	(6-4)
等压线	isobar	(6-4)
第二宇宙速度	second cosmic velocity	(3-6)
第三宇宙速度	third cosmic velocity	(3-6)

第一宇宙速度	first cosmic velocity	(3-6)
定体摩尔热容	molar heat capacity at constant volume	(6-4)
定体热容	heat capacity at constant volume	(6-4)
定压摩尔热容	molar heat capacity at constant pressure	(6-4)
定压热容	heat capacity at constant pressure	(6-4)
定轴转动	fixed-axis rotation	(4-1)
动量	momentum	(2-1)
动量定律	theorem of momentum	(3-1)
动量守恒定律	law of conservation momentum	(3-2)
动能	kinetic energy	(3-4)
动能定理	theorem of kinetic energy	(3-4)
杜隆-珀蒂定律	Dulong Petit law	(7-4)

F

法向加速度	normal acceleration	(1-3)
范德瓦耳斯方程	van der Waals equation	(7-9)
方均根速率	root-mean-square speed	(7-5)
非保守力	nonconservative force	(3-5)
非惯性系	noninertial system	(2-6)
非平衡态	nonequilibrium state	(7-8)
分布函数	distribution function	(7-5)

G

盖吕萨克定律	Gay Lussac law	(6-1)
刚体	rigid body	(4-1)
刚体定轴转动	fixed-axis rotation of rigid body	(4-1)
刚体平面平行运动	plane-parallel motion of rigid body	(4-5)
功	work	(3-4)
功率	power	(3-4)
功能原理	principle work-energy	(3-6)
惯性力	inertial force	(2-6)
惯性系	inertial system	(2-4)

H

横向加速度	transverse acceleration	(5-5)
横向速度	transverse velocity	(5-5)
滑动摩擦力	force of sliding friction	(2-3)
滑动摩擦因数	coefficient of sliding friction	(2-3)

火箭	rocket	(3-3)
----	--------	-------

J

机械运动	mechanical motion	(1-1)
机械能	mechanical energy	(3-6)
机械能守恒定律	law of conservation of mechanical energy	(3-6)
极限速度	limiting velocity	(2-5)
加速度	acceleration	(1-1)
伽利略相对性原理	Galilean principle of relativity	(2-4)
角动量	angular momentum	(4-3)
角动量守恒定律	law of conservation of angular momentum	(4-3)
角加速度	angular acceleration	(4-4)
角速度	angular velocity	(4-1)
角位移	angular displacement	(4-1)
劲度	stiffness	(3-5)
劲度系数	coefficient of stiffness	(3-5)
径矢	radius vector	(1-1)
径向加速度	radial acceleration	(5-5)
径向速度	radial velocity	(5-5)
静摩擦力	static friction force	(2-3)
绝对速度	absolute velocity	(1-4)
绝热线	adiabat	(6-5)
绝对运动	absolute motion	(1-1)
绝热过程	adiabatic process	(6-5)
绝热方程	adiabatic equation	(6-5)

K

卡诺	Carnot	(6-7)
卡诺定理	Carnot theorem	(6-7)
卡诺循环	Carnot cycle	(6-7)
开普勒	Kepler	(5-1)
开普勒定律	Kepler law	(5-1)
开尔文	Kelvin	(6-1)
可逆过程	reversible process	(6-7)
克劳修斯	Clausius	(6-7)
克劳修斯等式	Clausius equality	(6-8)
扩散	diffusion	(7-8)
扩散系数	coefficient of diffusion	(7-8)

L

理想气体	ideal gas	(6-1)
理想气体内能	internal energy of ideal gas	(7-4)
理想气体物态方程	equation of state of ideal gas	(6-1)
力	force	(2-1)
力矩	moment of force	(4-2)

M

麦克斯韦	Maxwell	(7-5)
麦克斯韦速率分布	Maxwell speed distribution	(7-5)
摩尔气体常量	molar gas constant	(6-1)

N

内力	internal force	(3-2)
内能	internal energy	(6-3)
能量均分定理	equipartition theorem of energy	(7-4)
能量守恒定律	law of conservation energy	(3-8)
粘度	coefficient of viscosity	(7-8)
牛顿	Newton	(2-1)
牛顿第二定律	Newton second law	(2-1)
牛顿第三定律	Newton third law	(2-1)
牛顿第一定律	Newton first law	(2-1)

P

佩兰	Perrin	(7-6)
碰撞	collision	(3-7)
平衡态	equilibrium state	(6-1)
平均碰撞频率	mean collision frequency	(7-7)
平均速率	mean speed	(7-5)
平均自由程	mean free path	(7-7)
平行轴定理	parallel axis theorem	(4-2)
平移	translation	(1-1)

Q

气体动理论	gas kinetics	(7-1)
气体压强	pressure of gas	(6-1)
牵连速度	convected velocity	(1-4)

迁移现象	transport phenomenon	(7-8)
切向加速度	tangential acceleration	(1-3)
曲线运动	curvilinear motion	(1-1)

R

热传导	heat conduction	(7-8)
热导率	thermal conductivity	(7-8)
热机	heat engine	(6-6)
热机效率	efficiency of heat engine	(6-6)
热力学第二定律	second law of thermodynamics	(6-7)
热力学第一定律	first law of thermodynamics	(6-3)
热力学概率	thermodynamic probability	(7-10)
热力学温度	thermodynamic temperature	(6-1)
热力学系统	thermodynamic system	(6-2)
热力学循环	thermodynamic cycle	(6-6)
热量	heat	(6-2)
热容	heat capacity	(6-4)
热源	heat source	(6-6)
热运动	thermal motion	(6-7)

S

三相点	triple point	(附录三)
熵	entropy	(6-8)
熵增加原理	principle of entropy increase	(6-8)
摄氏温度	Celsius temperature	(6-1)
实际气体	real gas	(7-9)
势能	potential energy	(3-5)
速度	velocity	(1-1)
速率	speed	(1-1)
斯特恩	Stern	(7-5)

T

弹性力	elastic force	(2-3)
弹性势能	elastic potential energy	(3-5)
逃逸速度	velocity of escape	(3-6)

W

瓦特	Watt	(2-5)
----	------	-------

外力	external force	(3-2)
完全非弹性碰撞	perfect inelastic collision	(3-7)
完全弹性碰撞	perfect elastic collision	(3-7)
万有引力	universal gravitation	(2-3)
万有引力定律	law of universal gravitation	(2-3)
微观状态数	number of microscopic state	(7-10)
位矢	position vector	(1-1)
位移	displacement	(1-1)
温度	temperature	(6-1)
物态参量	state parameter	(6-1)
无规运动	random motion	(7-1)
无序	disorder	(7-10)
无序度	degree of disorder	(7-10)

X

狭义相对论	special relativity	(4-6)
相对论速度相加	relativity velocity addition	(4-6)
相对论性质能关系	relativity mass-energy relation	(4-6)
相对速度	relative velocity	(1-4)
相对运动	relative motion	(1-4)
向心加速度	centripetal acceleration	(1-3)
向心力	centripetal force	(2-6)

Y

压强	pressure	(6-1)
引力常量	gravitational constant	(2-3)
引力场	gravitational field	(5-3)
引力场强度	gravitational field intensity	(5-3)
引力势	gravitational potential	(5-3)
引力势能	gravitational potential energy	(5-3)
圆周运动	circular motion	(1-3)
匀变速直线运动	uniform accelerated rectilinear motion	(1-2)
匀速(率)圆周运动	uniform speed circular motion	(1-3)
匀速直线运动	uniform rectilinear motion	(1-2)

Z

张力	tension	(2-3)
质点	material point, particle	(1-1)

质点系	system of particles	(3 - 1)
质点系动量定理	theorem of momentum of particle system	(3 - 1)
质心	centre of mass	(3 - 9)
质心运动定律	law of kinematic of centre mass	(3 - 9)
质心加速度	acceleration of centre - mass	(3 - 9)
重力	gravity	(2 - 3)
重力势能	gravity potential energy	(3 - 5)
转动惯量	moment of inertia	(4 - 2)
自由度	degree of freedom	(7 - 4)
自由程	free path	(7 - 7)
准静态过程	quasi static process	(6 - 2)
最大静摩擦因数	coefficient of maximum static friction	(2 - 3)
最概然速率	most probable speed	(7 - 5)

