

九章  
丛书

高校经典教材同步辅导丛书

配套高等版东南大学·马文蔚 周雨青编

教你用更多的自信面对未来!

一书两用  
同步辅导+考研复习

# 物理学

(第六版·下册)

## 同步辅导及习题全解

主 编 焦艳芳

习题超全解  
名师一线经验大汇集, 解题步骤超详细, 方法技巧最实用

新版



中国水利水电出版社  
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

# 物理学（第六版·下册）

## 同步辅导及习题全解

主 编 焦艳芳



中国水利水电出版社  
www.waterpub.com.cn



## 内 容 提 要

本书是与高等教育出版社出版的,由东南大学七所工科院校编写,马文蔚、周雨青改编的《物理学》(第六版·下册)一书配套的同步辅导书。

本书共有8章,分别介绍振动、波动、光学、气体动理论、热力学基础、相对论、量子物理、原子核与粒子物理简介。本书按教材内容安排全书结构,各章均包括本章知识框架图、考试要点、知识点整理与解析、考研真题解析、课后习题五部分内容。全书按教材内容,针对各章节习题给出详细解答,思路清晰,逻辑性强,循序渐进地帮助读者分析并解决问题,内容详尽,简明易懂。

本书可作为高等院校学生学习“物理学”课程的辅导教材,也可作为考研人员备考的辅导教材,还可作为教师备课的参考资料。

## 图书在版编目(CIP)数据

物理学(第六版·下册)同步辅导及习题全解 / 焦  
艳芳主编. — 北京:中国水利水电出版社, 2015.9  
(高校经典教材同步辅导丛书)  
ISBN 978-7-5170-3600-5

I. ①物… II. ①焦… III. ①物理学—高等学校—教  
学参考资料 IV. ①O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第210220号

策划编辑:杨庆川 责任编辑:张玉玲 加工编辑:孙 丹 封面设计:李 佳

书 名	高校经典教材同步辅导丛书
作 者	物理学(第六版·下册)同步辅导及习题全解
出版发行	主 编 焦艳芳 中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: mchannel@263.net (万水) sales@waterpub.com.cn
经 售	电话: (010) 68367658 (发行部)、82562819 (万水) 北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京万水电子信息有限公司
印 刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规 格	170mm×227mm 16开本 13.75印张 339千字
版 次	2015年9月第1版 2015年9月第1次印刷
印 数	0001—5000册
定 价	20.80元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社发行部负责调换  
版权所有·侵权必究

# 前言

东南大学七所工科院校编写,马文蔚、周雨青、解希顺改编的《物理学》(第六版·下册)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《物理学》(第六版·下册)同步辅导及习题全解。本书旨在使广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑《物理学》(第六版·下册)这门课程的特点,我们在内容上作了以下安排:

**1. 本章知识框架图。**每章的知识网络图系统全面地涵盖了本章的知识点,使学生能一目了然地浏览本章内容的框架结构。

**2. 考试要点。**每章前面均对本章的知识要点进行了整理。综合众多参考资料,归纳了本章几乎所有的考点,便于读者学习与复习。

**3. 知识点整理与解析。**对每章知识点做了简练概括,梳理了各知识点之间的脉络联系,突出各章主要定理及重要公式,使读者在各章学习过程中目标明确,有的放矢。

**4. 考研真题解析。**精选历年研究生入学考试中具有代表性的试题进行了详细的解答,以开拓广大同学的解题思路,使其能更好地掌握该课程的基本内容和解题方法。

**5. 课后习题全解。**教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题给了详细的解答。

由于时间较仓促,编者水平有限,难免书中有疏漏之处,敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者  
2015年6月

<b>第九章 振动</b> .....	1
本章知识框架图 .....	1
考试要点 .....	2
知识点整理与解析 .....	2
考研真题解析 .....	14
课后习题 .....	17
<b>第十章 波动</b> .....	35
本章知识框架图 .....	35
考试要点 .....	36
知识点整理与解析 .....	36
考研真题解析 .....	49
课后习题 .....	53
<b>第十一章 光学</b> .....	67
本章知识框架图 .....	67
考试要点 .....	67
知识点整理与解析 .....	68
考研真题解析 .....	85
课后习题 .....	92

# 目录

## contents

<b>第十二章 气体动理论</b>	106
本章知识框架图	106
考试要点	107
知识点整理与解析	107
考研真题解析	115
课后习题	119
<b>第十三章 热力学基础</b>	129
本章知识框架图	129
考试要点	130
知识点整理与解析	130
考研真题解析	138
课后习题	146
<b>第十四章 相对论</b>	159
本章知识框架图	159
考试要点	160
知识点整理与解析	160
考研真题解析	167
课后习题	171

# 目 录

## contents

<b>第十五章 量子物理</b> .....	180
本章知识框架图 .....	180
考试要点 .....	180
知识点整理与解析 .....	181
考研真题解析 .....	191
课后习题 .....	196
<b>第十六章 原子核与粒子物理简介</b> .....	207
本章知识框架图 .....	207
考试要点 .....	208
知识点整理与解析 .....	208
课后习题 .....	211

# 第九章

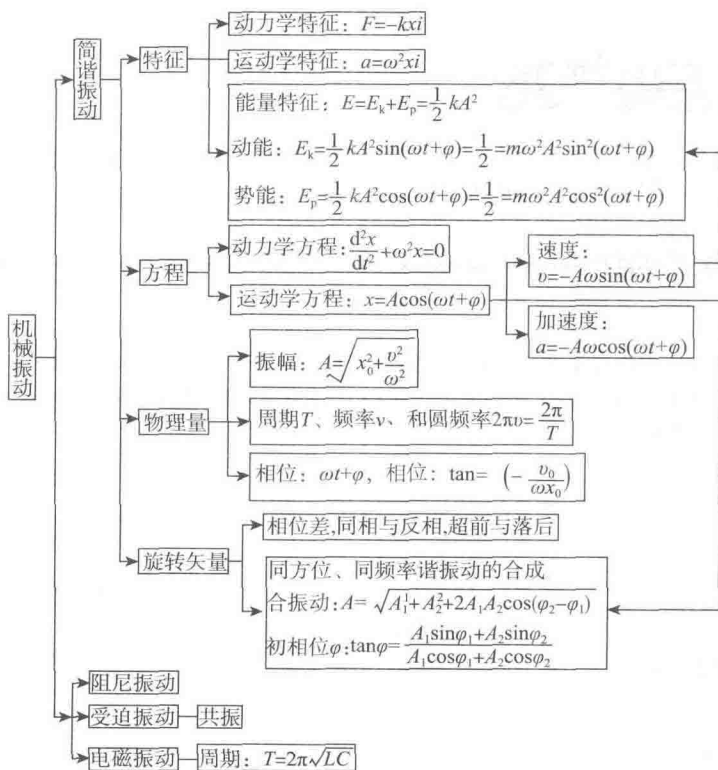
## 振动

1

第九章

振动

### 本章知识框架图



## 考试要点

1. 简谐运动的特征和规律.
2. 描述简谐运动的特征量——振幅、周期、频率(角频率)、相位及初相的物理意义,确定这些特征量的方法,从而能熟练地写出简谐运动的表达式.
3. 简谐运动与旋转矢量的关系,会用旋转矢量方法和  $x-t$ 、 $v-t$ 、 $a-t$  图线讨论和计算简谐运动的有关问题.
4. 同方向、同频率的两个简谐运动合成的方法和结论:“拍”现象和李萨如图形形成的条件及简单应用.
5. 阻尼振动、受拍振动和共振发生的条件、主要特征及实际应用.
6. 无阻尼电磁振荡的方程、能量.

## 知识点整理与解析

简谐振动是最简单最基本的振动,任何复杂的振动都可以看成是许多简谐振动的合成.因此,研究简谐振动是研究一切复杂振动的基础.

### 一、简谐振动的性

#### 1. 简谐振动

振动是指任何一个物理量在某一固定值附近随时间周期性变化的运动.物体在一定位置附近做来回往复的运动称为机械振动.物体离开平衡位置的位移(或角位移),按余弦函数的规律随时间变化的振动称为简谐振动.

#### 2. 弹簧振子的振动

当质点离开平衡位置的位移为  $x$  时,它受到的弹性力为

$$F = -kx$$

根据牛顿第二定律  $a = \frac{F}{m} = -\frac{kx}{m}$ , 即  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ , 令  $\frac{k}{m} = \omega^2$ , 则  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$ , 方程的解是

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

#### 3. 简谐振动的动力学特征

(1) 线性回复力:  $F = -kx$

(2) 动力学方程:  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$

#### 4. 简谐振动的运动学特征

(1) 位移: 取系统平衡位置为坐标原点, 则

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

(2) 速度:  $v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$

$$(3) \text{ 加速度: } a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \text{ 或 } a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

例1 图中的弹簧,当悬挂10 g砝码时约伸长8 cm.现将这根弹簧下悬挂25 g的物体,使它做自由振动,按下列三种情况分别求出振动方程.

(1) 开始时,使物体从平衡位置向下移动4 cm后松手;

(2) 开始时物体在平衡位置,给以向上21 cm/s的初速度使其振动;

(3) 把物体从平衡位置拉下4 cm后,又给以向上的21 cm/s的初速度,同时开始计时.

解 已知挂上质量  $m_0 = 10$  g 时,弹簧伸长是  $\Delta l = 8$  cm,由此求得该弹簧的倔强系数

$$k = \frac{m_0 g}{\Delta l} = \frac{0.010 \times 9.8}{0.08} = 1.225 \text{ N/m.}$$

现悬挂质量  $m = 25$  g 的物体,自由振动的圆频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1.225}{0.025}} = 7 \text{ s}^{-1}.$$

$$(1) x_0 = A = 4 \cos \varphi = 0,$$

$$\text{振动方程 } x = 4 \cos(7t) \text{ cm.}$$

(2) 当  $t = 0$  时,  $x_0 = 0$ ,  $v_0 = -21$  cm/s, 可见

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, |\omega A| = 21 \text{ cm/s}, A = 3 \text{ cm}, x = 3 \cos\left(7 + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm.}$$

(3)  $t = 0$  时,  $x_0 = +4$  cm,  $v_0 = -21$  cm/s,

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{21}{7}\right)^2} = 5 \text{ cm,}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-v_0}{x_0 \omega}\right) = \arctan\left(\frac{21}{4 \times 7}\right) = 36.8^\circ = 0.64 \text{ 弧度,}$$

$$x = 5 \cos(7t + 0.64) \text{ cm.}$$

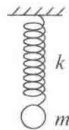


图 9-1

## 二、描述简谐振动的物理参量

### 1. 振幅 A

由于  $|\cos(\omega t + \varphi)| \leq 1$ , 所以  $|x| \leq A$ , 即位移  $x$  的绝对值最大为  $A$ , 我们把作简谐振动的物体离开平衡位置的最大位移  $A$  称为振幅.

### 2. 周期 T

我们把物体作一次完全振动所需要的时间称为振动的周期, 用  $T$  表示, 通常以 s 为单位.

### 3. 频率 $\nu$

单位时间物体所作的完全振动的次数称为频率, 用  $\nu$  表示, 它的单位是 Hz (赫兹). 当物体每秒钟振动一次时, 称它的频率为 1 Hz. 显然, 频率等于周期的倒数, 即

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (9-1)$$

有

$$\omega = 2\pi\nu \quad (9-2)$$

所以  $\omega$  表示物体在  $2\pi$  秒时间内所作的完全振动的次数, 称为圆频率, 单位是 1/s. 弹簧振动的频率为



$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (9-3)$$

由于弹簧振子的圆频率  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  是由表征弹簧振子性质的物理量——质量  $m$  和弹性系数所决定的, 所以周期和频率只与振动系统本身的性质有关. 这种由振动系统本身的性质所决定的周期和频率称为周期和固有频率.

#### 4. 相位 $(\omega t + \varphi)$ 和初相位 $\varphi$

##### (1) 相位

由简谐振动的位移和速度方程可以看出, 当振幅  $A$  与圆频率  $\omega$  一定时, 振动的位移和速度都决定于物理量  $(\omega t + \varphi)$ ,  $(\omega t + \varphi)$  称为振动的位相. 所以当物体以一定的振幅和圆频率作简谐振动时, 位相不仅决定振动物体在任意时刻的位移, 也决定振动物体在该时刻的速度. 因此, 位相是决定简谐振动物体运动状态的物理量.

常数  $\varphi$  是当  $t = 0$  时的位相, 称为初位相, 简称初相.

##### (2) 初相

##### (3) 初相位 $\varphi$ 的确定

##### ① 根据初始条件确定

当  $t = 0$  时,  $x = x_0$ ,  $v = v_0$ . 由  $x, u$  的表达式可知  $x_0 = A \cos \varphi$ ,  $v_0 = -\omega A \sin \varphi$ , 则初相位满足

$$\tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

##### ② 初相位 $\varphi$ 的象限确定

如图 9-2 所示,  $O$  点是振子的平衡位置,  $a, b$  两点是正、负最大位移处.

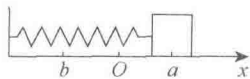


图 9-2

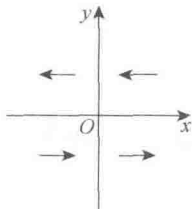


图 9-3

当  $x_0 > 0, v_0 < 0$ , 即振子的初始状态落在  $a \rightarrow O$  过程中时, 初相位  $\varphi$  取第一象限角,  $\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$ .

当  $x_0 < 0, v_0 < 0$ , 即振子的初始状态落在  $O \rightarrow b$  过程时, 初相位  $\varphi$  取第二象限角,  $\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) + \pi$ .

当  $x_0 < 0, v_0 > 0$ , 即振子的初始状态落在  $b \rightarrow O$  过程中时, 初相位  $\varphi$  取第三象限角,  $\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) - \pi$ .

当  $x_0 > 0, v_0 > 0$ , 即振子的初始状态落在  $O \rightarrow a$  的过程中时, 初相位  $\varphi$  取第四象限角,  $\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$ .

##### ③ 四个初相位 $\varphi$ 的特殊值

当  $x_0 = A, v_0 = 0$ , 初始状态落在正的最大位移处  $a$  点, 初相位  $\varphi = 0$ .

当  $x_0 = 0, v_0 < 0$ , 初始状态过  $O$  点且向  $x$  轴负方向运动, 初相位  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

当  $x_0 = -A, v_0 = 0$ , 初始状态落在负的最大位移处  $b$  点, 初相位  $\varphi = \pi$ .

当  $x_0 = 0, v_0 > 0$ , 初始状态过  $O$  点且向  $x$  轴正方向运动, 初相位  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ .



**温馨提示** 初相位  $\varphi$  的取值区间一般为  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ , 也可以选取为  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , 两种选取方法都是正确的, 具体使用哪种, 要根题意来确定。

**例 2** 有一轻弹簧, 上端固定, 下端悬挂一质量为  $1\text{g}$  的物体时伸长  $4.9\text{cm}$ , 用这根弹簧和一质量  $m = 8\text{g}$  的物体组成一铅直方程振动的弹簧振子, 将物体由平衡位置向下拉开  $1\text{cm}$  后, 给予一向上的初速度  $5\text{m/s}$ .

(1) 证明物体的振动是简谐振动.

(2) 求出简谐振动的方程.

解 (1) 弹簧的弹性系数  $k = \frac{F}{x} = \frac{1 \times 9.8 \times 10^{-3}}{4.9 \times 10^{-2}} = 0.2 (\text{N/m})$

如图 9-4 所示, 当挂  $8\text{g}$  物体时, 达到平衡时弹簧的伸长量设为  $b$ , 则有

$$mg = kb \quad (1)$$

以平衡位置  $O$  为原点, 取坐标  $x$  轴向下为正, 则物体在任意位置  $x$  的弹性力  $F_{\text{弹}} = k(k+b)$ , 它与物体重力  $mg$  的合力  $F$  为

$$F = mg - F_{\text{弹}} = mg - k(x+b) \quad (2)$$

式(1)代入式(2)得  $F = -kx$

即物体所受合力与位移  $x$  成正比, 而方向相反, 这就证明了物体的振动是简谐振动.

(2) 设物体作简谐振动的振动方程为  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$

圆频率  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{0.02}{0.008}} = 5 (\text{rad/s})$

由初始条件  $t = 0, x_0 = 1.0\text{cm}, v_0 = -5.0\text{cm/s}$  可振幅

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{-5}{5}\right)^2} = 1.41 (\text{cm})$$

由  $\cos\varphi = \frac{x_0}{A} = \frac{1.0}{1.41}$  可得初相  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  或  $\frac{7}{4}\pi$ , 因为  $\sin\varphi = \frac{-v_0}{\omega A} > 0$ , 故  $\varphi = \pi/4$ .

所以, 物体的振动方程为

$$x = 1.41 \cos\left(5 + \frac{\pi}{4}\right) (\text{cm})$$

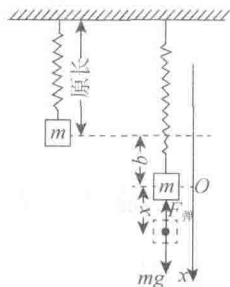


图 9-4

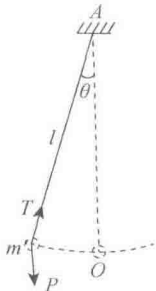


图 9-5

**例 3** 如图 9-5 所示, 细线的一端固定在  $A$  点, 另一端悬挂一体积很小、质量为  $m$  的重物, 细线的质量和伸长可忽略不计. 细线处于铅直位置时, 重物在位置  $O$ . 此时, 作用在重物上的合外力为零. 位置  $O$  即为平衡位置. 若把重物从平衡位置略为移开, 然后放手, 任其运动, 那么重物就在平衡位置附近来回反复运动. 这种振动系统为单摆. 试证明当  $\theta$  很小时 ( $\theta < 5^\circ$ ), 单摆的运动是简谐振动, 求其周期.

**解** 设单摆在运动过程中的某一时刻, 离开平衡位置的角位移为  $\theta$ , 如图 9-5 所

示,并规定摆锤在平衡位置的右方时, $\theta$ 为正;在左方时, $\theta$ 为负.由于作用在摆锤上的重力 $P$ 对悬挂点 $A$ 的力矩为 $mglsin\theta$ ,拉力 $T$ 对该点的力矩为零,且当角位移 $\theta$ 很小时(小于 $5^\circ$ ),角的正弦函数值可以用该角的弦度值代替,所以摆锤所受的力矩为

$$M = -mgl\theta$$

式中, $l$ 为摆线的长度,负号表示力矩的方向与角位移方向相反.根据转动定律 $M = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$ .

在力矩 $M$ 作用下,单摆获得的角加速度为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgl}{J} \theta$$

式中, $J$ 是摆锤对悬挂点 $A$ 的转动惯量, $J = ml^2$ .因此,上式可写成

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta \quad (9-4)$$

式中,摆长 $l$ 和重力加速度 $g$ 都是常量,而且都是正值.上式表明,单摆的角加速度与角位移成正比而方向相反.可见单摆的运动具有简谐振动的特征,它的运动也是简谐振动.把上式与式(5-5)比较,可得单摆振动的圆频率和周期分别为

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (9-5)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (9-6)$$

### 三、旋转矢量

如图9-6所示.自 $Ox$ 轴的原点作一矢量 $\mathbf{A}$ ,使它的模等于给定物体作简谐振动的振幅 $A$ ,在 $t=0$ 时,它与 $Ox$ 轴的夹角等于简谐振动的初相 $\varphi$ ,使矢量 $\mathbf{A}$ 与简谐振动的圆频率 $\omega$ 大小相同的角速度作逆时针旋转.这个矢量 $\mathbf{A}$ 就称为旋转矢量.在任意时刻 $t$ ,矢量 $\mathbf{A}$ 与 $Ox$ 轴的夹角等于该时刻简谐振动的位相 $\omega t + \varphi$ .矢量 $\mathbf{A}$ 在 $Ox$ 轴上投影为 $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ ,等于简谐振动物体的位移.显然,旋转矢量 $\mathbf{A}$ 以确定的角速度 $\omega$ 旋转一周,相当于简谐振动物体作一次完全振动.

**例4** 如图9-6所示,两质点作同方向、同频率的简谐振动,它们的振幅要相等.当一质点在 $x = A/2$ 处向左运动时,另一质点在 $x = -A/2$ 处向右运动,试用旋转矢量法求两质点的位相差.

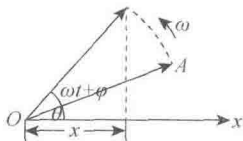


图 9-6

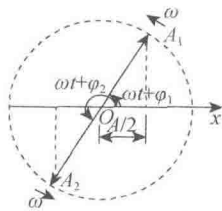


图 9-7

**解** 设两质点的振动方程分别为

$$x_1 = A \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A \cos(\omega t + \varphi_2)$$

作旋转矢量 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ , 它们的模都等于 $A$ , 它们与 $Ox$ 轴的夹角分别为 $\omega t + \varphi_1$ 和 $\omega t + \varphi_2$ , 如图9-6所示, 则 $\mathbf{A}_1$ 和 $\mathbf{A}_2$ 的矢端在 $x$ 轴上的投影的运动就表示两质点的简谐振动.

由图可以看出,一质点的位相为

$$\omega t + \varphi_1 = \arccos\left(\frac{A}{2}\right)/A = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

另一质点的位相为

$$\omega t + \varphi_2 = \arccos \frac{\left(-\frac{A}{2}\right)}{A} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\pi$$

两质点振动的位相差为

$$\Delta\varphi(\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \frac{4}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi = \pi$$

也就是说,后一振动比前一振动的位相超前  $\pi$ ,或者说前一振动比后振返回的位相落后  $\pi$ . 通常把两振动的位要差为  $\pi$  的情况,称为位相相反,或简称“反相”;而把位相差这零的情况,称这位相相同,或简称“同相”.



**温馨提示** 旋转矢量法是用来研究简谐振动的一种方法,这种方法比较直观,可以避免一些烦琐的计算. 在分析简谐振动及其合成时,常常会用到. 但是必须指时,我们所研究的旋转矢量本身并不是作简谐振动,而是旋转矢量矢端的投影点作简谐振动. 地应用时必须注意,不能混淆.

小结:简谐振动的旋转矢量表示法

名称	内容	说明
旋转矢量表示量	<p>旋转矢量 <math>A</math> 绕 <math>x</math> 轴的坐标原点 <math>O</math>, 以数值上与角频率 <math>\omega</math> 相等的角速度, 作逆时针的匀角速度旋转. 矢量 <math>A</math> 的端点 <math>M</math> 在 <math>x</math> 轴上的投影点 <math>P</math> 作简谐运动</p> $x = A\cos(\omega t + \varphi)$	<p>(1) 旋转矢量表示法的优点在于能够直观地表达简谐振动的规律和简谐振动的三个特征量.</p> <p>(2) 对同一简谐运动, 可以很方便地求出两运动状态间变化所需的时间.</p> $\Delta\varphi = \omega\Delta t$ <p>(3) 注意: 旋转矢量是为直观形象地描述简谐运动而采用的一种手段, 并不是振动质点在作圆周运动</p>

### 单摆和复摆

1. 单摆: 一个可以当作质点的小球系于不可伸长、质量可以忽略不计的细绳的下端, 绳的上端固定, 这样的系统叫做单摆.

振动方程: 
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

角频率  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , 周期  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ .

2. 复摆: 一个可绕固定水平轴自由转动的刚体叫做复摆, 也称物理摆.

振动方程: 
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgJ}{J}\theta$$

$$\text{角频率 } \omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}, \text{ 周期 } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}.$$

小结:

名称	内容
单摆	<p>一个可以看成质点的小球系于长为 <math>l</math>, 不可伸长、质量可以忽略不计的细绳下端, 绳的上端固定, 这样的系统称为单摆. 设 <math>\theta</math> 为摆线偏离铅垂线的角位移, 若 <math>\theta &lt; 5^\circ</math>, 单摆可看作简谐运动运动方程为</p> $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$ <p>角频率 <math>\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}</math>, 周期 <math>T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}</math>.</p>
复摆	<p>一个可绕固定水平轴自由转动的刚体称为复摆. 设物体质心距水平轴点的长度为 <math>L</math>, 对轴点的转动惯量为 <math>J</math>. 若 <math>\theta &lt; 5^\circ</math>, 复摆可看作简谐运动, 运动方程为</p> $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgl}{J}\theta$ <p>角频率 <math>\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}</math>, 周期 <math>T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}</math>.</p>

#### 四、简谐振动的能量

简谐振动系统在任意时刻的动能和势能分别为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\text{系统总能量 } E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

**温馨提示** 上式表示, 对于给定的弹簧振子, 简谐振动的总能量与振幅的平方成正比, 与圆频率的平方成正比. 由于在简谐振动过程中, 系统不受外力的作用, 而作用的内力只有弹性力而没有非保守力, 所以在振动过程中, 动能、势能虽在不断地相互转换, 而总能量为一常量.

图 9-8 表示初相  $\varphi = 0$  时, 动能和势能随时间变化的曲线, 称为简谐振动能量曲线. 图中实线表示动能, 虚线表示势能, 动能最小时, 势能最大; 动能最大时, 势能最小, 总能量始终保持不变.

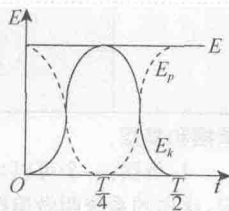


图 9-8

**例 5** 一单摆的悬线长  $l = 1.5 \text{ m}$ , 在顶端固定点的竖直下方  $0.45 \text{ m}$  处有一小钉, 如图 9-9 所示. 设摆动很小, 则单摆的两方周期之比  $T_1/T_2$  的近似值为 \_\_\_\_\_; 左右两方(线度)振幅之比  $A_1/A_2$  的近似值为 \_\_\_\_\_.

**解** 答案为  $T_1/T_2 = 0.84$ ;  $A_1/A_2 = 0.84$ .

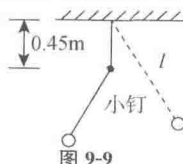


图 9-9

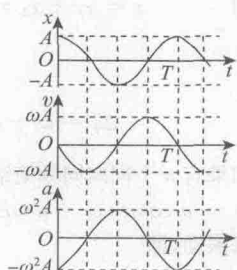
根据单摆的圆频率  $\omega^2 = \frac{g}{l}$ , 则  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ,  $T_1/T_2 = \sqrt{l_{\text{左}}/l_{\text{右}}} = 0.84$

$\omega \frac{2\pi}{T}, E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$ , 再根据能量守恒  $E_{\text{左}} = E_{\text{右}}, \frac{1}{2}m\omega_1^2 A_1^2 = \frac{1}{2}m\omega_2^2 A_2^2, A_1/A_2 = T_1/T_2 = 0.84$



**思路总结** 本题中小球的运动可以利用单摆的结果, 但是描述小球的位移可以用线量, 亦可以用角量, 而本题要求用线量求解.

小结:

名称	内容	说明
简谐运动的定义	<p>(1) 质点在弹性力或准弹性力作用下的运称为简谐运动.</p> $F = -kx$ <p>式中 <math>F</math> 是振动系统所受的合外力, <math>x</math> 是相对平衡位置的位移, <math>k</math> 为常数 (对弹簧振子而言, 就是弹簧的劲度系数), 负号表明力的方向始终指向平衡位置.</p> <p>(2) 描述物体运动的微分方程满足</p> $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ <p>物体的运动为简谐运动. 式中 <math>\omega</math> 是由系统动力学性质决定的常量, 称为振动系统的固有角频率.</p> <p>(3) 物体偏离平衡位置的位移随时间按余弦 (或正弦) 函数规律变化的运动为简谐运动.</p> $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ <p>上式称为简谐运动的运动方程</p>	<p>三种定义是等效的.</p> <p>要判定物体是否做简谐运动, 三种定义具备其一即可</p>
简谐运动的速度、加速度	<p>简谐运动的速度为</p> $v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$ <p>简谐运动的加速度为</p> $a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$ <p>简谐运动的速度、加速度都随时间作周期性变化</p>	 <p><math>x-t</math> 曲线称为振动曲线</p>

名称	内容	说明
简谐运动的特征量	<p>(1) 振幅 <math>A</math>: 振幅是物体相对平衡位置最大位移的绝对值, 表示物体在平衡位置附近振动的幅度.</p> <p>(2) 角频率 <math>\omega</math>、频率 <math>\nu</math>、周期 <math>T</math> 都是描述周期性运动的物理量, 它们三者的关系为</p> $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ <p>(3) 相位和初相位: 相位 <math>(\omega t + \varphi)</math> 是确定简谐运动瞬时运动状态的物理量. 初相位 <math>\varphi</math> 和 <math>t = 0</math> 时的相位</p>	<p>(1) 振幅、相位由初始条件即 <math>t = 0</math> 时的位置 <math>x_0</math> 和初速度 <math>v_0</math> 来确定, 即</p> $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$ $\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$ <p>(2) 角频率、频率和周期由振动系统的固有性质决定. 如弹簧振子, 其简谐运动的角频率为 <math>\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}</math></p>
简谐运动的能量	<p>动能: <math>E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)</math></p> <p>势能: <math>E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)</math></p> <p>系统的动能和势能都随时间 <math>t</math> 作周期性的变化. 当势能最大时, 动能为零; 势能为零时, 动能达到最大值. 系统的总能量:</p> $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$	简谐运动系统的总能量守恒, 即系统的动能和势能不断地相互转换, 总能量保持恒定

## 五、两个简谐振动的合成

(1) 同一直线上两个同频率振动, 合振动仍为简谐振动, 设

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

则  $x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi), A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

$$\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \begin{cases} 2k\pi & (k \text{ 为整数}), A = A_1 + A_2, \text{最大.} \\ (2k+1)\pi & (k \text{ 为整数}), A = |A_1 - A_2|, \text{最小.} \end{cases}$$

如果有  $n$  个同向同频简谐振动, 其振动方程分别为

$x_1 = a \cos \omega t, x_2 = a \cos(\omega t + \delta), x_3 = a \cos(\omega t + 2\delta), \dots, x_n = a \cos[\omega t + (n-1)\delta].$  合振动仍为简谐振动, 即

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n = A \cos(\omega t + \varphi),$$

$$A = a \frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)}, \varphi = \frac{(n-1)\varphi}{2}.$$

当  $\delta = 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  时, 合振动的振幅最大, 即  $A = na$ ; 当  $\delta = \frac{2k'\pi}{n}, k'$  为不等于  $nk$  的整数, 合振幅  $A = 0$ . 在矢量图 9-10 中, 各分振动的振幅矢量构成一个闭合的正多边形.

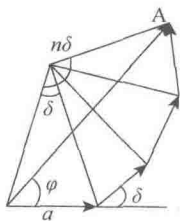


图 9-10

(2) 同一直线上两个不同频率的振动;合振动不再是简谐振动,当两个分振动频率都很大且频率差很小时,产生拍频等于两个分振动的频率差。

(3) 相互垂直的两个同频率振动:当一个质点同时参与不同方向的简谐振动时,质点位移是两个振动位移的矢量和,其轨迹一般为平面曲线,设两个振动分别在  $x$  轴和  $y$  轴上进行,位移方程为

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

消去时间参数  $t$ , 得到各振动的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

一般来讲,这是一个椭圆方程,具体形状取决于两个分振动的位相差和的振幅,例如,当  $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$  时,上述轨迹方程变为  $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$ , 质点的轨迹为正椭圆,且质点的运动方向为顺时针方向,通常称为右旋;当  $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{3\pi}{2}$  时,质点的轨迹仍为正椭圆,但质点的运动方向为逆时针方向,通常称为左旋。

(4) 相互垂直的两个不同频率的振动:如果两振动的频率只有很小差异,则可以近似地看成同频率的合成,不过相差在缓慢地变化,因此合成轨迹的形状将会出现周期性地反复变化;如果两振动的频率相差较大,但成简单整数比,则各振动具有稳定的封闭的运动轨迹,通常称为李萨如图形,李萨如图形有如下规律:  $\frac{f_x}{f_y} = \frac{n_y}{n_x}$ , 即加在两个垂直轴上的信号振动频率之比与圆形和两轴最大交点数成反比。

小结:简谐运动的合成

名称	内容
两个同方向、同频率的简谐运动的合成	<p>若 <math>x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)</math>, <math>x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)</math>, 则合振动仍是简谐运动, 其运动方程为</p> $x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$ <p>式中, <math>A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}</math>, <math>\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}</math>.</p> <p>合振幅 <math>A</math> 与两个振动的相位差 <math>\varphi_2 - \varphi_1</math> 有关, 即合振动加强、减弱的条件分别为</p> <p>当 <math>\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)</math> 时, <math>A = A_1 + A_2</math>, 合振动最强;</p> <p>当 <math>\varphi_2 - \varphi_1 = (2k + 1)\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)</math> 时, <math>A =  A_1 - A_2 </math>, 合振动最弱</p>
两个同方向、频率相近的简谐运动的合成	<p>当 <math>A_1 = A_2 = A</math>, 且初相位都为零时, 合振动的运动方程为</p> $x = x_1 + x_2 = \left( 2A \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t \right) \cos 2\pi \frac{\nu_2 + \nu_1}{2} t$ <p>产生合振动的振幅时而加强, 时而减弱的现象称为拍。单位时间内振幅大小变化的次数叫拍频:</p> $\nu =  \nu_2 - \nu_1 $
两个相互垂直的简谐运动的合成	<p>设 <math>x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)</math>, <math>y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)</math>, 则合运动轨迹方程为</p> $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$ <p>一般情况下是椭圆(特殊情况下是直线或圆), 椭圆的形状取决于两个分振动的振幅和相位差</p>



## 六、阻尼振动、受迫振动与共振

### (1) 阻尼振动

简谐振动是一组等幅振动,它就是不计阻力使用的理想情况,实际上,振动系统总要受到各种阻力的影响,振动系统要不断克服阻力做功,所以振动系统的能量将不断地减少,因而振动的振幅就要衰减,最终停止振动,系统在回复力和阻力作用下发生的减幅振动称为阻尼振动,阻尼分为摩擦阻尼(系统与外界的摩擦或系统内部的摩擦所引起的)和辐射阻尼(振动和外传播以波的形式向周围辐射能量所引的).为了方便讨论,把辐射阻尼作为摩擦阻尼来处理,这为振动系统受到一个较大的阻力,物体振动速度不太大的情况下,它所受到的阻力大小速率成正比,若以  $F$  表示阻力的大小,并考虑到阻力与速度方向相反,  $F$  可写成  $F = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt}$ ,  $\gamma$  为正的比例系数,其值决定于运动物体的形状、大小和周围介质的性质,质量为  $m$  的振动物体在准弹性力  $-kx$  和上述阻力作用下运动时,振动物体的运动方程式为  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}$ , 令  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $2\beta = \frac{\gamma}{m}$ , 则有

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

式中,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  是对应于无阻尼时系统振动的固有频率;  $\beta$  为阻尼系数.

1) 欠阻尼:当阻尼作用较小,即  $\beta < \omega_0$  时,上述微分方程的解为

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

式中,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ;  $A_0$  和  $\varphi_0$  是由初始条件决定的积分常数,上述结果说明欠阻尼情况下振动已不是周期振动,而是准周期运动.通常把相邻的两个振动位移极大值对应的时间间隔称为阻尼振动的周期  $T$ ,即

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > \frac{2\pi}{\omega_0}$$

2) 过阻尼:当阻尼作用过大,即  $\beta > \omega_0$  时,偏离平衡位置的物体只能逐渐回到平衡位置,不可能再振动起来,这种情形称为过阻尼,显然这完全是一种非周期性振动.

3) 临界阻尼:如果阻尼作用使得  $\beta = \omega_0$ ,则物体刚刚能作非周期运动,最后也回到平衡位置,这种情况称为临界阻尼,理论证明:在临界阻尼下,振子回到平衡位置而静止下来所需时间最短.

### (2) 受迫振动与共现象

实际振动都是阻尼振动,一切振动最后都要停下来,但也有振动幅并不衰减的等幅振动,当对振子施加持续性的周期性外力时,这种持续的周期性外力称为驱动力,在驱动力作用下发生的振动为受迫振动,当受迫振动达到稳定的状态时就是等幅振动,其频率与驱动力频率相同,设驱动力如下,其动力学方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F \cos \omega t$$

令  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $2\beta = \frac{\gamma}{m}$ , 则有

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

其解在阻尼较小时为  $x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0) + A \cos(\omega t + \varphi)$ . 第一项为暂态项,经过一

定时间后将消失;第二项为稳定项,表示受迫振动达到稳定状态时的等幅振动,受迫振动达到稳定状态时,其振动式为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

$A$ 、 $\varphi$ 并不是决定振动的初始条件,将上式代入前面的微分方程,计算整理后得出

$$A = \frac{F_0}{\omega \sqrt{\gamma^2 + \left(\omega m - \frac{k}{\omega}\right)^2}}, \tan \varphi = \frac{\gamma}{\omega m - \frac{k}{\omega}}$$

在稳态时,振动物体速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = v_{\max} \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_{\max} = \omega A = \frac{F_0}{\sqrt{\gamma^2 + \left(\omega m - \frac{k}{\omega}\right)^2}}.$$

显然驱动力方向与物体运动方向并不相同,有时同向有时反向,即驱动力有时做正功(同向时)有时做负功(反向时).当满足  $\omega m - \frac{k}{\omega} = 0$ , 即  $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  时,速度振幅  $u_{\max}$  有最大值  $\frac{F_0}{\gamma}$ , 此时  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ , 所以当驱动力频率等于振子固有频率时,驱动力与振子速度始终保持同向,驱动力在整个周期内对振子做正功,始终给振子提供能量,从而振子的速度能获得最大的幅值,这就是所谓的速度共振.

令  $\frac{dA}{d\omega} = 0$ , 则有  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ , 此时振幅  $A$  有最大值, 即  $A_{\max} = \frac{F_0}{2m\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ , 这种情况称为位移共振.

## 七、电磁振荡

名称	内容
LC 无阻尼自由振荡	<p>在电路中电荷和电流以及与之相伴随的电场和磁场随时间周期性变化的现象,叫电磁振荡.产生电磁振荡的电路叫振荡电路.</p> $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$ <p>解得振荡方程</p> $q = Q_0 \cos(\omega t + \varphi)$ $i = \frac{dq}{dt} = -\omega Q_0 \sin(\omega t + \varphi) = -I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ <p>电荷 <math>q</math> 和电流 <math>i</math> 都随时间作周期性变化,即产生电磁振荡</p> <p><math>\omega = 1/\sqrt{LC}</math> 为 LC 无阻尼自由振荡的角频率</p>
电磁振荡的能量	<p>电场能量: <math>E_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \cos^2(\omega t + \varphi)</math></p> <p>磁场能量: <math>E_m = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} LI_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \sin^2(\omega t + \varphi)</math></p> <p>在无阻尼自由电磁振荡过程中,电场能量和磁场能量不断相互转化,其总和保持不变.</p> $E = E_e + E_m = \frac{1}{2} LI_0^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$

## 本章总结

在简谐振动的有关问题中,常见的有下列几种情况.

## 1. 判定物体的运动是否为简谐振动

对于此类问题,可对物体分析受力,建立相应的坐标系,列出运动方程.然后看能否将运动方程化为标准形式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

如果可以化为标准形式,则该物体的运动为简谐振动;否则就不是简谐振动.除此之外,若质点受力具有弹性恢复力的形式  $F = -kx$ ;或运动学方程为  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ ,  $x = A \sin(\omega t + \varphi)$ ,  $x = A \sin(\omega t + \varphi)$ , 则为简谐振动.

2. 已知质点作简谐振动及  $t = 0$  时刻质点的位置和速度,求质点的简谐振动表达式

质点作简谐振动表达式的形式为  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ , 即只要求得  $A, \omega, \varphi$ , 就可求得其简谐振动表达式, 即运动学方程.  $A, \varphi$  均由初始条件求得:  $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$ ,  $\varphi = \arctan\left(\frac{-v_0}{\omega x_0}\right)$ .  $\varphi$  也可用旋转矢量量来确定, 特别是要注意判断  $\varphi$  在哪一象限, 用旋转矢量确定更为方便.

## 3. 简谐振动的合成

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{\left(\sum_i A_i \cos \varphi_i\right)^2 + \left(\sum_i A_i \sin \varphi_i\right)^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\sum_i A_i \sin \varphi_i}{\sum_i A_i \cos \varphi_i}$$

## 考研真题解析

- 1 图 9-11 为  $t = 0$  时刻, 以余弦函数表示的沿  $x$  轴正方向传播的平面谐波波形, 则  $O$  点处质点振动的初相为( ).

A.  $\pi/2$ ; B. 0; C.  $3\pi/2$  D.  $\pi$ .

(中国科学院西安光机所 2005 年攻读硕士学位研究生入学考试试题)

解 由图可看出,  $t = 0$  时刻,  $O$  点处质点经过平衡位置, 且向正方向运动, 由旋转矢量知, 其初相应为  $3\pi/2$ , 所以选 C.

- 2 一质点同时参与两个在同一直线上的简谐振动,  $x_1 = 4 \cos(2t + \frac{\pi}{6})$ ,

$x_2 = 3 \cos(2t - \frac{5\pi}{6})$ . 试求其合振动的振幅( $x$  以 cm 计).

(同济大学 2000 年攻读硕士学位研究生入学考试的试题)

解 本题为两个同方向、同频率谐振动的合成, 又两个振动的相位差为  $\pi$ , 其振动相位相反, 则合振幅

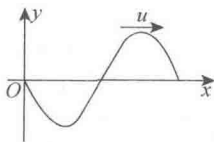


图 9-11

$$A = A_1 - A_2 = 4 - 3 = 1$$

3 一质点作谐振动,其振动的方程为  $x = 6.0 \times 10^{-2} \cos(\frac{1}{3}\pi t - \frac{\pi}{4})$  (SI)

(1) 当  $x$  值为多大时,系统的势能为总能量的一半?

(2) 质点从平衡位置移动到上述位置所需的最短时间为多少?

(华南理工大学 2005 年攻读硕士学位研究生入学考试试题)

解题分析 由于势能  $E_P = \frac{1}{2}kx^2$ , 而能量  $E = \frac{1}{2}kA^2$ , 由此即可方便求解.

解 (1) 当系统的势能为总能量的一半, 即  $E_P = \frac{1}{2}E, x^2 = \frac{1}{2}A^2$

$$\text{所以 } x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}A = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \times 6 \times 10^{-2} = \pm 3\sqrt{2} \times 10^{-2} \text{ m}$$

(2) 利用旋转矢量容易得出, 质点从平衡位置移动到  $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}A$  处需要的最短时间为  $\frac{T}{8}$ .

$$\omega = \frac{\pi}{3}, T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6 \text{ s}, \text{ 则 } \Delta t = \frac{T}{8} = \frac{6}{8} = 0.75 \text{ s}.$$

4 (北京联合命题) 将质量为  $0.2 \text{ kg}$  的物体, 系于劲度系数  $k = 19 \text{ N/m}$  的竖直悬挂的弹簧下端, 假定在轻质弹簧不变形的位置将物体由静止释放, 然后物体作简谐振动, 则振动频率为 \_\_\_\_\_, 振幅为 \_\_\_\_\_.


解 答案分别为  $\nu = 1.55 \text{ Hz}$ ;  $A = 0.103 \text{ m}$ .

已知质量  $m = 0.2 \text{ kg}$ , 劲度系数  $k = 19 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , 根据振动圆频率  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , 振动的频率

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 1.55 \text{ Hz}$$

物体的初始位置距离平衡位置为  $x_0$ , 则满足  $kx_0 = mg$ . 取轻质弹簧不变形的位置为弹性势能零点, 运动到最低位置为重力势能零点, 根据机械能守恒定律  $\frac{1}{2}k(x_0 + A)^2 = mg(x_0 + A)$ , 解得振动的振幅为

$$A = \frac{mg}{k} = 0.103 \text{ m}$$

 **思路总结** 本题考查了描述振动物理量之间的关系和谐振动总能量守恒两个方面的内容. 本题还有一个考查点, 就是关于势能零点的选取. 如果弹性势能的零点选取在弹簧自由伸长时物体所在的位置, 则弹性势能才能写成  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$  的形式, 其中  $x$  是弹簧的绝对伸长, 这是考生很容易出错的地方.

5 (中国电子科技大学) 一质点沿  $x$  轴作简谐振动, 振动方程为  $x = 0.04 \cos(2\pi t + \frac{\pi}{3})$  (SI), 则从  $t = 0$  时刻起, 到质点位置在  $x = -2 \text{ cm}$  处, 且向  $x$  轴正方向运动时刻的最短时间间隔为 ( ).

A.  $\frac{1}{8} \text{ s}$

B.  $\frac{1}{4} \text{ s}$

C.  $\frac{1}{2} \text{ s}$

D.  $\frac{1}{3} \text{ s}$

解 答案为 C.

根据振动方程  $x = 0.04 \cos(2\pi + \frac{\pi}{3})$ ,  $t = 0$  时, 初相位  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ , 位置坐标  $x_0 = 0.02 \text{ m}$ , 速度  $v_0 < 0$ , 向平衡位置运动. 当质点位置在  $x = -2 \text{ cm}$  处, 且向  $x$  轴正方向运动时, 质点的相位为第三象限角.  $-0.02 = 0.04 \cos(2\pi + \frac{\pi}{3})$ ,  $\cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ ,  $2\pi t + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ , 则  $t = \frac{1}{2} \text{ s}$ .

**思路总结** 本题也可以根据题意判断出, 从  $t = 0$  时刻起, 到质点位置在  $x = -2 \text{ cm}$  处, 且向  $x$  轴正方向运动时刻的最短时间间隔为半个周期.

- 6 (哈尔滨工业大学) 两个物体作同方向、同频率、同振幅的简谐振动. 在振动过程中, 每当第一个物体经过位移为  $A/\sqrt{2}$  的位置向平衡位置运动时, 第二个物体经过此位置, 但向远离平衡位置的方向运动. 试利用旋转矢量法求它们的相位差.

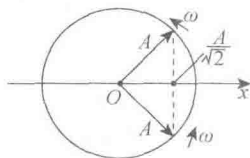


图 9-21

解 依题意画出旋转矢量图如图 9-12 所示.

由图可知, 第一个旋转矢量  $A$  的相位为  $\pi/4$ , 第二个旋转矢量  $A$  的相位为  $-\pi/4$ , 两谐振动的相位差为  $\pi/2$ .

**思路总结** 利用旋转矢量解决相位和振动合成的问题, 是非常直观、简洁也是非常方便的.

- 7 (江苏大学) 如图 9-13 所示的是两个简谐振动的振动曲线, 它们合成的余弦振动的初相为 \_\_\_\_\_.

解 答案为  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  或  $\frac{3\pi}{2}$ .

由图 9-22 可知, 这是两个同方向、同频率的谐振动反相合成, 则合振动的初相位与振幅大的分振动  $x_1$  的初相位相同. 而分振动  $x_1$  在  $t = 0$  时刻, 位于平衡位置且向  $x$  轴正向运动, 则初相位为  $-\frac{\pi}{2}$ , 所以其合

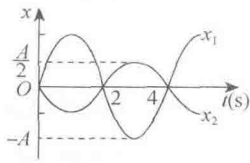


图 9-13

振动的初相位  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  或  $\frac{3\pi}{2}$ .

**思路总结** 两个同方向、同频率的谐振动同相合成时, 合振动的振幅最大, 为两个分振动振幅的和, 合振动的初相位与分振动的初相位相同. 两个同方向、同频率的谐振动反相合成时, 合振动的振幅最小, 为两个分振动振幅之差的绝对值, 合振动的初相位与振幅大的那个分振动的初相位相同.

- 8 (华侨大学) 一个轻弹簧在  $60 \text{ N}$  的拉力下可伸长  $30 \text{ cm}$ , 现将一物体悬挂在弹簧的下端并在它上面放一小物体, 它们的总质量为  $4 \text{ kg}$ . 待其静止后, 再把物体向下拉  $10 \text{ cm}$ , 然后释放. 问: (1) 此小物体是停在振动物体上面还是离开它? (2) 如果使放在振动物体上的小物体与振动物体分离, 则振幅  $A$  需满足何条件? 二者在何位置开始分离?

解 (1) 设小物体随振动物体加速度为  $a$ , 按牛顿第二定律有(取向下为正)

$$mg - N = ma \quad N = m(g - a)$$

当  $N = 0$ , 即  $a = g$  时, 小物体开始离振动物体.

已知  $A = 10 \text{ cm}$ ,  $k = 60/0.3 = 200 \text{ N/m}$ , 有  $\omega = \sqrt{k/m} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , 系统最大加速度为  $a_{\text{max}}$   
 = 已知  $A = 10 \text{ cm}$ ,  $k = 60/0.3 = 200 \text{ N/m}$ , 有  $\omega = \sqrt{k/m} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , 系统最大加速度为  
 $a_{\text{max}} = \omega^2 A = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , 此值小于  $g$ , 故小物体不会离开.

(2) 如使  $a > g$ , 小物体能脱离振动物体, 开始分离的位置由  $N = 0$  求得

$$g = a = -\omega^2 x \quad x = -g/\omega^2 = -19.6 \text{ cm}$$

即在平衡位置上方  $19.6 \text{ cm}$  处开始分离. 由  $a_{\text{max}} = \omega^2 A > g$ , 可得

$$A > g/\omega^2 = 19.6 \text{ cm}$$



**思路总结** 小物体要脱离振动物体, 必须满足振动物体加速度的大小小于  $g$ 、方向向下的条件, 这是本题解题的关键点.

## 课后习题

9-1 **解题过程** 由于质点 A 在作简谐运动, 并且位移为  $-\frac{A}{2}$ , 正在  $x$  轴移动, 以后的振动位移会变正值, 能准确描述该过程的为 B 图, 本题选 B.

9-2 **解题过程** 由题意可知, 振动曲线为  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ , 其中  $A = 2$ ,  $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ ,  $W = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{1} = \frac{4}{3}\pi$ , 代入上式中可得:  $x = 2 \cos(\frac{4}{3}\pi t + \frac{2}{3}\pi)$ . 本题选 D.

9-3 **解题过程** 由相位图可以看出  $x_1$  比  $x_2$  超前  $\frac{\pi}{2}$ , 本题选 B.

9-4 **知识点拨** 旋转矢量图 简谐振动

**逻辑推理** 质点作匀速圆周运动, 在  $x$  轴方向的投影为简谐运动.

**解题过程**  $\Delta t = \frac{\Delta \varphi}{2\pi} T = T/6$

9-5 **解题过程** 根据题意:  $\frac{\Delta E_k}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\Delta t}$

当质点以速度  $v$  作简谐运动时,  $v = \omega r = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$ , 代入即可知动能的频率为简谐运动频率的 2 倍, 本题选 (C).

9-6 **解题过程** 由振动的叠加作用以及旋转矢量法可以求得合成的余弦表达式为  $x = \frac{A}{2} \cos \omega t$ , 初相位为  $\pi$ , 本题选 D.

9-7 **逻辑推理** 由于弹簧振子的振动是简谐振动, 其运动方程为:  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ . 由公式  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  求出振子的角频率. 将  $A, \varphi, \omega$  代入上式, 即得运动方程.  
 要画出  $v-t$  图及  $a-t$  图, 应先对  $x = x(t)$  求一、二阶导数.  
 求出  $v = v(t)$  及  $a = a(t)$  的表达式, 由此可画出相应的图形.

**解题** 振子的角频率为:  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\text{s}^{-1}$

振子的运动方程为:  $x = A\cos(\omega t + \varphi) = (2.0 \times 10^{-2})\cos[2\pi t + 0.75\pi]$

振子的速度为:  $v = \frac{dx}{dt} = -(4\pi \times 10^{-2})\sin[2\pi t + 0.75\pi]$

振子的加速度为:  $a = \frac{d^2x}{dt^2} = -(8\pi^2 \times 10^{-2})\cos[2\pi t + 0.75\pi]$

相应的  $x-t$  图、 $v-t$  图、 $a-t$  图如解 9-6 图所示。

**9-8 知识** 简谐运动方程:  $x = A\cos(\omega t + \varphi)$  速度公式:  $v = \frac{dx}{dt}$  加速度公式:  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

**逻辑** 本题可采用比较法,将已知的简谐运动方程与简谐运动方程的一般式进行比较,即可求出  $A$ 、 $\omega$  及  $\varphi$ ,再由各量之间的关系求出其他物理量。

对于  $t = 2\text{s}$  时的位移、速度、加速度,可先写出一般式,再代入时间进行计算。

**解题** (1) 由于已知运动方程为:  $x = (0.10\text{m})\cos[(20\pi\text{s}^{-1}t + 0.25\pi)]$

对比一般式可知:振幅  $A = 0.1\text{m}$ ,角频率  $\omega = 20\pi\text{s}^{-1}$ ,初相  $\varphi = 0.25\pi$

周期  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.1\text{s}$ ,频率  $\gamma = \frac{1}{T} = 10\text{Hz}$ 。

(2)  $t = 2\text{s}$  时的位移、速度、加速度分别为

$$x = 0.10\cos(40\pi^2 + 0.25\pi) = 7.07 \times 10^{-2}\text{m}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -2\pi\sin(40\pi + 0.25\pi) = -4.44\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -40\pi^2\cos(40\pi + 0.25\pi) = -2.79 \times 10^2\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

**9-9 知识** 简谐运动条件:  $F_{\text{合}} = -kx$  浮力公式:  $F = \rho g V$  牛顿第二定律:  $F = ma$

$$\text{周期公式: } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

**逻辑** 本题的关键是证明货轮在平衡位置附近上下运动时,它所受的合外力  $F$  与位移  $x$  满足关系式:  $F = -kx$ 。货轮在竖直方向受到重力和浮力的作用,由牛顿第二定律可列出动力学方程  $F = ma$ ,写成微分方程即可求出振动的周期。

**解题** 货轮平衡时,重力等于浮力(如图(a)所示),取此时货轮与水平面的交点为  $O$  点,建立  $Ox$  轴,所以有

$$mg = F_{\text{浮}} = \rho g V$$

当货轮竖直方向有位移  $x$  时(如图(b)所示),货轮受合力为

$$F = mg - (V + xS)\rho g = -S\rho g x = -kx$$

式中  $k = S\rho g$  是常数,所以货轮在平衡位置附近上下所作的微小振动是简谐运动。

由牛顿第二定律有  $m \frac{d^2x}{dt^2} = -S\rho g x$

所以振动的周期为  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{S\rho g}}$

**9-10 知识** 万有引力公式:  $F = -G \frac{m_1 m_2}{x^2}$

简谐振动周期:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

**逻辑推理** 质点在隧道中仅受万有引力作用,其受力平衡点在地球中心的  $O$  点. 当质点有位移  $x$  时,其受到的引力可由万有引力定律得到,需要注意的是质点在地球内部受到的引力仅由其内部质量决定,即万有引力作用的质量为:  $m_x = \rho v_x = \rho \frac{4}{3}\pi x^3$ .

**解题过程** (1) 建立  $Ox$  坐标如图 9-13 所示. 当质量为  $m$  的质点在  $x$  点时,它仅受万有引力作用,即

$$F = -G \frac{m_x m}{x^2} \quad (1)$$

令  $k = \frac{4}{3}\pi\rho Gm$ ,  $G$  是常数.

而  $m_x = \frac{4}{3}\pi x^3 \rho$  (2)

由 (2) 式代入 (1) 式得  $F = -G \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi x^3 m}{x^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho mG \cdot x = -kx$

所以质点的运动为简谐运动.

$$(2) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{4}{3}\pi\rho mG}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = 5.07 \times 10^3 \text{ s}$$

9-11 **知识要点** 简谐振动的条件:  $F = -kx$       简谐振动的角频率:  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

简谐振动的频率:  $\gamma = \frac{\omega}{2\pi}$

**逻辑推理** 在沿斜面方向上,物体受到弹性力和重力分力的作用,其中弹性力是变力,串联时,各弹簧受力相等,分析物体在平衡位置附近有位移  $x$  时,其所受合力  $F$  与位移  $x$  的关系即可判断物体运动的性质.

**解题过程** (1) 设系统平衡时物体所在位置为坐标原点  $O$ ,  $Ox$  轴沿斜面向下. 物体平衡时,而弹簧伸长分别为  $x_1$  和  $x_2$ ,由平衡条件得

$$\begin{cases} mg \sin\theta = k_2 x_2 \\ k_1 x_1 = k_2 x_2 \end{cases}$$

所以  $mg \sin\theta = k_1 x_1 = k_2 x_2$  (1)

当物体沿  $x$  轴移动位移  $x$  时,弹簧又分别被拉长  $x'_1$  和  $x'_2$ ,即

$$x = x'_1 + x'_2$$

则物体所受力的合外力为

$$F = mg \sin\theta - k_2(x_2 + x'_2) = mg \sin\theta - k_1(x_1 + x'_1) \quad (2)$$

将 (1) 式代入 (2) 式得  $F = -k_2 x'_2 = -k_1 x'_1$  (3)

由 (3) 式得:  $x'_1 = \frac{F}{k_1}$ ,  $x'_2 = -\frac{F}{k_2}$ , 而  $x = x'_1 + x'_2$ , 所以有



$$F = -\frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} \cdot x = -kx$$

式中  $k = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$  是常数, 所以物体的运动是简谐振动.

角频率为 
$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

(2) 振动频率为: 
$$\gamma = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 \cdot k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

### 9-12 解法一

**知识** 牛顿第二定律:  $F = ma$ ; 转动定律:  $M = J\alpha$

**逻辑** 将 A、B、C 隔离受力分析, 先求平衡时弹簧的伸长量, 再由弹簧偏离平衡时各物体的运动态, 最后联合求解.

**解题** 以 A、B、C 为研究对象, 对其进行受力分析, 如图解 9-12 所示. 设物体处于平衡状态时, 与物体 A 相连的弹簧一端所在的位置为坐标原点 O, 水平向右为 x 轴正向, 此时弹簧伸长

$$x_0 = \frac{mg}{k}$$

当弹簧沿 Ox 正向从原位置伸长 x 时, 由于细绳不可伸长

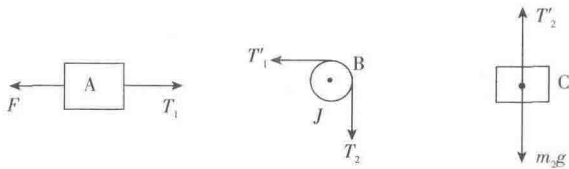
对 A: 
$$\begin{cases} T_1 - F = m_1 a & \text{①} \\ F = k(x_0 + x) & \text{②} \end{cases}$$

对 B: 
$$(T_2 - T_1')R = J\alpha = \frac{1}{2}mR^2\alpha = \frac{1}{2}mR^2 \cdot \frac{a}{R} = \frac{1}{2}mRa \quad \text{③}$$

对 C: 
$$m_2 g - T_2' = m_2 a \quad \text{④}$$

并且有 
$$T_1' = T_1, T_2' = T_2 \quad \text{⑤}$$

由 ① ~ ⑤ 式得 
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} x = 0$$



图解 9-12

这是简谐运动的动力学方法.

对应的振动角频率为 
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{(m_1 + m_2 + \frac{m}{2})}}$$

### 解法二

**知识** 机械能守恒定律:  $E_0 = \sum E = \text{常数}$

**逻辑** 对于振动装置与地球构成的系统而言, 没有外力和非保守内力做功, 系统机械能守

恒,故可适当选择初态和末态,列出机械能守恒方程,然后求得系统作简谐运动的微分方程,即可求得系统振动的角频率。

**解题过程** 选取系统平地为初态,此时弹簧伸长  $x_0$ ,物体向右偏移距离  $x$  时为末态,由机械能守恒定律有

$$E_0 = -m_2 gx + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} k(x+x_0)^2$$

将上式两边对时间  $t$  求导得

$$0 = -m_2 g v + m_1 v \frac{dv}{dt} + m_2 v \frac{dv}{dt} + J \omega \frac{d\omega}{dt} + k(x+x_0) \frac{dx}{dt}$$

将  $J = \frac{1}{2} m R^2$ ,  $v = \omega R$ ,  $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$  及  $m_2 g = k x_0$  代入上式得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} \cdot x = 0$$

所以系统振动的角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}}$$

**9-13 知识点窍** 能量守恒定律. 弹簧弹性势能  $E_p = \frac{1}{2} k x^2$ .

**逻辑推理** 整个系统机械能守恒,并且由于圆柱体作的是无滑动的滚动,故其平动动能与转动动能有着内在的联系:

$$v = \omega R, E_K = \frac{1}{2} m v^2, E'_K = \frac{1}{2} J \omega^2$$

圆柱体在运动中,水平方向受到两个力的作用,利用牛顿运动定律列写方程不难证明系统作简谐运动。

**解题过程** (1) 在平衡位置时弹簧的弹性势能完全转化为圆柱体的平动动能与转动动能,故有:

$$E_K + E'_K = \frac{1}{2} k x_0^2 = 0.06 \text{ J}$$

$$\text{又} \quad E'_K = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{4} m v^2 = \frac{1}{2} E_K$$

$$\text{故} \quad E_K = 0.04 \text{ J} \quad E'_K = 0.02 \text{ J}$$

(2) 假设质心加速度为  $a$ ,角加速度为  $B$ ,滚动摩擦力为  $F_f$ ,

$$\begin{cases} F_f R = J B = \frac{1}{2} m R^2 B \\ a = R B \\ F - F_f = m a \end{cases}$$

$$\text{解得} \quad F = \frac{3}{2} m a$$

$$\text{并且得到} -kx = \frac{3}{2} m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2k}{3m} x = 0$$

$$\text{即系统作简谐振动,且} \omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

$$\text{所以 } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{3m}{2k}}$$

9-14 知识 角频率与周期的关系:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  简谐运动方程:  $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$\text{速度定义式: } v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

逻辑推理 由周期  $T$  可求出角频率  $\omega (= \frac{2\pi}{T})$ . 因此要求运动方程, 关键是确定初相  $\varphi$ . 确定初相  $\varphi$  可用解析法, 即根据振动方程的一般式及初始条件来确定  $\varphi$ .

解题过程  $A = 2.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi \text{ s}^{-1}$ , 所以运动方程为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = 2.0 \times 10^{-2} \times \cos[4\pi t + \varphi]$$

$$(1) t = 0 \text{ 时}, x_0 = A, \text{ 所以 } \varphi_1 = 0, x_1 = (2.0 \times 10^{-2})\cos 4\pi t (\text{m}).$$

$$(2) t = 0 \text{ 时}, x_0 = 0, v_0 = -v_m < 0, \text{ 所以 } \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, x_2 = 2.0 \times 10^{-2} \times \cos[4\pi t + \frac{\pi}{2}] (\text{m}).$$

$$(3) t = 0 \text{ 时}, x_0 = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}, v_0 < 0, \text{ 所以 } \varphi_3 = \frac{\pi}{3}, x_3 = 2.0 \times 10^{-2} \times \cos[4\pi t + \frac{\pi}{3}] (\text{m}).$$

$$(4) t = 0 \text{ 时}, x_0 = -1.0 \times 10^{-2} \text{ m}, v_0 > 0, \text{ 所以 } \varphi_4 = \frac{4}{3}\pi, x_4 = 2.0 \times 10^{-2} \times \cos[4\pi t + \frac{4}{3}\pi] (\text{m}).$$

本题也可用旋转矢量法求解, 此处略.

9-15 知识 简谐振动的角频率:  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  简谐振动的振幅:  $A = \sqrt{x^2 + (\frac{v}{\omega})^2}$

逻辑推理 由弹簧振子平衡时弹簧的伸长量  $\Delta l$  及二力平衡方程  $k \cdot \Delta l = mg$ , 可求出  $k = \frac{mg}{\Delta l}$ .

从而求出角频率  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}}$ , 再由确定的初始条件即可求出相应的运动方程.

解题过程 振子平衡时:  $k \cdot \Delta l = mg$

$$\text{因此得 } k = \frac{mg}{\Delta l}$$

$$\text{振子的角频率为 } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = 10 \text{ s}^{-1}$$

$$(1) t = 0 \text{ 时}, x_0 = -8.0 \times 10^{-2} \text{ m}, v_0 = 0, \text{ 所以有}$$

$$A_1 = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2} = 8.0 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{且 } \varphi_1 = \pi$$

$$\text{振子的运动方程为 } x_1 = 8.0 \times 10^{-2} \times \cos(10t + \pi) (\text{m})$$

(2)  $t' = 0$  时,  $x'_0 = 0, v'_0 = 0.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  所以有

$$A_2 = \sqrt{x'_0{}^2 + \left(\frac{v'_0}{\omega}\right)^2} = 6 \times 10^{-2} (\text{m})$$

且 
$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

振子的运动方程为  $x_2 = 6 \times 10^{-2} \times \cos(10t + \frac{\pi}{2}) (\text{m})$

**9-16 知识点** 简谐运动的一般式:  $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

**逻辑推理** 本题可采用旋转矢量法, 由已知的  $x-t$  图线画出特定时间点的旋转矢量, 从而确定  $A, \omega$  和  $\varphi$ .

**解题过程** (1) 质点振动的振幅  $A = 0.1 \text{ m}$

对比  $x-t$  图线可画出  $t_0 = 0$  和  $t_1 = 4 \text{ s}$  时的旋转矢量, 如图(b) 所示.

由图(b) 可知初相  $\varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$  (或  $\varphi_0 = \frac{5\pi}{3}$ )

由  $\omega(t_1 - t_0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$  得  $\omega = \frac{5\pi}{24} \text{ s}^{-1}$

所以振子的运动方程为  $x = 0.10 \cos(\frac{5\pi}{24}t - \frac{\pi}{3})$

(2) 图(a) 中  $P$  点位置是质点从  $\frac{1}{2}A$  处运动到正向的端点处, 对应的旋转矢量图如图

(c) 所示, 即  $P$  点的相位为  $\varphi_P = \varphi_0 + \omega(t_P - 0) = 0$  (若取  $\varphi_0 = \frac{5\pi}{3}$ , 则  $P$  点的相位为:  $\varphi_P = \varphi_0 + \omega(t_P - 0) = 2\pi$ )

(3) 由旋转矢量图(c) 可知  $\omega(t_P - 0) = \frac{\pi}{3}$

所以  $t_P = 1.6 \text{ s}$

注: 本题也可采用解析法, 依据简谐运动方程  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$  求解.

另解法 (1) 写出简谐振动标准式为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad ①$$

由图知  $A = 0.1 \text{ m}$  代入 ① 式得

$$x = 0.1 \cos(\omega t + \varphi) \quad ②$$

当  $t = 0$  时,  $x = 0.05 \text{ m}, v > 0$ , 由 ② 式:  $\varphi = -\pi/3$

所以  $x = 0.1 \cos(\omega t - \frac{\pi}{3}) \quad ③$

当  $t = 4 \text{ s}$  时,  $x = 0, v < 0$  由 ③ 式得  $\omega = \frac{5\pi}{24}$

所以  $x = 0.1 \cos(\frac{5\pi}{24}t - \frac{\pi}{3}) \quad ④$

对于  $P$  点,  $x = 0.1 \text{ m}$ , 由 ④ 式得  $\varphi = 0$

因为  $\varphi = \frac{5\pi}{24}t - \frac{\pi}{3} = 0$

所以  $t = 1.6 \text{ s}$

9-17 知识要点 简谐运动方程:  $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ 

简谐运动的周期与角频率的关系式:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

**逻辑推理** 由初始条件可确定  $\varphi_0$ , 再将相应的  $x$  值代入简谐运动方程, 确定对应的相位  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ , 从而求出对应的时间  $t$ .

**解题过程** 按题意:  $t = 0$  时,  $x = 0$  且  $v > 0$ , 所以简谐运动方程为

$$x = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = A\cos(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2})$$

(1) 由平衡位置到最大位移所用时间为  $\Delta t_1$ , 则

$$A = A\cos(\frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t_1 - \frac{\pi}{2})$$

所以 
$$\Delta t_1 = \frac{T}{4}$$

(2) 由平衡位置到  $x = \frac{1}{2}A$  处所用时间为  $\Delta t_2$ , 则

$$\frac{A}{2} = A\cos(\frac{2\pi}{T}\Delta t_2 - \frac{\pi}{2})$$

所以 
$$\Delta t_2 = \frac{T}{12}$$

(3) 由  $x = \frac{A}{2}$  到  $x = A$ , 所用时间为  $\Delta t_3$ , 则

$$\Delta t_3 = \Delta t_1 - \Delta t_2 = \frac{T}{6}$$

注: 本题用旋转矢量求解更直观.

9-18 知识要点 简谐运动方程:  $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 

物体运动的加速度公式:  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

牛顿第二定律:  $F = ma$

**逻辑推理** 由简谐运动方程结合牛顿定律求解.

**解题过程** (1) 建立  $Ox$  坐标如图解 9-8 所示. 设物体的运动方程为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

则 
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (1)$$

由牛顿第二定律有

$$F = mg - F_N = ma \quad (2)$$

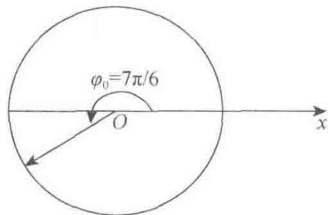
由 ①、② 式得重物受到平板的支持力为

$$F_N = mg - ma = mg + mA\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

物体在最低点时, 相位  $\varphi = \omega t + \varphi_0 = 0$ , 物体受的支持力为

$$F_N = mg + mA\omega^2 = mg + mA(\frac{2\pi}{T})^2 = 12.96\text{N}$$

重物对平板的作用力  $F'_N$  与  $F_N$  大小相等, 方向相反.



图解 9-8

(2) 当频率不变时, 设振幅为  $A'$  时, 重物刚好离开平板, 即  $\varphi = \omega t + \varphi_0 = \pi$

$$F_N = mg - mA' \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = 0$$

$$\text{解得 } A' = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 6.2 \times 10^{-2} \text{ m}$$

(3) 当振幅不变时, 设频率为  $\gamma'$  时, 重物刚好离开平板, 即  $\varphi = \omega t + \varphi_0 = \pi$  时

$$F_N = mg - mA(2\pi\gamma')^2 = 0$$

$$\text{解得 } \gamma' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{A}} = 3.52 \text{ Hz}$$

**9-19 逻辑推理** 要求物体木板保持相同的运动状态, 即始终有相同的速度与加速度. 物体的加速度完全由静摩擦力提供. 要使两者不产生相对滑动, 只需满足加速度最大时不相对滑动即可.

**解题过程** 根据上述证得:

$$\mu_s mg \geq mA\omega^2$$

即

$$\mu_s \geq \frac{A\omega^2}{g} = 0.03$$

**9-20 知识点窍** 简谐运动方程:  $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ .

**知识点窍** 画出特定时刻两质点的旋转矢量图, 由两矢量的夹角即可得到它们的相位差.

**解题过程** 按题意, 画出两质点在特定时刻  $t$  的旋转矢量, 如图解 9-20 所示. 图中  $OM$  表示第一个质点振动的旋转矢量;  $ON$  表示第二个质点振动的旋转矢量.

由图可知, 第一个质点振动的相位比第二个质点超前  $\frac{\pi}{2}$ .

由于第一个质点的运动方程为  $x_1 = A\cos(\omega t + \varphi)$

所以第二个质点的运动方程为  $x_2 = A\cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$

它们的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$

**9-21 解题过程** (1) 由图可以知, 质点速度最大时, 质点的振动高也最大.

$$v = A\omega, \text{ 即}$$

$$\omega = \frac{v}{A} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{而周期为 } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4}{3}\pi$$

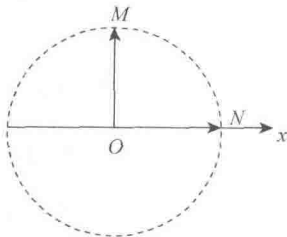
(2) 当振点在振幅最大的时候, 加速度也达到最大, 此时有:  $ma = mA\omega^2$

即

$$a = A\omega^2 = 2 \times (1.5)^2 = 4.5 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

(3) 设运动方程为  $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ , 由图可知:

$$A = 2, \varphi = -\frac{5}{6}\pi$$



图解 9-20

根据以上计算,  $\omega = \frac{3}{2}$ , 所以方程为  $x = 2\cos\left(\frac{3}{2}t - \frac{5}{6}\pi\right)$ .

**9-22 知识要点** 单摆运动方程:  $\theta = \theta_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$

单摆的角频率:  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

单摆的角速度:  $\frac{d\theta}{dt} = -\theta_{\max} \omega \sin(\omega t + \varphi)$

单摆的线速度:  $v = l \cdot \left| \frac{d\theta}{dt} \right|$

**逻辑推理** 由于  $\theta \leq 5^\circ$ , 所以该单摆的角量与时间的关系可表示为简谐运动方程  $\theta = \theta_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$ , 式中  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , 由初始条件可确定  $\theta_{\max}$  和  $\varphi$ , 从而写出单摆的运动方程. 利用求导的方法可求出角速度, 进而求出线速度.

**解题过程** (1) 单摆的角频率为:  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = 3.13 \text{ s}^{-1}$

单摆的周期为  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2.01 \text{ s}$

(2) 由  $t = 0$  时,  $\theta = \theta_{\max} = 5^\circ$  可得初相  $\varphi = 0$

所以该单摆的运动方程为  $\theta = \frac{\pi}{36} \cos 3.13t$

(3) 摆角为  $3^\circ$  时, 有  $\cos(\omega t + \varphi) = \frac{\theta}{\theta_{\max}} = 0.6, \sin(\omega t + \varphi) = 0.8$

所以此时质点的角速度为  $\frac{d\theta}{dt} = -\theta_{\max} \omega \sin(\omega t + \varphi) = -0.218 \text{ s}^{-1}$

线速度为  $v = l \cdot \left| \frac{d\theta}{dt} \right| = 0.218 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

**9-23 知识要点** 单摆振动的周期:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

**逻辑推理** 本题可采用比值法: 分别写出该秒摆在地球和月球上周期的表达式, 利用两式之比求出月球表面的重力加速度.

**解题过程** 秒摆在地球上的周期:  $T_E = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_E}} \quad ①$

秒摆在月球上的周期:  $T_M = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_M}} \quad ②$

① 得  $\frac{T_E}{T_M} = \sqrt{\frac{g_M}{g_E}}$

所以  $g_M = \left(\frac{T_E}{T_M}\right)^2 \cdot g_E = 1.63 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

**9-24 逻辑推理** (1) 由公式  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  及  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  可求出空盘时质量为  $m_1$  的振子的振动周期  $T$  和重物质量为  $m_1 + m_2$  的振子的振动周期  $T'$ .

(2) 取重盘平衡位置为原点建立  $Ox$  坐标, 如题 9-23 图(b) 所示. 由初始条件可得系

统的振幅为  $A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2}$ , 式中  $x_0 = l_1 - l_2 = \frac{mg}{k} - \frac{m_1 + m_2}{k}g = -\frac{m_2}{k}gv_0$ ,

可由  $m_2$  物体与  $m_1$  空盘相不变时的动量守恒得到,  $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$ .

**解题过程** (1) 由  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  及  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  可得

$$\text{空盘的振动周期为} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$$

$$\text{物体落入盘后的周期为} \quad T' = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$$

显然  $T' > T$ , 即周期变大了.

(2) 建立  $Ox$  坐标轴如题 9-23 图(b) 所示, 坐标原点为新系统的平衡位置, 初位移为

$$x_0 = l_1 - l_2 = \frac{m_1 g}{k} - \frac{m_1 g + m_2 g}{k} = -\frac{m_2 g}{k}$$

由动量守恒定律可得振动系统的初速度为

$$v_0 = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh}$$

$$\begin{aligned} \text{所以系统的振幅为} \quad A &= \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2} = \sqrt{(\frac{m_2 g}{k})^2 + \left[ \frac{m_2 \sqrt{2gh} / (m_1 + m_2)}{\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}} \right]^2} \\ &= \frac{m_2 g}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m_1 + m_2)g}} \end{aligned}$$

**9-25 逻辑推理** (1) 由公式  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  及  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  可求出粘土落在物体上前后的周期  $T$  和  $T'$ .

(2) 在两种振动过程中, 各自的机械能守恒, 在粘土下落前后, 系统在水平方向动量守恒.

**解题过程** (1) 由公式  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  及  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  可得粘土下落前、后的周期分别为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \quad T' = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$$

显然  $T' > T$ , 即周期变大了.

(2) (a) 设粘土落在物体上前振动系统的振幅和经过平衡位置时的速度分别为  $A$ 、 $v$  和  $A'$ 、 $v'$ .

$$\text{由机械能守恒定律有} \quad \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m_1 v^2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 \quad (2)$$

$$\text{由动量守恒定律有} \quad m_1 v = (m_1 + m_2)v' \quad (3)$$

$$\text{联立 } (1) \sim (3) \text{ 式得} \quad A' = \sqrt{m_1 / (m_1 + m_2)} \cdot A$$

显然  $A' < A$ , 振幅变小了.

(b) 物体正好在最大位移处时, 粘土落在物体上, 则由动量守恒定律和它们水平



方向共同速度  $v' = m_1 v / (m_1 + m_2) = 0$ , 得出振幅不变, 即  $A' = A$ .

9-26 **解题过程** 由图知, 这是利用平行轴定理求解转动惯量的问题, 则

$$J_{\bar{c}} = J - mr^2$$

而  $J = \frac{mgl_c}{\omega^2}$  其中  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , 代入上式中, 这里  $l_c = r$

所以

$$\begin{aligned} J_{\bar{c}} &= \frac{mgl_c T^2}{4\pi^2} - mr^2 \\ &= \frac{mgrT^2}{4\pi^2} - mr^2 \\ &= 2.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

9-27 **知识要点** 简谐振动的方程:  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$

角频率公式:  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

振幅公式:  $A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2}$

动量守恒定律:  $\sum mv = \text{恒量}$

**知识要点** 子弹射入木块的过程极短, 可认为系统动量守恒, 由此可求出振动的初速度. 再由初始条件可得到角频率、振幅及初相, 从而得到简谐运动方程. 注意, 初相也可用旋转矢量法求得.

**解题过程** 设系统作简谐运动的运动方程为  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$

振动系统的角频率为

$$\omega = \sqrt{k/(m_1 + m_2)} = 40 \text{ s}^{-1}$$

由动量守恒定律得, 子弹和木块的共同运动初速度即振动的初速度

$$m_1 v = m_1 v_0 + m_2 v_0$$

$$v_0 = m_1 v / (m_1 + m_2) = 1.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

又因初始位移  $x_0 = 0$ , 则振动系统的振幅为

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} = |v_0/\omega| = 2.5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

在初始位移处

$$x_0 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

即

$$\cos \varphi = 0 \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{3\pi}{2}$$

系统的运动速度为

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

在  $t = 0$  时刻

$$v_0 = -A\omega \sin \varphi$$

由题意可知,  $v_0$  和  $x$  轴正方向相反, 所以  $\sin \varphi > 0$

故  $\varphi$  只能取  $\frac{\pi}{2}$ .

至此, 可求得系统作简谐运动的运动方程为:

$$x = 2.5 \times 10^{-2} \cos[40t + 0.5\pi]$$

9-28 **知识要点** 简谐振动的最大加速度:  $a_{\max} = A\omega^2$

简谐振动的周期:  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

机械能守恒定律:  $\sum (E_k + E_p) = \text{常量}$

**逻辑推理** 由公式  $a_{\max} = A\omega^2$  求出  $\omega$ , 从而求出  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

在简谐运动过程中, 机械能守恒且总能量为  $E = E_k + E_p = \frac{1}{2} kA^2$ , 由此可求解有关

能量问题.

**解题过程** (1) 由  $a_{\max} = A\omega^2$  得  $\omega = \sqrt{\frac{a_{\max}}{A}}$ , 所以系统的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{A}{a_{\max}}} = 0.314\text{s}$$

(2) 物体在平衡位置时的势能为零, 由机械能守恒定律有

$$E = E_k = \frac{1}{2}m\Delta^2\omega^2 = \frac{1}{2}mAa_{\max} = 2.0 \times 10^{-3}\text{J}$$

(3) 设振子在  $x_0$  处动能与势能相等, 则有

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}A^2k\right)$$

解得 
$$x_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}A = \pm 7.07 \times 10^{-3}\text{m}$$

(4) 当  $x = \frac{A}{2}$  时,  $E_p = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}E$

$$E_k = E - E_p = \frac{3}{4}E$$

**9-29 知识要点** 简谐振动方程:  $x = A\cos(\omega t + \varphi)$  简谐运动速度:  $v = \frac{dx}{dt} = -A\omega(\sin\omega t + \varphi)$

简谐运动的能量:  $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$

**逻辑推理** 对运动方程求时间的导数可得  $v = v(t)$ , 从而可求出  $v_{\max}$ , 再由振动过程中机械能守恒及在平衡位置时势能为零, 可得振动的能量  $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$ .

**解题过程** (1) 设氢原子的运动方程为  $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

则其运动的速度 
$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

所以其最大速度为 
$$v_{\max} = A\omega = A \cdot 2\pi\nu = 6.28 \times 10^3 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 氢原子的振动能量为 
$$E = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = 3.31 \times 10^{-20}\text{J}$$

**9-30 解题过程** (1) 由振动方程可知 
$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = 0.5\cos\left(8\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

可以得到: 
$$\omega = 8\pi$$

$$t = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{8\pi} = 0.25\text{s}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$

(2) 
$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (8\pi)^2 \times (0.5)^2 = 7.9 \times 10^{-5}\text{J}.$$

(3) 由动能和势能关系得: 
$$\overline{E_k} = \int_0^T \frac{1}{2}m\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt = 3.9 \times 10^{-5}\text{J}$$

$$\overline{E_p} = \int_0^T \frac{1}{2}m\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt = 3.9 \times 10^{-5}\text{J}$$

## 9-31 知识点窍 两个同方向、同频率简谐运动的合振动

$$\text{振幅公式: } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\text{初相位公式: } \varphi = \arctan[(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)/(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)]$$

**逻辑推理** 两个同方向、同频率简谐运动的合运动仍是简谐运动,其角频率不变.合振动的振幅和初相位可由公式得到.

**解题过程** (1) 合振动的振幅为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 7.8 \times 10^{-2} \text{ m}$$

合振动的初相位为

$$\varphi = \arctan \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = \arctan 11 = 1.48 \text{ rad}$$

(2) 要使  $x_1 + x_3$  振幅最大,则必有  $\Delta\varphi = \varphi_3 - \varphi_1 = 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$$\text{所以 } \varphi_3 = 2k\pi + \varphi_1 = 2k\pi + 0.75\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

要使  $x_2 + x_3$  振幅最小,则必有

$$\pi\varphi = \varphi_3 - \varphi_2 = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\text{所以 } \varphi_3 = \varphi_2 + (2k+1)\pi = 2k\pi + 1.25\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

9-32 知识点窍 拍频公式:  $\Delta\gamma = |\gamma_2 - \gamma_1|$  固有频率:  $\gamma = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ 

**逻辑推理** 由拍频公式可得待测频率的两个值  $\gamma_2 = \gamma_1 \pm \pi\gamma$ . 再由固有频率公式  $\gamma = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$  及  $m$  增加时  $\Delta\gamma = |\gamma_2 - \gamma_1|$ , 减小可推出  $\gamma_2 = \gamma_1 + \Delta\gamma$ .

**解题过程** 由拍频公式  $\Delta\gamma = |\gamma_2 - \gamma_1|$  得

$$\gamma_2 = \gamma_1 \pm \Delta\gamma \quad (1)$$

$$\pm \Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1 \quad (2)$$

$$\text{即由 (1) 得 } \gamma_2 = (348 \pm 3) \text{ Hz}$$

由  $\gamma = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$  可知,  $m$  增大时,  $\gamma_2$  减少. 由 (2), 当  $\gamma_2$  减小时,  $\Delta\gamma$  也减小, 则应取正号, 所以

$$\gamma_2 = (348 + 3) \text{ Hz} = 351 \text{ Hz}$$

## 9-33 知识点窍 两个相互垂直的周频率简谐运动的合振动的轨迹方程

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

**逻辑推理** 这是两个振动方向相互垂直的周频简谐运动的合成问题, 求合振动的方程关键是确定

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

**解题过程** 本题中:  $A_1 = A_2 = A, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \varphi, \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi$

由合振动的轨迹方程

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi$$

可得, 当  $\Delta\varphi = \varphi = 0^\circ$  时, 轨迹方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 0 \\ x = y - A \cos \omega t \end{cases} \Rightarrow x = y \quad \text{为一直线方程}$$

当  $\Delta\varphi = \varphi = 30^\circ$  时, 轨迹方程为

$$x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy = \frac{1}{4}A^2 \quad \text{为椭圆方程}$$

当  $\Delta\varphi = \varphi = 90^\circ$  时, 轨迹方程为

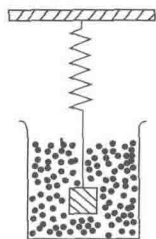
$$x^2 + y^2 = A^2 \quad \text{为圆方程}$$

### 9-34 知识 点 睛 同上题.

**解题 过程**

(1) 参考上题求解, 当要求任一时刻光点相对于屏不动, 即  $x_{\text{光对屏}} = 0$ , 就是当  $\pi + \varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$  时, 即  $\varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi$  时 ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ),  $A' = 0$ . 当光点相对于屏作振幅为  $2A$  的运动时, 要求  $\pi + \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$ , 即  $\varphi_2 = \varphi_1 + (2k-1)\pi$ .

(2) 由以上求解可知, 要使光点相对于屏不动, 就要求手电筒和屏的振动始终要同步, 即同相位, 为此, 把它们往下拉  $A$  位移后, 同时释放即可; 同理, 要使光点对屏作振幅为  $2A$  的谐振动, 两者必须相位相反, 为此, 让手电筒位于平衡点  $O$  上方的  $-A$  处, 而屏侧位于  $+A$  处同时释放, 即可实现.



题 9-34 图

9-35 **解题 过程** (1) 由图可以看出, 当质点 1 开始振动的时候, 质点 2 已经振动了  $\frac{A}{2}$ , 由题知 1, 2 振动频率相同即周期相同, 设起运动方程  $x_1, x_2$  分别为  $x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$ ,  $x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$

根据题意和图中数据:  $A_1 = A_2 = 0.1 \text{ m}$

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}, \varphi_2 = \frac{\pi}{3}$$

所以有

$$x_1 = 0.1 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right), x_2 = 0.1 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

(2) 旋转矢量见图(b). 由图可以看出, 两者相位差为  $\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{6}\pi$ .

(3) 当两简谐波叠加时产生了共振, 此时, 设方程为  $x = A' \cos(\omega t + \varphi')$

$$A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 0.05 \text{ m}$$

而

$$\tan \varphi' = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

最后可以求出

$$x = 0.052 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$$

9-36 **解题 过程** 当物体在液体中作振动时, 由于阻力使物体振幅减小, 根本原因是角速度发生了变化, 则设系统的阻尼系数为  $L$ , 则有:

$$L = \sqrt{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \sqrt{(2\pi\nu_1)^2 - (2\pi\nu_2)^2} = 2\pi \sqrt{\nu_1^2 - \nu_2^2}$$

9-37 **知识 点 睛** 受迫振动方程:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) + A \cos(\omega_p t + \Psi)$$

式中:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + 4\delta^2 \omega_p^2}}$$

**逻辑推理** 受迫振动是由阻尼振动  $A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$  和简谐运动  $A \cos(\omega_p t + \Psi)$  构成的, 经过一段时间后,  $e^{-\delta t} \rightarrow 0$ , 所以受迫振动达到稳定状态时, 受迫振动的角频率就是驱动力的角频率  $\omega_p$ , 其振幅就等于第二项的振幅  $A$ .

**解题过程** (1) 受迫振动达到稳定后, 其振动方程的第一项可忽略, 因而受迫振动变为简谐振动, 即

$$x = A \cos(\omega_p t + \Psi)$$

所以其角频率为

$$\omega_1 = \omega_p = 30 \text{ s}^{-1}$$

(2) 若外力的角频率  $\omega_p$  可以改变, 则振幅  $A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + 4\delta^2 \omega_p^2}}$  也将改变, 当  $\frac{dA}{d\omega_p} = 0$  时, 振幅将取得极大值, 此时出现共振现象, 解得出现共振现象的周期性外力的角频率为:

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = 26.5 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{共振时的振幅: } A_r = \frac{F_0/2m\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = 0.177 \text{ m}$$

**9-38 知识点窍** 共振, 固有频率  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

**逻辑推理** 根据题目要求, 所以求火车振动最强烈时的运动速度, 通过共振条件即可导出.

**解题过程**  $W_p = 2\pi \frac{V}{L} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

$$\text{得 } V = \frac{L}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$\text{代入数值: } L = 12.5 \text{ m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10.6/\text{s}$$

$$\delta = 2.5/\text{s} \quad \text{解得 } v = 19.8 \text{ m/s}$$

**9-39 知识点窍** 无阻尼自由振荡电路

**逻辑推理** 由电压的角频率  $\omega$  求得振荡周期, 然后可得自感  $L$ , 最后求出电流的变化规律.

**解题过程** (1) 振荡周期  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10^4 \pi} = 2 \times 10^{-4} \text{ s}$

$$(2) \text{ 电路中的自感: } L = \frac{T^2}{4\pi^2 C} = \frac{(2 \times 10^{-4})^2}{4 \times 3.14^2 \times 1 \times 10^{-7}} = 1.01 \times 10^{-2} \text{ H}$$

(3) 电流由电流的定义可知:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{C \cdot \Delta U}{\Delta t} \\ &= -0.157 \sin(10^4 \pi t) \end{aligned}$$

**9-40 知识点窍**  $v = 1/2\pi \sqrt{LC}$

**逻辑推理** 根据  $v = 1/2\pi \sqrt{LC}$ , 由电容比  $C_{\max}/C_{\min}$  确定对应的频率比  $v_{\max}/v_{\min}$ , 进而求得

**解题过程** (1) 根据  $v = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , 当线圈电感  $L$  一定时,  $\frac{v_{\max}}{v_{\min}} = \sqrt{\frac{C_{\max}}{C_{\min}}} = \sqrt{36} = 6$ .

(2) 因为  $\frac{v_{\max}}{v_{\min}} = \frac{1.5 \times 10^5 \text{ Hz}}{5 \times 10^5 \text{ Hz}} = 3$ , 所以  $\frac{C_{\max}}{C_{\min}} = 9$

电容器并联总电容为分电容之和, 所以  $\frac{360 + C}{10 + C} = 9$ .

可得在原电容器上需并联的电容  $C = 33.75 \text{ pF}$

$C_{\min} = 10 + 33.75 = 43.75 \text{ pF}$

所以此电路选用的线圈自感为:

$$L = \frac{1}{4\pi^2 v_{\max}^2 C_{\min}} = 2.57 \times 10^{-4} \text{ H} = 257 \mu\text{H}.$$

**9-41 逻辑推理** 用电磁场中电场能量和磁场能量公式得出它们随时间  $t$  的函数关系式和特定时刻的瞬时值.

**解题过程** (1) 由题中的已知条件可以看出

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1.015 \times 0.025 \mu\text{F}}} = 2 \times 10^3 \pi / \text{s}$$

电荷量大小为:  $Q = Q_0 \cos \omega t = 2.5 \times 10^{-6} \cos(2000\pi t)$

则电势差:  $u = \frac{Q}{C} = \frac{2.5 \times 10^{-6} \cos(2000\pi t)}{0.025 \mu\text{F}} = 100 \cos(2000\pi t)$

电流为:  $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -2.5 \times 10^{-6} \sin(2000\pi t) \cdot 2000\pi t$   
 $= -1.57 \times 10^{-2} \sin(2000\pi t)$

$$\begin{aligned} (2) \quad E_{\text{电}} &= \frac{Q^2}{2C} = \frac{(2.5 \times 10^{-6} \cos(2000\pi t))^2}{2 \times 0.025 \mu\text{F}} \\ &= 1.25 \times 10^{-4} \cos^2(2000\pi t) \text{ J} \\ E_{\text{磁}} &= \frac{LI^2}{2C} = \frac{1.015 \times (-1.57 \times 10^{-2} \sin(2000\pi t))^2}{2 \times 0.025 \mu\text{F}} \\ &= 1.25 \times 10^{-4} \sin^2(2000\pi t) \text{ J} \\ E_{\text{总}} &= E_{\text{电}} + E_{\text{磁}} = 1.25 \times 10^{-4} \text{ J} \end{aligned}$$

(3) 当  $t_1 = \frac{T}{8}$

$$U_1 = 100 \cos\left(2000\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot 1.001\right) = 70.7 \text{ V}$$

$$I_1 = -1.57 \times 10^{-2} \sin\left(2000\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot 0.001\right) = -1.11 \times 10^{-2} \text{ A}$$

$$E_{\text{电}1} = 1.25 \times 10^{-4} \cos^2\left(2000\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot 0.001\right) = 6.25 \times 10^{-5} \text{ J}$$

$$E_{\text{磁}1} = 1.25 \times 10^{-4} \sin^2\left(2000\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot 0.001\right) = 6.25 \times 10^{-5} \text{ J}$$

当  $t_2 = \frac{T}{4} = \frac{1}{4} \cdot 0.001$

$$U_2 = 100 \cdot \cos\left(2000\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 0.001\right) = 0$$

$$I_2 = -1.57 \times 10^{-2} \sin\left(2000 \cdot \pi \frac{1}{4} \cdot 0.001\right) = -1.57 \times 10^{-2} \text{ A}$$

$$E_{\text{电}2} = 1.25 \times 10^{-4} \cos^2\left(2000 \cdot \pi \frac{1}{4} \cdot 0.001\right) = 0$$

$$E_{\text{磁}2} = 1.25 \times 10^{-4} \sin^2\left(2000 \cdot \pi \frac{1}{4} \cdot 0.001\right) = 1.25 \times 10^{-4} \text{ J}$$

- 9-42 解题过程** 为了实现将电容器  $C_1$  上的电能全部转化为电容器  $C_2$  上的电能, 需要依靠电感  $L$  进行过渡, 即先闭合  $S_2$  使回路电流达到最大,  $C_1$  的电场能全部转化为  $L$  中的磁场能, 然后断开  $S_1$ , 闭合  $S_1$ , 让  $L$  给  $C_1$  充电, 当回路电流减至 0 时, 断开  $S_1$ . 此时  $L$  中的磁场能全部转化为  $C_2$  中的电场能.

$$\text{整个过程能量守恒: } \frac{1}{2} C_2 U_1^2 = \frac{1}{2} C_2 U_2^2$$

$$\Rightarrow U_2 = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} U_1 = 400 \text{ V}$$

- 9-43 知识点窍** 点电荷产生的电场:  $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

**逻辑推理** 在桌面上没有电荷时, 小球在弹簧  $n$  与重力的作用下简谐运动, 距离  $P$  点的位置周期性地变化, 导致  $P$  点处的电场强度周期性的变化.

第二问要使桌面上的小球能够周期性地脱离桌面, 只要在  $P$  点场强最大时该小球的重力等于其受到的静电力即可.

**解题过程** 小球所作的简谐运动方程为(以平衡时所处的位置为原点, 竖直向上为正方向):

$$x = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t = 0.05 \cos 12.4t (\text{m})$$

在  $P$  处产生的电场强度的大小为:

$$\begin{aligned} E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (0.15 + x)^2} \\ &= \frac{1.08 \times 10^7}{(3 + \cos 12.4t)^2} \end{aligned}$$

在  $p$  点放一点电荷  $q$  时, 根据推理过程中的讨论:

$$m'g = \frac{qQ}{4\pi q_0 r^2}$$

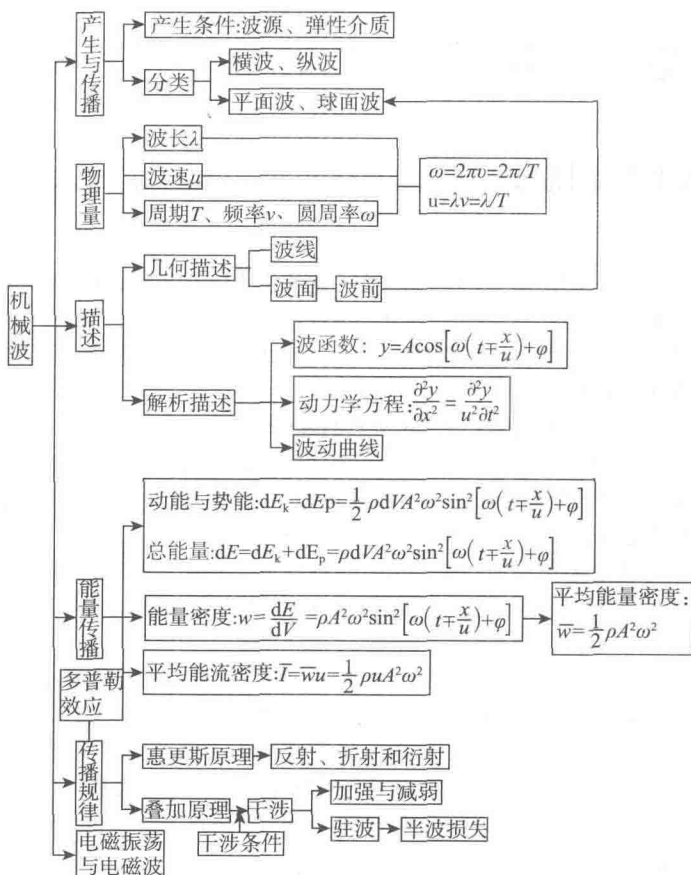
其中  $r = 0.1 \text{ m}$  为小球运动的最低点, 也即  $p$  点场强最大

解得  $m' = 4.13 \times 10^{-5} \text{ kg}$

## 第十章

## 波动

## 本章知识框架图





## 考试要点

1. 机械波在介质中传播的物理机制和图像,机械波形成的条件,波动和振动的联系与区别.
2. 描述波动的物理量(波频、波长、波速等)的物理意义及它们之间的磁系.
3. 建立平面简谐波波动表达式的方法,波动表达式的物理意义.
4. 波的能量传播特征,能流、能流密度等概念.
5. 惠更斯原理及波的衍射、反射和折射现象.
6. 波的叠加原理,波的相干条件,波程差与相位差的关系.
7. 驻波形成的条件及主要特征,多普勒效应的形成机理及简单应用.
8. 平面电磁波的特性及能量.

## 知识点整理与解析

### 一、机械波的几个概念

#### 1. 机械波的形成

由无穷多个质点通过相互之间弹性力结合在一起的连续介质称为弹性介质,弹性介质可以是固体、液体或气体,当弹簧性介质中的一质点在其平衡位置附近振动时,由于介质中弹性力的作用而引起周围质点的振动,周围质点的振动又引起其邻近的外围质点的振动.这样,振动就以一定的速度由近及远地向各个方向传播出去.

产生机械波必须具备两个条件:一是要有作机械振动的物体,称为波源;二是要有能够传播振动状态的弹性介质,没有波源当然不能产生波动,但有了波源,如果没有弹性介质,也是不能产生机械波的.例如,置于真空罩中的电铃通电后,虽然在不断地振动,但听不到声音,其原因就在于电铃周围没有能传播振动状态的弹性介质.

应当指出,波动只是振动状态的传播,介质中的各质点并不随小波前进,各质点只在各自的平衡位置附近振动,振动状态的传播速度称为波速度,波速和质点的振动速度是两个不同的概念.

#### 2. 横波与纵波

机械波可分为横波与纵波两种基本类型,如果质点的振动方向和波的传播方向相垂直,这种波称为横波.例如,手握绳子一端上下振动可以看到绳子的这端先形成一个凸起的状态,然后又形成一个凹下的状态,凹凸起伏的状态沿着绳子传递出去,形成横波.如果质点的振动方向与波的传播方向平行,这种波称为纵波.例如,把一根相当长的轻弹簧用细线水平悬挂起来,用手使弹簧的一端作沿弹簧长度方向振动,可以看到弹簧上有的部分密集,有的部分稀疏.疏密相间,沿着弹簧向前传播,形成纵波,气体中传递的声波亦是纵波.

#### 3. 波长 波的周期和频率 波速

## 二、波长

波在传播过程中,沿同一波线上位相差为  $2\pi$  的两个相邻质点之间的距离,称为波长,用  $\lambda$  表示。在横波情况下,波长等于两相邻波(或波谷)之间的距离;在纵波情况下,波长等于两相邻密部(或疏部)中心之间的距离。波长反映了波动的空间周期性,即同一波线上相距一个波长的质点的振动状态都相同。

## 三、波的周期和频率

波前进一个波长的距离所需要的时间称为波的周期,用  $T$  表示。周期的倒数称为波的频率,用  $\nu$  表示,即  $\nu=1/T$ ,频率也就是单位时间内波动传过的距离中所包含的波长数目。由波动的形成过程可知,经过一个周期,质点作一次完全振动,波沿波线传出一个完整的波形。所以波的周期(或频率)等于波源的周期(或频率),也就是介质中各质点振动的周期(或频率)。这就是说,当波在不同的介质中传播时,它在各介质中的周期(或频率)是相同的。

## 四、波速

在波动过程中,单位时间内振动所传播的距离称为波速度,用  $u$  表示。波的大小取决于介质的性质,在不同的介质中,波速是不同的。例如,在  $0^\circ\text{C}$  时,声波在空气中传播的速度为  $331\text{ m/s}$ ,而在氢气中传播的速度为  $1\,263\text{ m/s}$ 。

因为在一个周期内,波前进一个波长的距离,所以波速

$$u = \frac{\lambda}{T} \quad (10-1)$$

或

$$u = \lambda \nu \quad (10-2)$$

上两式是波长、周期(或频率)和波速之间的基本关系,它们具有普遍的意义,对各类波都是适用的,必须指出,波在不同的介质中传播时,由于波速与介质有磁场,而波的频率就是波源的频率,与介质无关,因此,由式(10-1)或式(10-2)可知,同一频率的不同介质中传播时,其波长也随介质的不同而不同。

**例 1** 在室温下,已知空气中的声速  $u_1$  为  $340\text{ m/s}$ ,水中的声速  $u_2$  为  $1\,450\text{ m/s}$ 。求频率为  $200\text{ Hz}$  的声波在空气中和在水中的波长各为多少。

**解** 由式(6-2)可得

$$\lambda = \frac{u}{\nu}$$

声波在空气中的波长

$$\lambda_1 = \frac{u_1}{\nu} = \frac{340}{200} = 1.7(\text{m})$$

声波在水中的波长

$$\lambda'_1 = \frac{u_2}{\nu} = \frac{1\,450}{200} = 7.25(\text{m})$$

可见,同一频率的声波,在水中的波长比空气中的波长要长得多;也可很容易地知道,在同一介质中,频率高的声波比频率低的声波的波长要短。

## 五、波线 波面 波前

### (1) 波传

波传播方向带箭头的线叫做波线,光波的波线简称光线。

### (2) 波面

振动相位相同点连成的曲面叫做波面(也叫同相面)。同一时刻,波面有任意多个,一般来讲,在画图时让相邻两个波面之间的距离等于一个波长。

### (3) 波前

某一时刻,波源最初振动状态传播到各点连成的面称波前或波阵面,它是同相面的一个特例,是传到最前面的那个同相面,任意时刻只有一个波阵面。

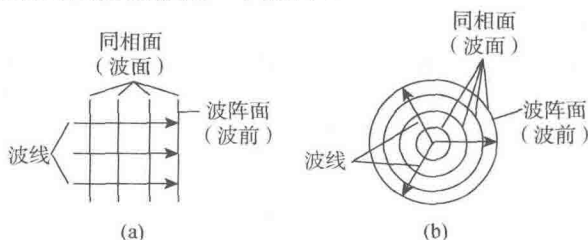


图 10-1



**温馨提示** 同一波面上所有质元的振动状态是相同的,在各向同性的弹性介质中,波线总是与波面垂直。

小结:描述波动的特征量

名称	内容	说明
波长 $\lambda$	波长是波动过程所特有的物理量。沿波传播方向上振动相位完全相同(相位差为 $2\pi$ )的相邻两点间的距离,称为波的波长 $\lambda$	机械波的产生需要波源和弹性介质。波的传播是振动形式、相位和能量的传播。 波长反映波动过程在空间上的周期性
周期 $T$ 和频率 $\nu$	波向前传播一个波长所需的时间称为波的周期 $T$ 。 周期的倒数即为频率 $\nu$ ,它表示单位时间内波动所传播的完整波的数目	波的周期(频率)反映波动过程在空间的周期性 当波源相对介质静止时,介质中的波动频率等于波源的振动频率
波速 $u$	振动状态(振动相位)在介质中传播的速度,称为波速 $u$ 。 机械波的波速完全由介质本身的特性决定,即取决于介质的弹性模量和密度	注意区别波速 $u$ 和介质质点的振动速度 $v$ ,两者概念不同
特征量的关系	$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu$	适用于所有性质的波

## 六、平面简谐波

当波源作简谐振动时,在各同性的均匀、无吸收介质中传播的波称为简谐波.简谐波只是一种理想模型.是波动中最基本的一种波动状态,任何复杂波都可理解为一系列不同频率简谐波的叠加.

### 1. 简谐波的波函数

行波波函数的一般形式为  $y = f\left(t \mp \frac{x}{u}\right)$ , 这里仅讨论理想的无吸收均匀无限大介质中传播的平面简谐的波函数,如图 10-2 所示,有一列沿  $x$  轴方向传播的平面简谐纵波(或横波),设  $x=0$  处质点振动方程为  $y_0 = A \cos(\omega t + \varphi)$ , 由于沿着波的传播方向振动状态依次落后,所以波线上平衡位置为  $x$  的任一质点在任意时刻  $t$  的振动位移  $y$  为

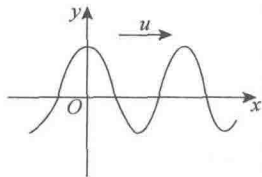


图 10-2

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t \mp \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right].$$

上式称为平面谐波波函数,式中,  $u = \frac{\lambda}{T} = v\lambda$ ; 角波数  $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ , 当波沿  $x$  轴正向传播时取减号,沿  $x$  轴负向传播时取加号.

(1)  $x$  给定时,取  $x = x_1$ ,  $y = A \cos \left[ \omega \left( t \mp \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$  表示  $x_1$  处质点的振动方程.

(2)  $t$  给定时,取  $t = t_1$ ,  $y = A \cos \left[ \omega \left( t \mp \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$  表示  $t_1$  时刻波形图.

(3)  $x$  和  $t$  都是变化的情况,此时有  $y = A \cos \left[ \omega \left( t \mp \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] = A \cos \left[ \omega \left( t + \Delta t - \frac{x + u\Delta t}{u} \right) + \varphi \right]$

这说明  $t$  时刻  $x$  处质点振动状态在  $t + \Delta t$  时刻传到了  $x + u\Delta t$  处,即振动状态传播的距离  $\Delta x = u\Delta t$ ,整个波形沿传播方向移动距离  $\Delta x = u\Delta t$ .

(4) 同一时刻同一波线上不同振动质点的相位差,在同一时刻  $t$ ,坐标为  $x_1$  和  $x_2$  两振动质点相位差为

$$\Delta\varphi = \left[ \omega \left( t - \frac{x_1}{u} \right) + \varphi \right] - \left[ \omega \left( t - \frac{x_2}{u} \right) + \varphi \right] = \frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1).$$

如果  $x_2 - x_1 = k\lambda$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ,  $\Delta\varphi = 2k\pi$ , 则  $x_1$  和  $x_2$  两质点振动状态为同相,有相同的位移和振动速度;如果  $x_2 - x_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$ , 则  $x_1$  和  $x_2$  两质点振动状态为反相,位移和速度大小相等,但方向相反.

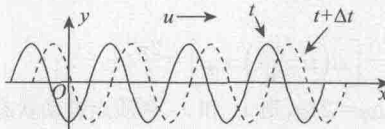
### 2. 波函数的物理学意义

对于给定的  $x$  值,  $y = A \cos[\omega t + (\varphi - \omega x/u)] = y(t)$ , 位移  $y$  仅是时间  $t$  的余弦函数,表示平衡位置位于  $x$  处的质元的振动方程,各质元作周期为  $T$  的余弦函数振动,反映出波动的时间周期性. 此时的  $y(x) - t$  的关系曲线为质元的振动曲线,相当于盯住质元  $x$ , 研究其运动.

对于给定的  $t$  值,  $y = A \cos[(\omega t + \varphi) - 2\pi x/\lambda] = y(x)$ , 位移  $y$  仅是空间位置  $x$  的余弦函数,表示空间所有质点在该瞬时的位移分布情况,某一个位移沿波的传播方向每隔  $\lambda$  距离重复出现,反映出波动的空间周期性. 此时的  $y(t) - x$  关系曲线为  $t$  瞬时所有质元的位移分布曲线,称为波表图,相当于对空间所有质元拍照.

当  $x$  和  $t$  同时变化时,波函数  $y = A \cos[\omega(t - x/u) + \varphi] = y(x, t)$  是  $x$  和  $t$  的二元函数,表示任意时刻  $t$ 、平衡位置位于任意  $x$  的质元的振动位移情况,并且  $y(x + u\Delta t, t + \Delta t) = y(x, t)$ . 表示了质元振状态的传播,所以又称为行波.

## 小结:平面简谐波的波动方程

名称	内容	说明
波动方程	<p>(1)若已知坐标原点的运动方程</p> $y_0 = A \cos(\omega t + \varphi)$ <p>则沿 <math>x</math> 轴传播的平面简谐波的波动方程为</p> $y(x, t) = A \cos \left[ \omega \left( t \mp \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$ <p>应用 <math>\omega = 2\pi/T</math>, <math>u = \lambda/T</math>, 波动方程可写为</p> $y(x, t) = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right]$ <p>(2)若已知距坐标原点 <math>x_0</math> 处的运动方程</p> $y_{x_0} = A \cos(\omega t + \varphi)$ <p>则沿 <math>x</math> 轴传播的平面简谐波的波动方程为</p> $y(x, t) = A \cos \left[ \omega \left( t \mp \frac{x - x_0}{u} \right) + \varphi \right]$	<p>(1)式中“-”号表示波沿 <math>x</math> 轴正方向传播,称为右行波;“+”表示波沿 <math>x</math> 轴负方向传播,称为左行波。</p> <p>(2)建立平面简谐波动方程的基础是正确写出简谐运动方程</p>
物理意义	<p>(1)若 <math>x</math> 给定,则位移 <math>y</math> 只是 <math>t</math> 的函数,此时波动方程表示距离原点 <math>x</math> 处质点的振动规律,即为此处质点的简谐运动方程。</p> <p>(2)若 <math>t</math> 给定,则位移 <math>y</math> 只是 <math>x</math> 的函数,此时波动方程表示在给定时刻 <math>t</math>,各质点的位移在空间的分布,即为此时刻的波形。</p> <p>(3)若 <math>x</math> 和 <math>t</math> 都在变化,则波动方程表示波线上各个不同质点在不同时刻的位移,即不仅反映了波形,而且反映了波形的传播</p> 	<p>(1)同一时刻在同一波线上的 <math>x_1</math> 和 <math>x_2</math> 两个质点的振动相位差为</p> $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x$ <p>(2)振动曲线描述了某个确定点在不同时刻的振动位移;而波形曲线则表示给定时刻沿波线介质中各个质点的位移分布</p>

例1 某一平面简谐波沿  $x$  轴正方向传播,频率为  $0.125 \text{ Hz}$ ,振幅为  $0.01 \text{ m}$ ,速度为  $380 \text{ m/s}$ ,设波源位于  $x=0$  处,且开始振动时位移为正向最大,试求:

(1)波动方程.

(2) $x=3\lambda/4$  处质点的振动位移方程.

(3) $t=T/4$  时, $x=\lambda/4$  处质点的振动位移,以及  $\lambda/2$  和  $3\lambda/4$  两处质点的振位相.

(4) $t=T/2$  时, $x=3\lambda/4$  质点的振动速度.

解 由题中所给数值,可得周期、圆频率和波长分别为

$$T = 1/\nu = 1/0.125 = 8(\text{s})$$

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \times 0.125 = 0.25\pi(1/\text{s})$$

$$\lambda = uT = 380 \times 8 = 3040(\text{m})$$

(1)由波源振动的初始条件可知,初相为  $\varphi=0$ ,因而波源的振动方程为

$$y = A \cos \omega t$$

$x$  轴上质点的波动方程为

$$y = A \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x) = 0.01 \cos(0.25\pi t - \frac{\pi}{1520}x) \text{ (m)}$$

(2) 将  $x = 3\lambda/4$  代入上式, 得到该点的振动方程为

$$\begin{aligned} y &= 0.01 \cos(0.25\pi t - \frac{\pi}{1520} \cdot \frac{3}{4}\lambda) \\ &= 0.01 \cos(\frac{\pi}{4}t - \frac{3}{2}\pi) \text{ (m)} \end{aligned}$$

(3) 把  $t = T/4, x = \lambda/4$  代入(1), 得到质点的振动位移为

$$y = 0.01 \cos(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{T}{4} - \frac{\pi}{1520} \cdot \frac{\lambda}{4}) = 0.01 \text{ (m)}$$

又根据  $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi\Delta x/\lambda$ , 可得  $x = \lambda/2$  与  $3\lambda/4$  两点的位相差为

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi \frac{\frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{2}\lambda}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$$

(4) 将波动方程  $y = \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x)$  中的  $x$  视为常量, 并求  $y$  对时间  $t$  的导数, 即得  $x$  处的质点速度为

$$u = \frac{dy}{dt} = -A\omega \sin(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x) \quad (10-3)$$

将  $t = T/2, x = 3\lambda/4$  代入式(10-3), 得到质点的速度为

$$v = -A\omega \sin(\omega \frac{T}{2} - \frac{\pi}{1520} \cdot \frac{3}{4}\lambda) = -A\omega \sin(-\pi/2) = 7.85 \times 10^{-3} \text{ (m/s)}$$

## 七、波的能量

### 1. 波能量的传播

波的传播是能量传播的一种形式。随着波动状态改变, 介质中自近及远各质点逐个由静止振动起来, 具有了动能; 由于介质产生了形变, 因而具有了弹性势能。

(1) 质元的振动动能

$$dE_k = \frac{1}{2} \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

(2) 质元的弹性势能

$$dE_p = \frac{1}{2} \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

质元  $dV$  的振动动能与弹性势能相等  $dE_k = dE_p$ , 说明任意时刻质元的动能和势能大小相等, 相位相同, 变化规律一致。质元的动能和势能同时达到最大, 同时达到最小。质元在平衡位置时, 动能和势能最大。质元在最大位移处时, 动能和势能最小。

(3) 质元的总能量

$$dE = dE_k + dE_p = \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

质元  $dV$  的总能量  $dE = dE(x, t)$ , 说明任意时刻、任意位置的质元的能量是变化的, 不守恒的, 这是与简谐振动的一个重要区别, 说明波动是依靠质元能量的变化把能量传播出去的。

传播介质中质元的动能、势能和总能量都与质元体积成正比,与质元振幅的平方成正比,与质元振动角频率的平方成正比。

## 2. 能流和能流密度

波动过程伴随着能量的传播。我们把单位时间内通过介质中某一面积的能量称为通过该面积的能流。设想在介质内取垂直于波速  $u$  的面积  $S$ , 则平均来说, 在单位时间内通过  $S$  的能量等于体积  $uS$  中的平均能量, 如图 10-3 所示, 因此, 通过面积  $S$  的平均能流为

$$\bar{P} = \bar{\omega} u S \quad (10-4)$$

单位时间内通过垂直于波的传播方向的单位面积上的平均能量, 称为能流密度, 用  $I$  表示, 即

$$I = \frac{\bar{P}}{S} = \bar{\omega} u = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u \quad (10-5)$$

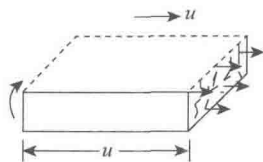


图 10-3

小结: 波的能量

名称	内容	说明
波的能量	动能、势能 $dW_k = dW_p = \frac{1}{2} (\rho dV) A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left( t - \frac{x}{u} \right)$ 机械能 $dW = (\rho dV) A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left( t - \frac{x}{u} \right)$	同一体积元的波动动能和波动势能始终同步变化, 在体积元 $dV$ 内总的波动能量不守恒
平均能量密度	单位体积内的波动能量在一个周期内的平均值称为平均能量密度, 即 $\bar{\omega} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$	说明在无吸收的介质中, 波动只是在传播能量, 弹性介质本身并不储存能量
能流密度 (波的强度)	单位时间内垂直通过面积为 $S$ 的能量称为能流。能流在一个周期内的平均值, 称为平均能流, 其表达式为 $\bar{P} = \bar{\omega} S$ 垂直通过单位面积的平均能流, 叫作能流密度, 也叫作波的强度。 $I = \bar{\omega} u = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 A^2$	波的强度是描述波的强弱的物理量

## 八、惠更斯原理

介质中波阵面上各点都可以看作向前发射子波的子波源, 其后任一时刻这些子波的轨迹就是新的波阵面。惠更斯原理对于任何波动过程均适用。

### 1. 原理

介质中波动传播到的各点都可以看作是发射子波的波源, 而在其后的任意时刻, 这些波的包络就是新的波前。

### 2. 波的衍射

波在传播过程中遇到障碍物时, 能够绕过障碍物边缘, 在障碍物的阴影区内继续传播的现象称为波的衍射 (或称绕射)。

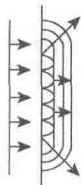


图 10-4

衍射的强弱取决于波的波长与障碍物线度的相对大小,实验证明,障碍物线度越接近波的波长时,衍射越显著.衍射现象可以用惠更斯原理来解释,如图 10-4 所示.

例 2 如 10-5(a)所示,在平面波传播的方向上有一障碍物  $AB$ ,根据惠更斯原理,定性地绘出波绕过障碍物传播的情况.

解 答案如图 10-5(b)所示.

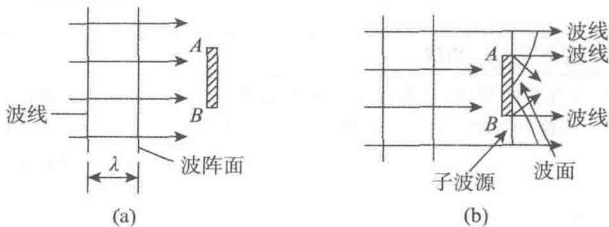


图 10-5

**思路总结** 惠更斯原理可以定性地说明波的衍射现象,但不能定量地说明衍射波的强度.惠更斯原理还可以解释波的反射、折射等现象.

### 3. 波的干涉

两个波的相干条件为:频率相、振向相同,位相差恒定,满足上述条件的两个波在空间交叠时,有些点的振动始终减弱,这种现象称为波的干涉,干涉是波的基本特性之一.

设有两个相干波源  $S_1$  和  $S_2$ ,其振动方程分别为  $y_{S_1} = A_{10} \cos(\omega t + \varphi_1)$ ,  $y_{S_2} = A_{20} \cos(\omega t + \varphi_2)$ ,从两波源发出的波在点  $P$  相遇,如图 10-6 所示,设两个波列到达点  $P$  时的振幅分别为  $A_1$  和  $A_2$ ,且两波在同一介质中传播,波长为  $\lambda$ ,那么两列波在点  $P$  引起的两个分振动分别为  $y_1 = A_1 \cos\left[\omega\left(t - \frac{r_1}{u}\right) + \varphi_1\right]$ ,  $y_2 = A_2 \cos\left[\omega\left(t - \frac{r_2}{u}\right) + \varphi_2\right]$ ,  $r_1$  和  $r_2$  分别为点  $P$  离开  $S_1$  和  $S_2$  的距离,按同向同频率简谐振动合成公式,点  $P$  合振动的表达式为  $y = y_1 + y_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$ ,仍然作简谐振动,其中合振幅  $A$  为

图 10-6

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left[\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right]}.$$

由于波的强度正比于振幅的平方,用  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I$  分别表示两个分振动的强度及合振动的强度,则有

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos\left[\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right].$$

两相干波在空间任一点引起的两个振动的位相差为

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

所以对于空间确定点  $P$ ,位相差  $\Delta\varphi$ 、合振幅  $A$  及合振动强度  $I$  也是一个恒量.

$$\text{当 } \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

$$= \begin{cases} 2k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), A = |A_1 + A_2| \text{ 最大, 振动最强, } I \text{ 也最大.} \\ I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}, \\ (2k+1)\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), A = |A_1 - A_2| \text{ 最小, 振动最弱, } I \text{ 也最小.} \\ I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2}. \end{cases}$$



如果  $\varphi_1 = \varphi_2$ , 则  $\Delta\varphi$  由波程差  $\delta = r_2 - r_1$  来决定.

当  $\delta = r_2 - r_1 = \begin{cases} k\lambda (k=0, \pm 1, \dots), & \text{合振幅最大, 振动最强.} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), & \text{合振幅最小, 振动最弱.} \end{cases}$

如果两个相干波是经过不同介质交叠的, 此时的干涉情况读者自己考虑!

小结:

名称	内容	说明
波的干涉现象	两列相干波在空间相遇, 使某些地方振动始终加强, 而另一些地方振动始终减弱的现象, 称为波的干涉	相干波源的条件是: 频率相同、振动方向相同、相位差相同或相位差恒定. 波的叠加原理是波的干涉的理论基础
干涉加强、减弱的条件	$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$ $= \begin{cases} \pm 2k\pi & \text{干涉加强} \\ \pm (2k+1)\pi & \text{干涉减弱} \end{cases}$ $(k=0, 1, 2, \dots)$ 若两相干波源的初相位相同, 即 $\varphi_2 = \varphi_1$ , 上述干涉条件可简化为 $\delta = r_2 - r_1 = \begin{cases} \pm k\lambda & \text{干涉加强} \\ \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{干涉减弱} \end{cases}$ $(k=0, 1, 2, \dots)$ 式中, $\delta = r_2 - r_1$ 为两列波的波程差.	(1) 两相干波源的相位差 $\Delta\varphi$ 决定叠加区域合振幅的大小. (2) 此干涉条件对电磁波(光波)同样适用, 在波动光学中将直接应用

例 3 如图 10-7 所示, 两个相干波源 A 和 B, 它们振动的频率为  $\nu = 100 \text{ Hz}$ , 当 A 处出现波峰时, B 处出现波谷, 波速  $v = 10 \text{ m/s}$ , 求介质中 P 点干涉的结果.

解 P 点的干涉结果由相位差  $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B - \frac{2\pi}{\lambda}(r_A - r_B)$  决定.

由题意知

$$\varphi_A - \varphi_B = \pi$$

波长 
$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{10}{100} = 0.1(\text{m})$$

$$r_A = 15(\text{m}), r_B = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25(\text{m})$$

故得  $\Delta\varphi$  是  $\pi$  的奇数倍, 因此 P 点干涉的结果是振动减弱.

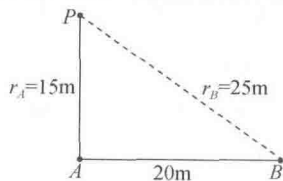


图 10-7

## 九. 驻波

### 1. 驻波的形成

当两个列振动振幅相同、波速相同的相干波, 在同一直线上沿相反方向传播时, 相干叠加形成一种特殊形式的振动现象——驻波.

### 2. 驻波的方程

设两个平面简谐波为  $y_1 = A\cos(2\pi\nu t - 2\pi x/\lambda + \varphi_1)$ ,  $y_2 = A\cos(2\pi\nu t + 2\pi x/\lambda + \varphi_2)$ , 叠加后  $y =$

$y_1 + y_2$ , 则驻波方程为

$$y = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cos\left(2\pi\nu t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)$$

若  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , 驻波方程为

$$y = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cos(2\pi\nu t)$$

### 3. 驻波特点

(1) 由  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  的驻波方程知,  $x$  给定时, 则驻波方程变成了坐标为  $x$  处质点的振动方程, 振幅为  $2A \left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|$ , 不同点振幅不同.

(2) 当振幅  $2A \left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 0$  时,  $x$  所对应的质点始终不动, 这些点移交为波节. 当  $\left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 1$  时,  $x$  所对应的质点振动最强, 这些点称为波腹. 相邻两个波节或相邻两个波腹的间距为  $\frac{\lambda}{2}$ .

(3) 驻波中各点相位  $2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} > 0$  时, 所对应的各点振动相位均为  $2\pi\nu t$ .

$2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} < 0$  时,  $x$  所对应的各点振动相位均为  $(2\pi\nu t + \pi)$

由于相邻波节间  $2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$  同号, 所以相邻波节间各点振动相同, 即相邻波节之间各点的振动步调一致, 同时到达最大位移处, 同时到达平衡位置处.

由于一个波节两边  $2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$  异号, 所以一个波节两边质点振动相位反. 波节两边质点反方向同步振动, 同时到达正负最大位移处, 同时到达平衡位置处.

(4) 驻波每时都有一定波形, 波形不传播, 是一种特殊形式的振动, 它不传播能量. 能量在相邻波腹与波节间来回流动, 通过其中任一波节的净能流密度为零.

### 4. 简正模式

在两端固定的弦线中形成稳定的驻波的振动方式, 固定端一定为波节. 又因相邻波节的间距为  $\lambda/2$ , 故必有弦线长  $l = n \frac{\lambda_n}{2}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  所以, 只有波长  $\lambda_n = \frac{2l}{n}$  (即频率  $\nu_n = n \frac{u}{2l}$ ) 的波才能在该弦线上形成驻波.

### 5. 半波损失

当弹性波从一种介质垂直入射到另一种介质, 又反射回第一种介质时, 在反射处形成波节或形成波腹, 如图 10-8 所示, 在两种介质分界面上形成波节, 表明入射波和反射波在上处的位相相反, 即相差  $\pi$ , 因为波线上相差半个波长  $\frac{\lambda}{2}$  的两点, 其位相相差  $\pi$ , 所以波从密介质反射回到疏介质时, 相

当于损失了半个波长, 这种现象称为半波损失.

小结: 驻波

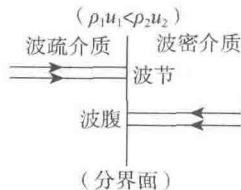


图 10-8

名称	内容	说明
驻波	驻波是由振幅、频率、传播速度都相同的两列相干波,在同一直线上沿相反方向传播时叠加而成的一种特殊的干涉现象	
驻波方程	设形成驻波的两列相干波(初相位为零)为 $y_1 = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ $y_2 = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$ 叠加后形成的驻波方程为 $y = y_1 + y_2 = \left( 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \cos \frac{2\pi}{T} t$	驻波具有波动的某些共性,各质点位移的分布具有空间周期性,各质点的振动具有时间周期性,但它既不传播振动状态,也不传播能量,驻而不行,这是驻波区别于行波之处.驻波实际上是介质中的全部质点都在作一种特殊形式的振动
驻波的特点	(1)介质中各质点的振幅随位置 $x$ 按余弦规律变化,即 驻波振幅: $\left  2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right $ 波腹的位置为 $x = \pm k \frac{\lambda}{2} (k=0, 1, 2, \dots)$ 波节的位置为 $x = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{4} (k=0, 1, 2, \dots)$ 相邻波腹(或波节)之间的距离为 $\lambda/2$ . (2)波节两侧质点振动的相位相反,两相邻波节之间的质点振动相位相同. (3)驻波的能量不断地在波节和波腹之间转换,能流为零,即能量没有定向移动,不向外传播	此处波腹、波节的位置不是普遍规律,只适用于两个初相位都为零的行波叠加而成的驻波.但相邻波腹(或波节)之间的距离为 $\lambda/2$ 具有普遍性
半波损失	反射波与入射波在界面上存在相位差 $\pi$ 的跃变,相当于波在反射时损失(或增加)了半个波长的波程,这种现象称为半波损失	产生半波损失的条件:波由波疏介质入射到波密介质的界面上反射时.

例4 两列波长均为  $\lambda$  的相干简谐波,分别通过图 10-9 所示的点  $O_1$  和  $O_2$ ,通过点  $O_1$  的简谐波  $M_1M_2$  平面反射后,与通过点  $O_2$  的简谐波在点  $P$  相遇.假定在  $M_1M_2$  平面反射时半波损失,  $O_1$  和  $O_2$  两点振动方程分别为

$$y_{10} = A \cos(\pi t), y_{20} = A \cos(\pi t),$$

且  $|O_1m| + |mP| = 8\lambda$ ,  $|O_2P| = 3\lambda$ . 试求:

(1) 两列波列分别在点  $P$  引起的振动方程;

(2) 点  $P$  的振动方程, (不考虑能量吸收).

解 (1) 两列波在点  $P$  引起的振动方程分别为

$$y_1 = A \cos \left( \pi t - \frac{2\pi}{\lambda} \times 8\lambda + \pi \right) = A \cos(\pi t - \pi).$$

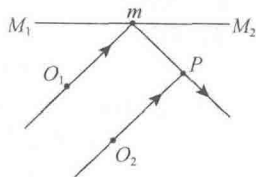


图 10-9

$$y_2 = A \cos \left( \pi t - \frac{2\pi}{\lambda} \times 3\lambda \right) = A \cos(\pi t).$$

(2) 两个分振动的相位差  $\Delta\varphi = \pi$ , 所以点  $P$  的合振幅  $A = 0$ , 点  $P$  的振动方程为  $y = 0$ .

例 5 入射波方程为  $y = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$ , 在  $x = 0$  处的自由端反射, 无振幅损失, 求: (1) 反射波的波方程; (2) 形成驻波方程.

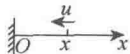


图 10-10

解 入射波方程  $y_1 = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$ , 入射波  $x$  处与反射波  $x$  处几何路径差为  $2x$ , 如图 10-10 所示. 反射波  $x$  振动与入射波  $x$  处振动几何上落后的相位  $\frac{2\pi}{\lambda} \times 2x$ , 反射点为自由端, 无半波损失.

(1) 振幅没有损失. 反射波方程  $y_2 = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) - \frac{4\pi}{\lambda} x \right]$ , 即

$$y_2 = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \text{ (SI)}$$

(2) 驻波方程为

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos(2\pi x / \lambda) \cos \left( 2\pi \frac{t}{T} \right) \text{ (SI)}$$

## 十、多普勒效应

当波源和接收器均相对于介质静止时, 波源振动频率  $\nu_s$ 、波的频率  $\nu$  (即传播介质质元的振动频率) 和接收器接收到的频率  $\nu_r$ , 三者自然相等, 当波源、介波源、介质和接收器彼此存在相对运动时, 三者却并不相同, 接收器接收到的频率有赖于波源或观察者运动的现象, 称为多普勒效应, 当波源和接收器相向运动时, 接收器收到的频率为

$$\nu_r = \frac{u + v_r}{u + v_s} \nu_s.$$

当波源和接收器彼此离开时, 接收器接收到的频率为

$$\nu_r = \frac{u - v_r}{u + v_s} \nu_s.$$

式中,  $u$  为介质中波的传播速度;  $v_r$  为接收器的运动速度;  $v_s$  为波源的运动速度, 如果波源和接收器是沿着它们连线的垂直方向运动的, 则有  $v_r = v_s$ , 即没有多普勒效应发生. 如果波源和接收器的运动是任意方向的速度分量就可以了, 这种情况下接收器收到的频率将随时间变化而发生变化, 这是不难理解的.

小结 1:

如果波源和观察者在同一直线上运动, 多普勒频移的公式为

(1) 波源不动, 观察者相对介质从速度  $v_0$  运动  $\nu' = \frac{u \pm v_0}{u} \nu$

(2) 观察者不动, 波源相对介质从速度  $v_s$  运动  $\nu' = \frac{u}{u \mp v_s} \nu$

(3) 波源与观察者同时相对介质运动  $\nu' = \frac{u \pm v_0}{u \mp v_s} \nu$

小结 2:

名称	内容	说明
多普勒效应	<p>在介质中,当波源与观察者在二者连线上有相对运动时,观察者接收到的频率与波源频率不同的现象,称为多普勒效应.</p> $v' = \frac{u+v_0}{u \mp v_S} v$ <p>式中, <math>u</math> 为波在介质中的传播速度, <math>v</math> 和 <math>v'</math> 分别是波源的频率和观察者接收到的频率, <math>v_0</math> 和 <math>v_S</math> 分别为观测者和波源相对介质的速度</p>	<p>当波源与观察者相互靠近时取上面一组符号(<math>v_0</math> 前取正号, <math>v_S</math> 前取负号),当波源与观察者相互远离时,取下面一组符号</p>

## ■ 十一、平面电磁波

### 1. 电磁波的产生与传播

(1) 电磁波的传播速度  $v$  与介质的介电常数  $\epsilon$  和磁导率  $\mu$  的关系为:

$$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$$

(2) 平面电磁波的波函数  $E = E_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) = E_0 \cos(\omega t - kx)$

$$H = H_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) = H_0 \cos(\omega t - kx)$$

### 2. 电磁波的基本性质

(1) 电磁波是横波.

(2)  $E$  和  $H$  同相位.

(3)  $E$  和  $H$  幅值成比例, 即  $\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  或  $\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$

(4) 真空中电磁波的传播速度等于真空中的光速.

### 3. 电磁波的能量

电磁场具有能量, 以电磁波的形式传播出去的能量, 称为辐射能.

电磁波的能量密度矢量, 即坡印廷矢量

$$S = E \times H$$

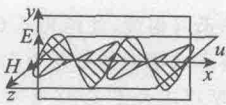
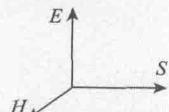
平面电磁波能流密度的平均值为:

$$S = \frac{1}{2} E_0 H_0$$

### 4. 电磁波谱

电磁波的范围很广, 波长没有上下限, 为了便于比较, 人们按照它们的波长(或频率)大小依次排列成表, 叫做电磁波谱.

小结:

名称	内容	说明
电磁波	变化的电场和变化的磁场不断地交替激发,以有限的速度在空间传播,从而形成电磁波. 平面电磁波的波动方程 $E = E_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$ $H = H_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$	开放型的 LC 振荡电路可以发射电磁波.
电磁波的性质	(1)电磁波是横波,电场强度 $E$ 、磁场强度 $H$ 与波的传播方向 $u$ 三者互相垂直,且 $E \times H$ 的方向与波的传播方向成右螺旋关系. (2) $E$ 和 $H$ 都作周期性变化,且频率相同,相位相同. (3) $E$ 和 $H$ 的大小在数值上成比例,有 $\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$ (4)电磁波传播的速度为 $u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$	
电磁波的能量	电磁波能流密度矢量也叫坡印廷矢量,即 $S = E \times H$	

## 考研真题解析

- 1 如图 10-11 所示,一平面简谐波沿  $x$  轴正方向传播,已知  $P$  点的振动方程为  $y = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ ,则波动方程为( )

A.  $y = A \cos \left( \omega \left( t - \frac{(x-l)}{u} \right) + \varphi_0 \right)$

B.  $y = A \cos \left( \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right)$

C.  $y = A \cos \left( t - \frac{x}{u} \right)$

D.  $y = A \cos \left( \omega \left( t + \frac{(x-l)}{u} \right) + \varphi_0 \right)$

(北京理工大学 2002 的攻读硕士学位研究生入学考试试题)

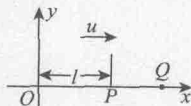


图 10-11

解 在  $x$  轴取任意点  $Q$ , 其平衡位置为  $x$ . 由于波沿轴正方向传播, 则  $Q$  点的振动相对  $P$  点时间差为  $\Delta t = \frac{x-l}{u}$ , 所以应选 A.

2 在驻波中,两个相邻波节间各质点的振动为( ).

- A. 振幅相同,相位相同      B. 振幅不同相位相同  
C. 振幅相同,相位不同      D. 振幅不同,相位不同

(华南理工大学 2005 年攻读硕士学位研究生入学考试试题)

解 在驻波中,两相邻波节之间的质元振动相位相同,振幅不等,所以应选 B.

3 图 10-12 所示为  $t=0$  时刻,以余弦函数表示的沿  $x$  轴正方向传播的平面谐波波形,则  $O$  点处质点振动的初相是\_\_\_\_\_.

(中国科学院研究生院 2007 年硕士学位研究生入学考试试题)

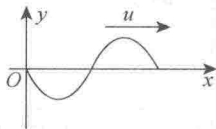


图 10-12

解 由图看出, $t=0$  时刻  $O$  点处质点经过平衡位置且向正方向运动,所以振动的初相是  $3\pi/2$ .

4 一平面简谐波,波速为  $6.0 \text{ m/s}$ ,振动周期为  $0.1 \text{ s}$ ,则波长为\_\_\_\_\_.在波的传播方向上,有两质点的振动相位差为  $5\pi/6$ ,此两质点相距为\_\_\_\_\_.

(北京理工大学 2002 年攻读硕士学位研究生入学考试试题)

思路分析 由波速、波长、周期关系式可求得波长,而由  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$  可求得两质点的距离.

解 (1)

$$u = 6 \text{ m/s}, T = 0.1 \text{ s}$$

$$\lambda = uT = 0.6 \text{ m}$$

(2)

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\pi} \Delta\varphi = \frac{0.6}{2\pi} \times \frac{5\pi}{6} = 0.25 \text{ m}$$

5 频率为  $500 \text{ Hz}$  的波,其波速为  $350 \text{ m/s}$ ,求:(1)相位差  $\pi/3$  的两质点间距离为多远?

(2)在某点,时间间隔为  $10^{-3} \text{ s}$  的两个位移,其相位差为多大?

(同济大学 2000 年攻读硕士学位研究生入学考试试题)

思路分析 同上题,由波速、波长、周期关系式可求得波长,而由  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$  可求得两质点的距离.

解  $u = 350 \text{ m/s}, v = 500 \text{ Hz}$

$$\lambda = u/v = \frac{350}{500} = 0.7 \text{ m}$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\pi} \Delta\varphi = \frac{0.7}{2\pi} \Delta\varphi = \frac{0.7}{2\pi} \times \frac{\pi}{3} = \frac{0.7}{6} \text{ m}$$

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t = 2\pi v\Delta t = 2\pi \times 500 \times 10^{-3} = \pi$$

6 已知平面简谐波的方程为  $y = A\cos(Bt - Cx)$ ,式中  $A, B$  和  $C$  为正常量.写出此波的波长和波速的表达式,并求出在波的传播方向上相距为  $d$  的两点的相位差.

(浙江大学 2006 年攻读硕士学位研究生入学考试试题)

思路分析 将波动表达式的标准形式与已知方程比较,可求得波速、波长;由  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$  可求得相距为  $d$  的两点的相位差.

解 (1)由波动表达式标准形式  $y = A\cos(\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi)$

与已知波动表达式  $y = A\cos(Bt - Cx)$

$$= A \cos \left( B \left( t - \frac{Cx}{B} \right) \right)$$

$$= A \cos \left( B \left( t - \frac{x}{B/C} \right) \right) \quad (\text{SD})$$

比较知:

$$\omega = B, v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{B}{2\pi}$$

$$u = \frac{B}{C}, \lambda = \frac{u}{v} = \frac{B/C}{B/2\pi} = \frac{2\pi}{C}$$

$$(2) \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = \frac{2\pi}{2\pi/C} d = Cd$$

**思路总结** 由波动表式求振幅、波速度、频率等,只需将其转化成标准形式对比,即可方便求得。

- 7 已知波源的振动曲线如图 10-13 所示,并已知该波的传播速度为 10 m/s,且沿  $x$  轴正方向传播,求:(1)波源的振动表达式;  
(2)取波源为坐标原点,写出该波的波动表达式。  
(浙江大学 2005 年攻读硕士学位研究生入学考试试题)

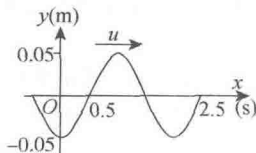


图 10-13

**思路分析** 由波源的振动曲线求波源的振动表达式,即求振幅、频率和初相位。

**解** (1)由波源的振动曲线知

$$A = 0.05 \text{ m}, T = 2 \text{ s}, \varphi = \pi$$

则  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ , 所以波源的振动表达式为

$$y_0 = A \cos(\omega t + \varphi) = 0.05 \cos(\pi t + \pi)$$

(2)知道了波源的振动表达式,则  $x$  处质点在任一时刻  $t$  的位移即为波动表达式

$$y = A \cos \left( \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right) = 0.05 \cos \left( \pi \left( t - \frac{x}{10} \right) + \pi \right)$$

**思路总结** 求波动表达式实质是先求出波源的振动表达式,然后根据相位延迟写出其波动表达式。

- 8 波长为  $\lambda$  的简谐波沿  $Ox$  轴正方向传播,在  $x = \frac{1}{2}\lambda$  的  $P$  点处质点的振动方程是  $y_P = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega t - \frac{1}{2} \cos \omega t \right) \times 10^{-2}$ , 求该简谐波的表达式。

(华南理工大学 2005 年攻读硕士学位研究生入学考试试题)

**思路分析** 由  $P$  处质点的振动方程求出波源的振动表达式,然后可直接写出波动表达式。

**解** 由  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}, \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$ , 则

$$y_P = \left( \cos \frac{\pi}{6} \sin \omega t - \sin \frac{\pi}{6} \cos \omega t \right) \times 10^{-2}$$

$$= 10^{-2} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{6} \right)$$



又  $P$  点在  $O$  点右边, 且  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{2} = \pi$

所以  $O$  点的振动表达式为

$$\begin{aligned} y_O &= 10^{-2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6} + \pi\right) = 10^{-2} \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right) \\ &= 10^{-2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

简谐波的波动表达式为

$$y = 10^{-2} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\pi}{3}\right)$$

**思路总结** 同上, 求波动表达式实质是先求波源的振动表达式, 然后根据相位延迟写出波动表达式。

8 (中国电子科技大学) 横波以波速  $u$  沿  $x$  轴负方向传播,  $t$  时刻波形曲线如图 10-14 所示, 则该时刻( )

- A.  $A$  点振动速度大于零  
C.  $C$  点下运动

- B.  $B$  点静止不动  
D.  $D$  点振动速度小于零

解 答案为 D.

波在传播的过程中, 先振动的质元带动后振动的质元, 即“下游”的质元总是追随“上游”的质元运动。  $A$  点质元将向下运动, 振动速度小于零,  $A$  错误;  $B$  点质元将向下运动振动, 振动速度小于零,  $B$  错误;  $C$  点质元将向上运动,  $C$  错误;  $D$  点质元将向下运动, 振动速度小于零,  $D$  正确。

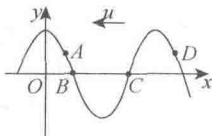


图 10-14

**思路总结** 在解决曲线上某点运动方向的问题中, 一定要分清给定的是质点振动曲线( $y-t$  曲线), 还是波传播的波形图( $y-x$  曲线), 并且若给定的是波形图, 一定要先判断波的传播方向。

10 (南京航空大学) 一弦按下列方程振动  $y = 0.5 \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) \cos(40\pi t)$ , 式中各量均采用国际单位制。求: (1) 振幅与波速各为多少的两个分波的叠加才能产生上述振动? (2) 相邻两波节之间的距离为多大? (3) 在  $x = 3.0 \text{ m}$  处, 当  $t = \frac{9}{8} \text{ s}$  时, 弦上质点的速度多大?

解 (1) 已知振动方程  $y = 0.5 \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) \cos(40\pi t)$ , 与驻波方程  $y = 2A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cos(2\pi \nu t)$  比较可得,

振幅  $A = 0.25 \text{ m}$ , 波长  $\lambda = 6 \text{ m}$ , 频率  $\nu = 20 \text{ Hz}$ , 波速  $u = \lambda \nu = 120 \text{ m/s}$ 。

(2) 相邻两波节之间的距离  $\Delta x = \lambda/2 = 3 \text{ m}$ 。

(3) 弦上质点的速度  $v = \frac{\partial y}{\partial t} = -20\pi \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) \sin(40\pi t)$ 。在  $x = 3.0 \text{ m}$  处, 当  $t = \frac{9}{8} \text{ s}$  时, 弦上质点的速度

$$v = -20\pi \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) \sin(40\pi t) \bigg|_{\substack{t=\frac{9}{8} \\ x=3}} = 0$$

**思路总结** 驻波的相邻两波节(或相邻两波腹)之间的间距是半个波长. 介质中任一点的振动速度为  $v = \frac{\partial y}{\partial t}$ .

- 11 (华南理工大学) 如图 10-15(a) 所示, 一平面简谐波沿  $Ox$  的负方向传播, 波速大小为  $u$ , 若  $P$  处介质质点的振动方程为  $y_P = A \cos(\omega t + \varphi)$ : 求 (1) 处质点的振方程; (2) 该波的波动表达式; (3) 与  $P$  处质点振动状态相同的那些点的位置.

解 已知  $P$  处介质质点的振动方程为  $y_P = A \cos(\omega t + \varphi)$ , 平面简谐波沿  $Ox$  轴的负方向传播, 则任一点  $x$  处质点的振动将超前  $P$  处质点的振动, 如图 10-15(b) 所示, 超前的时间间隔为  $\Delta t = \frac{x+L}{u}$ , 则波的波动方程为

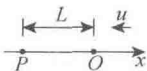


图 10-15(a)

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x+L}{u} \right) + \varphi \right]$$

- (1)  $O$  处  $x=0$ ,  $O$  处质点的振动方程为

$$y_O = A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{L}{u} \right) + \varphi \right]$$

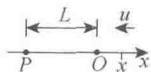


图 10-15(b)

- (2) 该波的波动表达式为

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x+L}{u} \right) + \varphi \right]$$

- (3) 与  $P$  处质点振动状态相同的那些点的相位与  $P$  处质点振动相同, 则  $\Delta\varphi = \left[ \omega \left( t + \frac{x+L}{u} \right) + \varphi \right] - [\omega t + \varphi] = \omega \frac{x+L}{u} = 2k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \dots$ , 与  $P$  处质点振动状态相同的那些点的位置  $x = -L + 2k\pi \frac{u}{\omega}, k = \pm 1, \pm 2, \dots$

**思路总结** 在平面简谐波的传播过程中, 沿着波线的方向上, 振动状态相同的那些点的相位相同, 其间距离正好是波长的整数倍.

## 课后习题

- 10-1 **解题过程** 图(a)描述的是连续介质中沿波线上许多质点振动在  $t$  时刻的位移状态. 其中原点处质点位移为零, 其运动方向由图中波形状态和波的传播方向可以知道是沿  $y$  轴负向, 利用旋转矢量法可以方便地求出该质点振动的初相位为  $\pi/2$ . 而图(b)是一个质点的振动曲线图, 该质点在  $t=0$  时位移为 0,  $t>0$  时, 由曲线形状可知, 质点向  $y$  轴正向运动, 故由旋转矢量法可判知初相位为  $-\pi/2$ , 答案为(D).

- 10-2 **解题过程** 由于机械波振动通用式  $y = A \cos(\omega x \pm \varphi)$  所以由此可知  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$ , 所以本题选(C).

- 10-3 **解题过程** 由上题分析知(A)、(B)表达式不正确. 直接将  $t=T/4, x=0$  代入方程, 那么对(C)有  $y_0=A$ , 对(D)有  $y_0=0$ , 可见(D)的结果与图一致.

**10-4 解题过程** 要两相干波在  $\beta$  点的干涉场大的条件是  $\Delta\varphi=2k\pi$ , 两相干波源的相位差由选项可以看出只有(D)符合, 所以本题选(D).

**10-5 解题过程** 根据驻波的特征, 可以判断两个相邻波节间各质点的振动振幅不同, 但它们的相位相同, 本题选(B).

**10-6 选 C**

**知识点窍** 驻波  $y=2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \nu t$

**逻辑推理** 驻波波节两边质点, 振动反相, 对称点位置质元振幅相等.

**10-7 解题过程** 根据驻波的特征, 可以判断两个相邻波节间各质点的振动振幅不同, 但它们的相位相同, 本题选(B).

**10-8 逻辑推理** 机械波在介质中的传播速度由介质的性质决定, 对于固体内的纵波有:  $u=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ , 再由波长、波速、频率三者之间的关系式  $\lambda=\frac{u}{\gamma}$  即可求出波长.

**解题过程** 金属棒中纵波的速度  $u=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$  ①

由波长公式  $\lambda=\frac{u}{\gamma}$  ②

将①式代入②式得  $\lambda=\frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{E}{\rho}}=0.40\text{m}$

**10-9 知识点窍** 波函数的一般式:  $y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$

**逻辑推理** (1) 将给定波动方程写成一般形式, 通过比较确定各特征量, 这是一种比较常用且简便的解题方法.

(2) 振动速度是指质点的运动速度, 可由  $\frac{dy}{dt}$  求解.

(3) 将不同时刻的  $t$  值代入方程便可得到不同时刻的波形方程  $y=y(x)$ , 便可得到该位置处质点的运动方程  $y=y(t)$ , 从而作出振动图.

**解题过程** (1) 由  $y=0.2\cos(2.5\pi t-\pi x)]=0.2\cos[2.5\pi(t-\frac{x}{2.5})]$

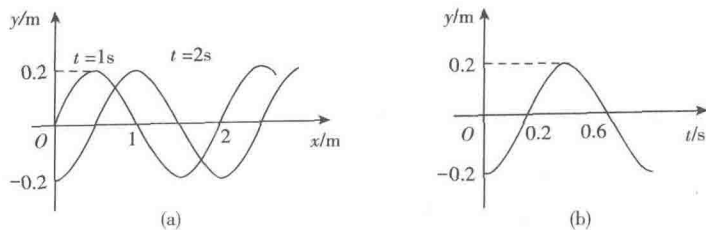
可以看出  $A=0.2\text{m}; u=2.5\text{m}\cdot\text{s}^{-1};$

$$f=\frac{1}{T}=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\omega}{2\pi}=1.25\text{Hz}; \lambda=\frac{u}{f}=2\text{m}$$

(2)  $v=\frac{dy}{dt}=-0.2\sin(2.5\pi t-\pi x)\cdot 2.5\pi=-0.5\pi\sin(2.5\pi t-\pi x)$

当  $\sin(2.5\pi t-\pi x)=1$  时,  $v_{\text{max}}=0.5\pi=1.57\text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$

(3) 如图解 10-9



图解 10-9

讨论:波形图表示某确定时刻波线上各点的位移情况,振动图表示某确定位置一个质点的位移随时间变化情况。

10-10 **知识点窍** 振动方程的一般式:  $y = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

波动方程的一般式:  $y = A \cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$

波长、波速、周期的关系:  $\lambda = uT$

**逻辑推理** 将已知波源的振动方程与一般式比较,求出  $A$ 、 $\omega$ 、 $\varphi_0$  这 3 个量与波动方程中的 3 个量是相同的. 再利用  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  及  $\lambda = uT$  即可求解。

**解题过程** (1) 由已知波源的运动方程可知

$$\omega = 240\pi \text{ s}^{-1}, A = 4.0 \times 10^{-3} \text{ m}, \varphi_0 = 0$$

$$\text{所以波的周期为 } T = \frac{2\pi}{\omega} = 8.33 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$\text{波长为 } \lambda = uT = 0.25 \text{ m}$$

(2) 波源运动方程中的  $\omega$ 、 $A$ 、 $\varphi_0$  就是波函数中的对应量。

$$\begin{aligned} \text{所以,波动方程为 } y &= A \cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0] \\ &= 4.0 \times 10^{-3} \times \cos[240\pi t - 8\pi x] \end{aligned}$$

10-11 **知识点窍** 波动方程  $y = A \cos[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi]$

**逻辑推理** 波线上不同两点的相位差的计算方法为:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta x}{\lambda} \cdot 2\pi = \frac{\omega}{u} \Delta x$$

根据  $A$  的波动方程可以求出波动方程的振幅  $A$  和圆频率  $\omega$ .  $u$  是为已知的.  $\varphi_A = \pi$ . 可以写出以  $A$  为原点的波动方程, 以  $B$  为原点的波动方程只需使相位改变  $\Delta\varphi$  即可。

**解题过程** (1) 由  $A$  的振动方程可以得到:

$$A = 3 \times 10^{-2} \text{ m}, \omega = 4\pi \text{ rad/s}, \varphi_A = \pi$$

又  $u = 20 \text{ m/s}$ , 且波沿着  $x$  轴的负方向传播

所以  $y = 3 \times 10^{-2} \cos[4\pi(t + \frac{x}{20}) + \pi]$  即为所求的波的表达式。

$$(2) \varphi_B = \varphi_A - \Delta\varphi = \varphi_A - \frac{\omega \Delta x}{u} = 0$$

故以  $B$  为原点的波动方程为:

$$y = 3 \times 10^{-2} \cos[4\pi(t + \frac{x}{20})]$$

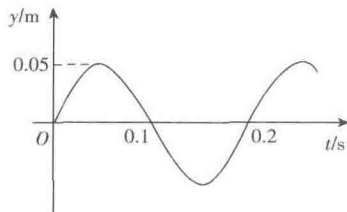
**10-12 知识点窍** 波动方程的一般式:  $y = A \cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$

波长、周期、波速的关系:  $\lambda = uT$

频率与角频率的关系:  $\gamma = \frac{\omega}{2\pi}$

**逻辑推理**

将给定的波动方程与一般式比较,即可得到振幅、角频率和波速,进而求出频率、周期和波长。当  $x$  确定时,波动方程反映的是确定质点的运动方程  $y = y(t)$ 。



图解 10-12

**解题过程**

(1) 将已知波动方程写成一般形式

$$y = 0.05 \cos[10\pi(t - \frac{x}{5\pi}) - \frac{\pi}{2}]$$

与一般式比较可得

$$\text{波速: } u = 5\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 15.7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \text{角频率: } \omega = 10\pi \text{ s}^{-1}; \text{频率: } \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 5.0 \text{ Hz};$$

$$\text{周期: } T = \frac{1}{\nu} = 0.2 \text{ s}; \text{波长: } \lambda = uT = 3.14 \text{ m}.$$

(2) 当  $x = 0$  时, 方程  $y = 0.05 \cos[10\pi t - \frac{\pi}{2}]$  表示位于坐标原点的质点的运动方程

如图解 10-12 所示。

**10-13 知识点窍** 波动方程的一般式:  $y = A \cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$

$$\text{角频率公式: } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{波长公式: } \lambda = uT$$

**逻辑推理**

(1) 由波源处质点运动的初始条件及给定的状态参量求出波动方程, 将确定点的坐标代入波动方程, 即可得到质点的运动方程及相应的初相位。

(2) 由波长的物理意义可知波线上任意两点间的相位差为  $\Delta\varphi = 2\pi\Delta x/\lambda$ 。

**解题过程**

$$(1) \text{ 由题给条件可得 } \omega = \frac{2\pi}{T} = 100\pi \text{ s}^{-1}, \lambda = uT = 2 \text{ m}$$

$$\text{波源的初相为 } \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \text{ (或 } \frac{3}{2}\pi \text{)}$$

以波源为坐标原点, 则波动方程为

$$y = A \cos[100\pi(t - \frac{x}{100}) - \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{当 } x_1 = 15.0 \text{ m 时, } y_1 = A \cos[100\pi t - 15.5\pi], \text{ 初相位 } \varphi_1 = -15.5\pi.$$

$$\text{当 } x_2 = 5.0 \text{ m 时, } y_2 = A \cos[100\pi t - 5.5\pi], \text{ 初相位 } \varphi_2 = -5.5\pi.$$

$$\text{(若波源初相取 } \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}, \text{ 则 } \varphi_1 = -13.5\pi, \varphi_2 = -3.5\pi \text{)}$$

(2) 距波源 16.0 m 和 17.0 m 两点间的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} = \pi$$

10-14 知识点窍 波动方程  $y = A\cos[\omega(t \mp x/u) + \varphi_0]$

解题过程 根据简谐波运动的规律可以知

$$(a) \text{中:} \quad y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

$$(b) \text{中:} \quad y = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

$$(c) \text{中:} \quad y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi + \frac{\omega l}{u}\right]$$

即根据这三个方程可描述这三个图的运动情况。

10-15 知识点窍 沿  $x$  轴负向传播的波动方程:  $y = A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) + \varphi_0]$

波速与波长、频率的关系:  $u = \lambda\gamma$

逻辑推理 (1) 由波形图可得出波长  $\lambda$ 、振幅  $A$ , 进而可求出  $u = \lambda\gamma$ .

再由  $P$  点的运动方向可判断波沿  $x$  轴负向传播, 结合图中  $t=0$  时,  $x = \frac{1}{2}A$  可

得初相  $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ , 从而写出波动方程.

(2) 将  $x = 7.5\text{m}$  代入方程可得该处质点的运动方程,  $t=0$  时, 该质点的速度由  $v =$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} \text{ 求得.}$$

解题过程 (1) 由题图可知:  $A = 0.10\text{m}$ ,  $\lambda = 20.0\text{m}$ , 则波速  $u = \lambda\gamma = 5.0 \times 10^3 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 角频率  $\omega = 2\pi\gamma = 500\pi \text{s}^{-1}$ .

根据  $t=0$  时, 点  $P$  向上运动, 可知波沿  $Ox$  轴负向传播且可判断位于原点  $O$  处的质点, 此时的速度向下, 由此可知其初相  $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ , 故波动方程为

$$\begin{aligned} y &= A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right] \\ &= 0.10\cos\left[500\pi\left(t + \frac{x}{5000}\right) + \frac{\pi}{3}\right] \end{aligned}$$

(2) 距原点  $O$  为  $x = 7.5\text{m}$  处质点的运动方程为

$$y = 0.10\cos\left[500\pi t + \frac{13}{12}\pi\right]$$

$t=0$  时, 该点的速度为

$$v = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = -50\pi \sin \frac{13}{12}\pi = 40.6\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

10-16 知识点窍 旋转矢量法,  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

解题过程 (1) 由图可以得出简谐波运动方程

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

$$A=0.04 \text{ m}, \varphi=-\frac{\pi}{2}, u=0.08 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{由题 } \lambda=0.40 \text{ m}, u=0.08 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{所以 } f=\frac{u}{\lambda}=0.2 \text{ Hz}$$

$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{0.2}=5 \text{ s}$$

$$\text{则 } \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{5}$$

$$\text{所以方程为 } y=0.04\cos\left[\frac{2\pi}{5}\left(t-\frac{x}{0.08}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

$$(2) P \text{ 点即 } x=0.2 \text{ 时, } y=0.04\cos\left[\frac{2\pi}{5}\left(t-\frac{0.2}{0.08}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=0.04\cos\left(\frac{2\pi}{5}t+\frac{\pi}{2}\right)$$

**10-17 知识点窍** 波动方程的一般式:  $y=A\cos[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi_0]$  (本题波沿  $x$  轴负向传播, 上式应取

“+”号). 波速与波长、周期的关系:  $u=\frac{\lambda}{T}$

**逻辑推理** 由简谐波波动方程根据题意求出各物理量.

**解题过程** 设此简谐波的波动方程为

$$y=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi_0] \quad (1)$$

$$v=-\frac{dy}{dt}=-A\omega\sin[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi_0] \quad (2)$$

由图(b)知

$$A=0.40 \text{ m}$$

当  $x=1.0 \text{ m}$  时,  $t=0$

$$\begin{cases} y=\frac{A}{2}, \\ v<0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{A}{2}=A\cos[\frac{\omega}{u}+\varphi_0], \\ v<0 \end{cases} \quad (3)$$

$$t=53 \text{ 时, } \begin{cases} y=0 \\ v>0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 0=A\cos[\omega(5+\frac{1}{u})+\varphi_0] \\ v>0 \end{cases} \quad (4)$$

又因为

$$u=\frac{\omega\pi}{2\pi}$$

$$\text{由③、④式及已知条件得 } \varphi_0=-\frac{\pi}{2}, \omega=\frac{\pi}{6} \text{ s}^{-1}, u=1.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{所以波动方程为 } y=0.40\cos\left[\frac{\pi}{6}\left(t+\frac{x}{1.0}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

**10-18 知识点窍** 波动方程:  $y=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi_0\right]$

**逻辑推理** 由波形图 I 可知振幅  $A$  和波长  $\lambda$ , 再由  $t=0$  时, 原点处质点的位移为零且向下运

动, 可知  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ .

由波形图 II 与波形图 I 的位置关系及传播方向可知波形图 II 对应的时间  $t = \frac{T}{4}$ , 由此确定周期  $T$ , 由此可写出波动方程.

**解题过程** 由图线 I 可知:  $\lambda = 2.0\text{m}$ ,  $A = 0.1\text{m}$ .  $t = 0$  时原点  $O$  处的质点的位移  $y_0 = 0$ , 且  $v_0 < 0$ , 据此知  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ .

由图线 II 相对图线 I 的位置关系及波沿  $x$  轴正向传播可知图线 II 对应的时间  $t = \frac{T}{4} + kT$ , 而  $t < T$ , 所以  $t = \frac{T}{4}$ , 即周期  $T = 4t = 0.4\text{s}$ .

所求波动方程为 
$$y = 0.10 \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{0.4} - \frac{x}{2.0} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

**10-19 知识点窍** 波动方程的一般式:  $y = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right]$

**逻辑推理** 将给定时间及质点坐标代入到相位角公式即可求出对应的相位. 两质点的相位差可由公式  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$  得到.

**解题过程** (1) 由波动方程  $y = 0.08 \cos(4\pi t - 2\pi x) (\text{m})$

可得任意质点  $P(x)$  在任意时刻  $t$  的相位为

$$\varphi = 4\pi t - 2\pi x$$

将  $t = 2.1\text{s}$  和  $x = 0$  代入上式可得波源处的相位为

$$\varphi_1 = 8.4\pi$$

将  $t = 2.1\text{s}$  和  $x = 0.1$  代入上式可得  $0.1\text{m}$  处的相位为

$$\varphi_2 = 8.2\pi$$

(2) 将已知波动方程与波动方程的一般式比较可知

$$\lambda = 1.0\text{m}$$

所以  $x_1 = 0.8\text{m}$  与  $x_2 = 0.3\text{m}$  两点间的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \pi$$

**10-20 知识点窍** 能流密度定义式:  $I = \frac{\bar{P}}{S}$

**逻辑推理** 由于波源提供的功率  $P$  恒定, 故对球面波而言, 单位时间内通过任意半径的球面的能量相同, 都等于波源消耗的功率  $\bar{P}$ , 而在同一球面上各处的能流密度相同, 因此在半径为  $r$  的球面上, 各处的能流密度均为  $I = \frac{\bar{P}}{S}$ , 式中  $S = 4\pi r^2$ .

**解题过程** 由球的对称性, 半径为  $r$  的球面处的能流密度为  $I = \frac{\bar{P}}{S} = \frac{\bar{P}}{4\pi r^2}$

当  $r_1 = 5.0\text{m}$  时,  $I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2} = 1.27 \times 10^{-2} \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$

当  $r_2 = 10.0\text{m}$  时,  $I_2 = \frac{P}{4\pi r_2^2} = 3.18 \times 10^{-3} \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$



**10-21 逻辑推理** (1)由题中给定的条件及  $\omega=2\pi\gamma$ , 利用公式:  $I=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$  可直接求出能流密度.

(2)考虑能流密度的物理意义可得能量的计算式  $W=IS\cdot\Delta t$ , 从而求出相应的能量.

**解题过程** (1)由能流密度公式并考虑  $\omega=2\pi\gamma$ , 可得

$$I=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u=\frac{1}{2}\rho A^2(2\pi\gamma)^2 u=1.58\times 10^5 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$$

(2)在时间间隔  $\Delta t=60\text{s}$  内垂直通过面积  $S=4.0\times 10^{-4}\text{m}^2$  的总能量为  
 $W=IS\cdot\Delta t=3.79\times 10^3 \text{ J}$

**10-22 知识点窍** 两相干波的相位差公式  $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}$

$$\text{波长公式: } \lambda=\frac{u}{v}$$

**逻辑推理** 两列波相遇时的相位差  $\Delta\varphi$  一般由两部分组成, 即它们的初相差  $(\varphi_2-\varphi_1)$  和它们的波程差引起的相位差  $\frac{2\pi\Delta r}{\lambda}$ .

**解题过程** 如图, 在直角三角形  $\triangle ABP$  中

$$BP=AP\sin 30^\circ=1.5\text{cm}$$

两列波在  $P$  点的波程差为

$$\Delta r=AP-BP=1.5\text{cm}$$

$$\text{波长 } \lambda=\frac{u}{v}=0.0167\text{m}$$

$$\text{所以相位差为 } \Delta\varphi=\frac{2\pi\Delta r}{\lambda}=1.8\pi$$

**10-23 知识点窍** 相干波相位差公式:  $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}$

$$\text{相干波合振幅公式: } A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

**逻辑推理** 两波源的初相相同, 故在  $R$  处的相位差

$$\Delta\varphi=2\pi\frac{\Delta r}{\lambda}$$

两波在  $R$  处干涉时的合振幅可直接由公式求出.

**解题过程** (1)两波在  $R$  处的相位差为  $\Delta\varphi=\frac{2\pi\Delta r}{\lambda}=3\pi$

(2)两波在  $R$  处干涉的合振幅为

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos 3\pi}=\sqrt{(A_1-A_2)^2}=|A_1-A_2|$$

**10-24 逻辑推理** 由两相干波的初相位及波程差可列出相遇各点的相位差  $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{\Delta r}{\lambda}$ . 再由干涉减弱条件  $\Delta\varphi=(2k+1)\pi$  就可得到因干涉而静止的总的位置.

**解题过程** 以线段  $AB$  的  $A$  点为原点, 建立  $Ox$  坐标如图(b)所示.

两波的波长均为:  $\lambda = \frac{u}{\gamma} = 4.0 \text{ m}$

两列波在直线 AB 上任意点 P 产生的相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A - 2\pi(r_B - r_A)/\lambda$$

若 P 点在 A 点的左侧, 则

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A - 2\pi(r_B - r_A)/\lambda = -14\pi$$

即在 A 点右侧各点,  $\Delta\varphi$  恒为  $2\pi$  的整数倍, 故干涉后处处加强无静止点.

若 P 点在 B 点的右侧, 则

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A - 2\pi(r_B - r_A)/\lambda = 16\pi$$

即在 B 点右侧也是处处加强, 无静止点.

若 C 点在 AB 两点间坐标为  $x$ , 则  $r_B = 15 - x$ ,  $r_A = 15 + x$ , 两列波在 C 点相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A - 2\pi(r_B - r_A)/\lambda = (x+1)\pi$$

干涉静止点应满足  $\Delta\varphi = (x+1)\pi = (2k+1)\pi$ ,

即  $x = 2km (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

由于  $x \leq 15 \text{ m}$ , 故  $k \leq 7$ , 所以  $k=0, \pm 1, \dots, \pm 7$ , 即在 A、B 连线共有 15 个静止点.

- 10-25 逻辑推理** 一束波被分成两束后再相遇, 将发生干涉现象, 由于这两束波相干涉, 具有相同的初相, 故其相位差  $\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta r}{\lambda}$ , 对比于干涉减弱条件  $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$ , 即可求出  $\Delta r$ .

**解题过程** 声波在 A 点被分成两束, 到 B 点相遇, 其相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = \frac{2\pi\Delta r}{\lambda}$$

由于干涉减弱条件

$$\Delta\varphi = (2k+1)\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\text{得 } \Delta r = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{按题意 } \Delta r_{\min} = \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u}{v} = 0.57 \text{ m}$$

- 10-26 逻辑推理** 知道波源 O 点的运动方程  $y = A\cos\omega t$ , 可以写出波沿 x 轴负向和正向传播的方程分别为  $y_1 = A\cos\omega(t - x/u)$  和  $y_2 = A\cos\omega(t + x/u)$ . 因此可以写出  $y_1$  在 MN 反射面上 P 点的运动方程. 设反射波为  $y_3$ , 它和  $y_1$  应是同振动方向、同振幅、同频率的波, 但是由于半波损失, 它在 P 点引起的振动和  $y_1$  在 P 点引起的振动反相. 利用  $y_1$  在 P 点的运动方程可求  $y_3$  在 P 点的运动方程, 从而写出反射波  $y_3$ . 在 O~MN 区域, 由  $y_1$  和  $y_3$ 、两列同频率、同振动方向、同振幅沿相反方向传播的波合成形成驻波. 在  $x > 0$  区域是同传播方向的  $y_2$  和  $y_3$  合成新的行波.

**解题过程** (1) 根据题意知, 沿左、右传播的波动方程为:

$$y_{\text{左}} = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right)\right] \text{ 和 } y_{\text{右}} = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right]$$

(2) 在 P 有两条反射波

$$\text{第一条为: } y_1 = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{3}{2}\pi\right)$$

第二条为:  $y_2 = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right)$

而由反射波的基本方程与上式可以看出初相位为  $-2\pi$ , 则反射波波动方程为:

$$y_3 = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi\right) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

(3) 在  $O \sim MN$  区域内形成驻波:

$$\begin{aligned} y_{\text{驻}} &= A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right) + A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \\ &= 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \end{aligned}$$

当  $\frac{2\pi}{\lambda}x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ , 即  $x = -\frac{\lambda}{4}$  和  $-\frac{3}{4}\lambda$  时为波节.

当  $\frac{2\pi}{\lambda}x = k\pi$ , 即  $x = 0$  和  $-\frac{\lambda}{2}$  时为波腹.

(4) 在  $x > 0$  区域内合成波的波动方程为:

$$y_{\text{合成}} = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) + A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

**10-27 知识点窍** 驻波方程的一般式:  $y = 2A \cos(2\pi \frac{x}{\lambda}) \cos(2\pi \gamma t)$  速度定义式:  $v = \frac{dy}{dt}$

**逻辑推理** 将给定的驻波方程与驻波方程的一般式进行比较, 即可求出振幅和波速; 由波节条件  $\cos(2\pi \frac{x}{\lambda}) = 0$  可求出相邻波节的距离; 由  $v = \frac{dy}{dt}$  可求出任意时刻任意点的速度.

**解题过程** (1) 将方程  $y = 3.0 \times 10^{-2} \times \cos 1.6\pi x \cos 550\pi t$  与驻波方程的一般式  $y = 2A \cos(2\pi \frac{x}{\lambda}) \cos(2\pi \gamma t)$  进行比较可得振幅  $A = 1.5 \times 10^{-2} \text{ m}$ , 波长  $\lambda = 1.25 \text{ m}$ , 频率  $\gamma = 275 \text{ Hz}$ , 波速  $u = \lambda \gamma = 343.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

(2) 相邻波节的距离为

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_{k+1} - x_k \\ &= [2(k+1) + 1] \frac{\lambda}{4} - (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{4} \\ &= \frac{\lambda}{2} = 0.625 \text{ m} \end{aligned}$$

(3)  $t = 3.0 \times 10^{-3} \text{ s}$  时, 位于  $x = 0.625 \text{ m}$  处质点的振动速度为

$$v = \frac{dy}{dt} = -16.5\pi \cos 1.6\pi x \sin 550\pi t = -46.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**10-28 知识点窍** 两个谐振振动合成的合振幅条件:

$$A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta \varphi}$$

**逻辑推理** 题目给出的两列波是在  $x$  轴上相向传播的两列频率相同、振幅相同的简谐波. 在  $x$  轴上叠加后将形成驻波.

注波方程:  $y = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \gamma t$

令合振幅  $A' = 12A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0.06$  即可求得  $x$ .

**解题过程** 将题设给出的波动表达式改写:

$$y_1 = 0.06 \cos \left[ 4\pi \left( t - \frac{x}{400} \right) \right]$$

$$y_2 = 0.06 \cos \left[ 4\pi \left( t + \frac{x}{400} \right) \right].$$

$$A = 0.06 \text{ m}, \omega = 4\pi \text{ rad/s}, u = 400 \text{ m/s}$$

$$\lambda = u \cdot \frac{2\pi}{\omega} = 200 \text{ m}$$

$$\text{又 } A' = |2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}| = 0.06 \text{ m}$$

$$\text{即有 } \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow 2\pi \frac{x}{\lambda} = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\text{得到 } x = 100 \left( k + \frac{1}{3} \right) \text{ m} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

**10-29 知识要点** 多普勒频率公式:  $\nu' = \frac{u}{u \mp v_s} \cdot \nu$  ①

式中:观察者不动,声源以  $v_s$  向观察者运动,取“—”号

观察者不动声源以  $v_s$  远离观察者,取“+”号

声源与观察者同时运动的多普勒频率公式

$$\nu' = \frac{(u \pm v_0) \cdot \nu}{u \mp v_s} \quad ②$$

式中:观察者向着波源运动,  $v_0$  取“+”号,反之取“—”号

波源向着观察者运动,  $v_s$  取“—”号,反之取“+”号

**逻辑推理** (1)观察者不动,警车驶近和远离时的频率可由多普勒频率公式①直接计算得出,但要注意  $v_s$  前的符号.

(2)警车追一辆车,即声源与观察者同时运动,可由公式②计算频率,但也需要注意符号的选取.

**解题过程** (1)警车驶近观察者时,观察者接收的频率为

$$\nu_1 = \frac{u}{u - v_s} \cdot \nu = 865.6 \text{ Hz}$$

警车远离观察者时,观察者接收的频率为

$$\nu_2 = \frac{u}{u + v_s} \cdot \nu = 743.7 \text{ Hz}$$

(2)警车与客车上的观察者同向运动时,观察者接收的频率为

$$\nu_3 = \frac{u - u_0}{u - v_s} \cdot \nu = 826.2 \text{ Hz}$$

**10-30 知识要点** 多普勒频率公式

**解题过程** (1)由多普勒效应可知:

$$u = 5.47 \times 10^3 \text{ km/h}, v_1 = 50 \text{ km/h}, v_2 = 70 \text{ km/h}, F = 1000 \text{ Hz}$$

$$\nu_Z = \frac{u+v_0}{u-v_s} \nu = \frac{5470+70}{5470-50} \times 10^3 = 1022 \text{ Hz.}$$

$$(2) \nu_{\text{甲}} = \frac{u+v_0}{u-v_0} \nu_Z = \frac{5470+50}{5470-70} \times 1022 = 1045 \text{ Hz.}$$

10-31 解题过程 如题 10-25 图所示:

(1) 由  $L = k\lambda_k/2$  和  $v_k = u/\lambda_k$  可得  $v_k = ku/2L$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ )

因此, 基频:  $\nu_1 = 1\,133 \text{ Hz}$  二次谐波:  $\nu_2 = 2\,267 \text{ Hz}$  三次谐波:  $\nu_3 = 3\,400 \text{ Hz}$

四次谐波:  $\nu_4 = 4\,533 \text{ Hz}$  五次谐波:  $\nu_5 = 5\,667 \text{ Hz}$

(2) 同样由  $L = (2k-1)\lambda_k/4$  和  $v_k = u/\lambda_k$  可得

$$v_k = (2k-1)u/4L \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

因此, 基频:  $\nu_1 = 567 \text{ Hz}$  二次谐波:  $\nu_2 = 1\,700 \text{ Hz}$  三次谐波:  $\nu_3 = 2\,833 \text{ Hz}$

四次谐波:  $\nu_4 = 3\,967 \text{ Hz}$  五次谐波:  $\nu_5 = 5\,100 \text{ Hz}$

10-32 知识点窍 平均能量密度公式  $\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$  角频率公式:  $\omega = 2\pi\gamma$

能流密度公式:  $I = \bar{w} \cdot u$

逻辑推理 由于题中给定  $\rho$ 、 $A$  及  $\gamma$ , 而  $\omega = 2\pi\gamma$ , 所以平均能量密度可直接由公式  $\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$  求出. 声强就是能流密度, 可由公式  $I = \bar{w} \cdot u$  得到.

解题过程 考虑  $\omega = 2\pi\gamma$ , 波在耳中平均能量密度为

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \rho A^2 (2\pi\gamma)^2 = 6.42 \times 10^{-6} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$$

声强(声波的能流密度)为

$$I = \bar{w}u = 2.18 \times 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

10-33 知识点窍 声强级定义式:  $L = \lg \frac{I}{I_0}$  ( $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ ) 声功率公式:  $\bar{P} = IS$

逻辑推理 由声强级定义式:  $L = \lg \frac{I}{I_0}$  可求出声波的能流密度  $I$ , 再由  $\bar{P} = IS$  求出传入窗内的“声功率”. 注意: 此处考虑窗户上各处的  $I$  相同.

解题过程 由题意知  $S = 1.0 \text{ m}^2$ ,  $L = 80 \text{ dB} = 8 \text{ B}$ ,  $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

根据声强的公式有:  $L = \lg \frac{I}{I_0}$

代入有  $8 = \lg \frac{I}{10^{-12}}$

所以  $I = 10^{-12} \cdot 10^8 = 10^{-4}$ .

则传入窗内的声功率为  $\bar{P} = IS = 10^{-12} \cdot 10^8 \cdot 1 = 1.0 \times 10^{-4} \text{ W}$

10-34 知识点窍 能流密度(声强)公式:  $I = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u$  声强级定义式:  $L = \lg \frac{I}{I_0}$

逻辑推理 在同一介质中传播的两声波, 即  $\rho$ 、 $u$  相同, 题中已知  $A$  相等, 由公式  $I = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u$  可

得声强的比为:  $\frac{I_1}{I_2} = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}$ . 两声波声强级的差由定义式  $L = \lg \frac{I}{I_0}$  即可求得.

**解题过程** (1) 根据声强有:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{1}{2} \rho_1 A_1^2 \omega_1^2 u_1}{\frac{1}{2} \rho_2 A_2^2 \omega_2^2 u_2} = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = 9$$

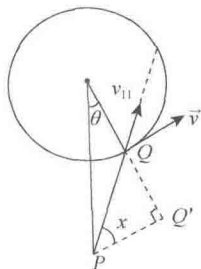
$$(2) \quad \Delta L = \lg \frac{I_1}{I_0} - \lg \frac{I_2}{I_0} = \lg \frac{I_1}{I_2} = 9.54 \text{ dB}$$

### 10-35 知识要点 多普勒效应

当波源向着静止的观察者运动时:  $v' = \frac{u}{u - v_s} v$

当波源远离静止的观察者运动时:  $v' = \frac{u}{u + v_s} v$

**逻辑推理** 频率变化的大小由声源相对于点  $P$  处观察者的运动速度  $v_n$  决定.



(1)

图解 10-35

由图(1)可知  $v_n = v \cos \alpha = w R \cos \alpha$ . 设声源频率为  $v_0$ .

声速  $u$ , 则观察者听到的频率为:

$$v = \frac{u}{u + v_n} v_0 = \frac{u v_0}{u + w R \cos \alpha} \quad (a)$$

为了列写  $v$  与  $\theta$  的关系, 只需列写出  $\cos \alpha$  与  $\theta$  的关系即可.

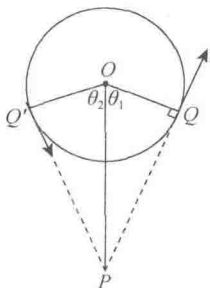
$$\begin{aligned} \text{【解题过程】} (1) \cos \alpha &= \frac{PQ'}{PQ} = \frac{PQ'}{\sqrt{PQ'^2 + QQ'^2}} \\ &= \frac{2R \sin \theta}{(2R \sin \theta)^2 + (2R \cos \theta - R)^2} \\ &= \frac{2 \sin \theta}{\sqrt{5 - 4 \cos \theta}} \end{aligned}$$

$$\text{代入(a)式: } v = \frac{u V_0}{u + \frac{2wR \sin \theta}{\sqrt{5 - 4 \cos \theta}}} = \frac{8500}{17 + \frac{3 \sin \theta}{\sqrt{5 - 4 \cos \theta}}} \text{ Hz}$$

(2) 显然声源处在  $Q, Q'$  两个位置时  $v_n = v$  最大.

易知  $\theta_1 = 60^\circ, \theta_2 = -60^\circ$ . 代入(1)中的结果:

$$v_{\min} = 459 \text{ Hz}, v_{\max} = 548 \text{ Hz}$$



图解 10-35

- 10-36 逻辑推理** 波源的辐射功率就应等于单位时间通过半球面(面积  $A=2\pi r^2$ )的电磁波能量,即  $\bar{P}=\bar{S}\cdot A$ ,而平均能流密度值  $\bar{S}=\overline{EH}$ .由电磁波的性质可知, $E$ 与 $H$ 垂直,相位相同,且有关系式  $\sqrt{\epsilon_0}E=\mu_0 H$ .因此,平面电磁波的坡印廷矢量大小的平均值可表示为  $\bar{S}=\frac{1}{2}E_m H_m=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}H_m^2$ ,由此可求电场强度振幅  $E_m$  和磁场强度振幅  $H_m$ .

**解题过程** (1)距离电台  $r=10\text{km}$  处的坡印廷矢量平均值为:

$$\bar{S}_{\text{波}}=\frac{P}{2\pi r^2}=\frac{10\times 10^3}{2\pi\times (10\times 10^3)^2}=1.59\times 10^{-5}\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$$

$$(2) E=\frac{2\bar{S}_{\text{波}}}{H_m}=0.109\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$$

$$B=\sqrt{2\bar{S}\sqrt{\epsilon_0/\mu_0}}=2.9\times 10^{-4}\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$$

- 10-37 解题过程** (1)真空中电磁波传速为光速  $c$ ,则

$$\lambda=cT=c\frac{2\pi}{\omega}=3\text{m} \quad \nu=\frac{\omega}{2\pi}=10^8\text{Hz}$$

(2)电磁波沿  $x$  正方向传播.

$$(3) H_x=0 \quad H_y=0$$

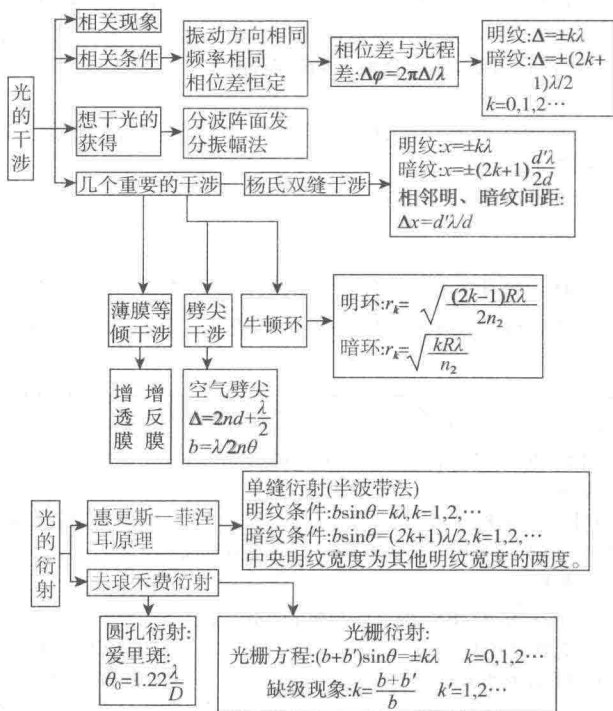
$$H_z=\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_y=1.6\times 10^{-3}\cos^2\left[2\pi\times 10^8\left(t-\frac{1}{c}x\right)\right]$$

$$(4)\text{坡印廷矢量为 } \mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}=9.6\times 10^{-4}\left[2\pi\times 10^8\left(t-\frac{1}{c}x\right)\right]\mathbf{i}$$

## 第十一章

## 光 学

## 本章知识框架图



## 考试要点

1. 光程的概念以及光程差和相位差的关系,在什么情况下的反射光有相位跃变。
2. 分析确定板书氏双缝干涉条纹及薄膜等厚干涉条纹的位置。
3. 迈克耳孙干涉仪的工作原理。



4. 惠更斯—菲涅原理及它对光的衍射现象的定性解释.
5. 光栅衍射公式,会确定光栅衍射谱线的位置,会分析光栅常数及波长对光栅衍射谱线分布的影响.
6. 布拉格公式的物理意义.
7. 布儒斯特定律和马吕斯定律.
8. 双折射现象.
9. 线偏振光的获得方法和检验方法.

## 知识点整理与解析

### 一、相干光

由波动理论可知,要形成稳定的干涉图样,相干叠加的光波必须满足的条件是:它们的光矢量振动方向相同,频率相同,位相差恒定,满足相干条件的光称为相干光,产生相干光的光源称为相干光源.

1. 要获得相干光通常采用两种方法,即波阵面分割振幅割法.

#### 2. 相干光

光矢量:对于光波来说,振动的是电场强度  $E$  和磁场强度  $H$ ,其中能引起人眼视觉和底片感光的是  $E$ ,故通常把  $E$  矢量叫做光矢量.

相干光:两束光的光矢量满足相干条件.

相干光源:相应的光源.



**温馨提示** 两个独立的自发光的光源或同一个光源上不同的部分所发出的光,频率可能相同,振动方向可能相同,但是相位不一定有恒定的差值,因此不是相干光,不能产生干涉现象.

小结:

名称	内容	说明
相干条件	(1) 两束光振动方向相同,频率相同以及在相遇点上相位差保持恒定. (2) 获得相干光的方法: 把光源上同一点发出的光分成两部分,具体方法有分波阵面法和分振幅法	激光本身就是相干光源
光程和光程差	(1) 光程在数值上等于介质折射率与光在介质中传播的几何路程的乘积,即光程 $= nL$ . (2) 相位差与光程差的关系: $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$ (3) 半波损失: 光从光疏介质向光密介质入射时,反射光的相位有 $\pi$ 的突变,相当于光程增加或减少 $\lambda/2$	(1) 光程是把光在介质中传播的路程折合为光在真空中的相应路程. (2) 处理光的干涉问题,分析、计算具体问题中相干光的光程差是关键(在薄膜干涉中必须要考虑是否有半波损失)
干涉明、暗纹条件	$\Delta = \begin{cases} \pm k\lambda & k=0,1,2,\dots \text{明纹中心} \\ \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2} & k=0,1,2,\dots \text{暗纹中心} \end{cases}$	实际运用干涉明、暗纹条件时,必须根据具体的干涉装置来选择正、负号及 $k$ 的取值, $k$ 并非都从零开始

## 二、杨氏双缝干涉 劳埃德镜

杨氏双缝实验是利用单一光源形成两束相干光,从而产生干涉效应的典型实验,在历史上,它是判断光具有波动性的最早实验.1801年,托马斯·杨用此实验测出光的波长,从而成为历史上第一个测出光的波长的人.

### 1. 杨氏双缝实验

干涉条纹是等间距的明暗相间的直条纹,明暗纹条件为

$$\text{光程差 } \delta = r_2 - r_1 \approx d \frac{x}{D} = \begin{cases} \pm k\lambda & (k=0,1,2,\dots), \text{干涉相长为明条纹} \\ \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2} & (k=0,1,2,\dots), \text{干涉相消为暗条纹} \end{cases}$$

明暗纹的位置为

$$x = \pm k \frac{D}{d} \lambda \quad (k=0,1,2,\dots), \text{明条纹}$$

$$x = \pm (2k+1) \frac{D}{d} \frac{\lambda}{2} \quad (k=0,1,2,\dots), \text{暗条纹}$$

相邻明暗纹的间距为  $\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$ .

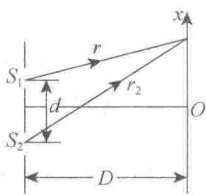


图 11-1

观察屏上光强的分布规律为  $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi$ , 式中,  $I_1$ 、 $I_2$  分别为两相干光波单独在相遇点的光强;  $\Delta\varphi$  为相位差, 劳埃德镜和非涅耳双面镜的干涉情况与此类似, 只是其中劳埃德镜实验存在半波损失.

小结:

名称	内容	说明
条纹特征	等宽等间距明、暗相间的平行直条纹	分波阵面法获得相干光
干涉条件	<p>从 <math>S_1</math> 和 <math>S_2</math> 发出的光到达 <math>P</math> 点的光程差为</p> $\Delta = r_2 - r_1 \approx d \frac{x}{D}$ $= \begin{cases} \pm k\lambda & \text{明纹} \\ \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{暗纹} \end{cases}$ <p><math>(k=0,1,2,\dots)</math></p>	<p>注意: 此处光程差是在空气中讨论的.</p>
明、暗条纹的位置	<p>明纹中心位置为:</p> $x = \pm k \frac{d'\lambda}{d} \quad (k=0,1,2,\dots)$ <p>暗纹中心位置为:</p> $x = \pm (2k+1) \frac{d'\lambda}{2d} \quad (k=0,1,2,\dots)$	<p>相邻两明(暗)纹的间距</p> $\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{d'\lambda}{d}$ <p>条纹间距与级次无关, 即条纹等间距分布.</p>

例 1 杨氏双缝实验中, 双缝间距  $d=0.5 \text{ mm}$ , 双缝至屏的距离  $D=1 \text{ m}$ .

(1) 若屏上可见到两组干涉条纹, 一组由波长  $\lambda_1=480 \text{ nm}$  的光产生, 另一组由波长  $\lambda_2=600 \text{ nm}$  的光产生, 求这两组条纹中第 3 级干涉明条纹之间的距离.

(2) 若用双缝干涉实验测某液体的折射率  $n$ , 光源为单色光, 观测到在空气中第 3 级明纹与液体

中第4级明纹重合.求 $n$ 个多少?

解 (1)双缝干涉实验中,明条纹的位置为

$$x = k \frac{D}{d} \lambda (k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots),$$

所以两组条纹中第3级明条纹之间的距离为

$$\Delta x = 3 \frac{D}{d} \lambda_2 - 3 \frac{D}{d} \lambda_1 = 7.2 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

(2)空气中第3级明条纹位置为  $x_3 = 3 \frac{D}{d} \lambda$ , 液体中第4级明纹位置为  $x_4 = \frac{D}{nd} \lambda$ , 依据题设有

$$3 \frac{D}{d} \lambda = 4 \frac{D}{nd} \lambda, \text{ 即 } n = \frac{4}{3} = 1.33.$$

## 2. 光程

光在不同的介质中传播时,由于传播速度 $v$ 不同,而光的频率 $\nu$ 不变,因此波长 $\lambda$ 也不同.


当光波前进相同的距离 $L$ 时,光波的相位变化 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}L$ 也是不相同的.

(1)光程

光程  $nL = \text{折射率 } n \times \text{几何路程 } L$ .

同一频率的光在折射率为 $n$ 的介质中通过 $L$ 的距离所引起的相位落后和在真空中通过 $nL$ 的距离所引起的相位落后相同.


若光穿过多个介质,则光程  $L = n_1 r_1 + n_2 r_2 + \dots = \sum_{i=1}^N n_i r_i$ .

 **温馨提示** 光程与几何路程是不同的概念. 光在折射率为 $n$ 的介质中传播距离为 $L$ 时,在相同时间内,光在真空中传播的距离为 $nL$ .

(2)光程差 $\Delta$

光程差 $\Delta$ 是两束相干光的光程之差.

①光程差 $\Delta$ 与相位差 $\Delta\varphi$ 的关系为  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$

 **温馨提示** 用光程计算相位差时,一定要用真空中的波长.

②干涉加强条件为  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \pm 2k\pi \quad \Delta = \pm k\lambda = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \quad k=0, 1, 2, \dots$

干涉减弱条件为  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \pm (2k+1)\pi \quad \Delta = \pm \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}, k=0, 1, 2, \dots$

③透镜不引起附加的光程差. 观察干涉现象时,使用透镜不会引起附加的光程差,这称为透镜的等光程性.

劳埃德实验表明:光从光速较大(折射率较小)的介质射向光速较小(折射较大)的介质时,反射光的相位较之入射光的相位跃变了 $\pi$ .

## 3. 薄膜干涉

光经过薄膜上下表面反射后,反射光相遇叠加而形成的干涉称为薄膜干涉,同理透射光相遇叠加而形成的干涉也是薄膜干涉,称为透射光干涉,这里主要讨论反射光的干涉,反射光干涉的光程差为

$$\delta = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$$

式中,  $e$  为薄膜度;  $\frac{\lambda}{2}$  为半波损失引起的附加光程差。

对于薄膜干涉, 应具体问题具体分析。

(1) 等倾干涉, 如图 11-2 所示, 利用面光源 (或称为扩展光源) 照射平行平面薄膜 (等厚膜) 时, 其干涉条纹形成在无穷远处, 可用凸透镜汇聚到焦平面上观察。由于膜的厚度均匀, 具有相同入射角  $i$  的光构成同一级干涉条纹, 而且有相同入射角的光线构成一个圆锥面, 所以干涉条纹是一系列明暗相间的同心圆环, 圆的位置决定于入射角  $i$ , 整个干涉图样呈疏外密状。

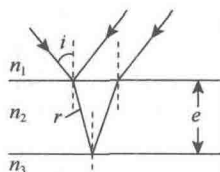
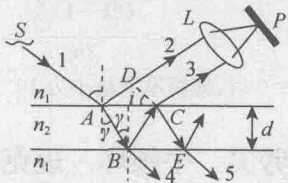
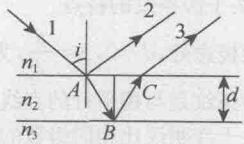


图 11-2

(2) 等厚干涉。平行光以相同的角度入射厚度不均匀的薄膜, 厚度相同的地方引起的光程差相同, 构成同一级干涉条纹。等厚干涉条纹是对应于膜的等厚线, 干涉条纹宝塔于薄膜表面的。等厚干涉两个重要实例就是劈尖干涉和牛顿环。

(3) 增透膜与增反膜, 光学成像仪器物镜前表面上均匀地镀一层透当厚度的透明介质膜, 利用薄膜干涉现象可达到减弱或增加玻璃透镜表面对某一波长光波的反射的目的, 这称为增透膜和增反膜, 增透膜最小厚度  $e = \lambda / (4n_2)$ 。

小结:

名称	内容	说明
薄膜干涉	由薄膜两表面反射或透射出去的光所产生的干涉现象。 (等倾干涉; 薄膜厚度均匀) (等厚干涉; 薄膜厚度不均匀)	 <p>(1) 分振幅法获得相干光。 (2) 由光的相干长度决定, 薄膜必须很薄才能看到清晰的干涉条纹 (图中厚度已放大)</p>
干涉条件	<p>反射光的干涉 (薄膜处于同一种介质):</p> $\Delta_r = 2d \sqrt{(n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i)} + \frac{\lambda}{2}$ $= \begin{cases} k\lambda & (k=1, 2, \dots) \text{ 明纹} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & (k=0, 1, 2, \dots) \text{ 暗纹} \end{cases}$ <p>当光线垂直入射 (<math>i=0^\circ</math>) 时, 有</p> $\Delta_r = 2n_2d + \frac{\lambda}{2}$ $= \begin{cases} k\lambda & (k=1, 2, \dots) \text{ 明纹} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & (k=0, 1, 2, \dots) \text{ 暗纹} \end{cases}$	<p>(1) 式中光程差取正值。 (2) 光程差公式不能死记, 要根据具体干涉装置求。 (3) 半波损失的讨论 (反射光)</p> $\begin{cases} 0 & n_1 > n_2 > n_3 \text{ 或 } n_1 < n_2 < n_3 \\ \frac{\lambda}{2} & n_1 > n_2 < n_3 \text{ 或 } n_1 < n_2 > n_3 \end{cases}$  <p>(4) 透射光的干涉同一薄膜若对某波长的反射光干涉加强, 则对该波长的透射光恰好干涉减弱; 反之, 反射光干涉减弱, 透射光则干涉加强, 两者互补</p>

名称	内容	说明
增透膜与增反膜	利用薄膜上、下表面反射光的光程差满足干涉相消条件来减少反射,从而使透射增强的膜叫增透膜. (2)利用薄膜上、下表面反射光的光程差满足干涉相长,使反射光因干涉而加强,这种膜叫增反膜	通常在照相机透镜表面镀一层氟化镁薄膜作为增透膜

例2 感光胶片对波长  $5520\text{\AA}$  的黄绿色光最敏感,因而在照相机镜头表面涂上一层折射率为  $n_2=1.38$  的透明氟化镁薄膜,以便使黄绿光自薄膜表面形成的两反射光束干涉相消,达到增加透射的目的.求该氟化镁薄膜的厚度.

解 在这一情况下,光线由空气( $n_1=1$ )到薄膜( $n_2=1.38$ )再到镜头( $n_3=1.5\sim 1.7$ ),因此在薄膜的两个表面上产生的反射光束均产生半波损失,该两光束的光程差就为

$$\delta=2n_2e$$

接干涉相消的条件,即可得薄膜厚度  $e$  为

$$e=\frac{(2k+1)\frac{\lambda}{2}}{2n_2}=(2k+1)\frac{5.52\times 10^{-7}}{4\times 1.38}=(2k+1)\times 10^{-7}(\text{m})$$

当  $k=0$  时,薄膜厚度最小为  $10^{-7}\text{ m}$ .

### 三、劈尖 牛顿环 迈克尔孙干涉仪

#### 1. 劈尖干涉

如图 11-3 所示,将两块折射率为  $n_1$  的平板玻璃一端支起,板间就形成厚度均匀增加的空气劈尖,劈尖的角度  $\theta$  很小,一般  $\theta\approx 10^{-4}\text{ rad}$ .用平行光垂直照射( $i=0$ ),两束光在劈尖的上表面相遇而产生干涉.

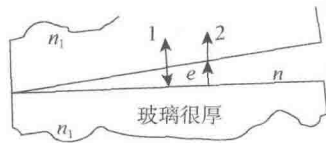


图 11-3

##### (1) 光程差

设劈尖介质的折射率为  $n$ ,光线 1、2 在劈尖的上表面相遇时的光程差为

$$\Delta=2nd+\frac{\lambda}{2}$$

##### (2) 劈尖干涉条纹的特点

① 劈尖棱边处,  $d=0$ ,  $\Delta=\frac{\lambda}{2}$ , 为零级暗纹.

② 干涉条纹是与棱平行的直线条纹.

③ 某一干涉明纹比同级数的暗纹对应的劈尖厚度小,相邻两明(或暗)条纹对应的劈尖厚度差为  $\frac{\lambda}{2n}=\frac{\lambda_n}{2}$ .

④ 相邻两明(或明)条纹间距为  $b=\frac{\lambda}{2n\theta}$ ,条纹等间隔.劈尖角  $\theta$  越小,条纹越稀疏,劈尖角  $\theta$  越大,

条纹越密集.

劈尖干涉为等厚干涉,同一级明(或暗)纹上每一点对应的厚度相同.当上面的平玻璃以棱边为轴,沿逆时针方向做微小转动,劈尖角增大,某一级明(或暗)纹对应的那一厚度向棱边移动,但棱边厚度为零,仍然是零级暗纹,则整个条纹间隔变小并向棱边会聚.

(3)加强与减弱的条件

$$\text{明纹中心条件 } \Delta = 2nd + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad k=1,2,\dots$$

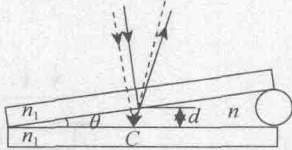
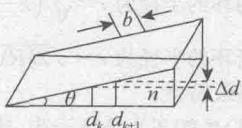
$$\text{暗纹中心条件 } \Delta = 2nd + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad k=0,1,2,\dots$$

相邻两明(或暗)条纹对应的劈尖厚度为  $\frac{\lambda}{2n} = \frac{\lambda_n}{2}$ , 式中  $\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$  为光在劈尖介质中的波长.

相邻两明(或暗)条纹间距为  $b = \frac{\lambda}{2\sin\theta}$ , 由于劈尖  $\theta \sim 10^{-4} \text{ rad}$ , 所以  $\sin\theta \approx \tan\theta \approx 0$ , 则  $b = \frac{\lambda}{2n\theta}$ .

**思路总结** 劈尖干涉是等厚干涉,同一级明(或暗)纹上每一点对应的薄膜厚度是相同的.劈尖处是暗纹还是明纹,取决于薄膜和周围的介质折射率的排列方式.空气劈尖的棱处一定是零级暗纹.

小结:

名称	内容	说明
劈尖干涉	两玻璃片之间充以折射率为 $n$ 的透明介质,这样就形成了一层劈形状的薄膜,称为劈尖.若两玻璃片之间是空气,则为空气劈尖	属于等厚干涉 
条纹分布特征	<p>(1) 劈尖干涉条纹是阴暗相同、等间距的平行直条纹.若存在波损失,棱边(<math>d=0</math>)处则为零级暗条纹,随薄膜厚度的增加,条纹干涉级增高.</p> <p>(2) 相邻两明(暗)条纹对应的厚度差</p> $\Delta d = \frac{\lambda}{2n}$ <p>(3) 相邻两明(暗)条纹间距</p> $b = \frac{\lambda}{2n\sin\theta}$	

**例 3** 一玻璃劈尖的末端厚度为  $0.005 \text{ cm}$ , 折射率为  $1.5$ , 今用波长  $700 \text{ nm}$  的平行单色光, 入射角为  $30^\circ$  的方向射到劈尖的上表面, 如图 11-4 所示, 试求:

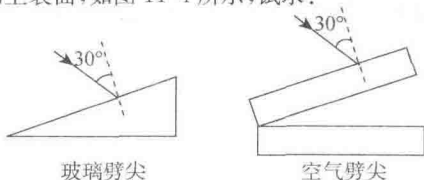


图 11-4

(1) 在玻璃劈尖上表面形成的干涉条纹数目;

(2) 若以尺寸相同的由两玻璃形成的空气劈尖代替上述的玻璃劈尖, 则产生的条纹数目是多少?

解 (1) 劈尖干涉的暗纹条件为

$$\delta = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}, \text{ 即 } 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} = k\lambda.$$

故 
$$k_{\max} = \frac{2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}}{\lambda} = \frac{2 \times 0.005 \times 10^{-2} \times \sqrt{1.5^2 - \sin^2 30^\circ}}{700 \times 10^{-9}} = 202.$$

由于棱边为暗条纹, 故劈尖上出现 203 条暗纹, 202 条明纹,

(2) 依题意  $n_2 = 1, n_1 = 1.5$ , 但入射角并非  $30^\circ$ , 可由折射定律求出

$$\frac{\sin 30^\circ}{\sin \gamma} = 1.5, \text{ 即 } \sin \gamma = 0.333.$$

折射角  $\gamma$  为空气劈尖的入射角, 有

$$k_{\max} = \frac{2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \gamma}}{\lambda} = \frac{2 \times 0.005 \times 10^{-2} \times \sqrt{1 - (1.5 \times 0.333)^2}}{700 \times 10^{-9}}$$

所以劈尖上共出现 124 条暗纹, 123 条明纹.

## 2. 牛顿环干涉

牛顿环通常是由一曲率半径  $R$  很大的平凸透镜和一光学平面玻璃接触构成, 如图 11-5 所示, 其干涉图样是一组以接触点为中心的同心圆环, 如图 11-6 所示.

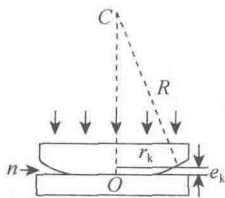


图 11-5

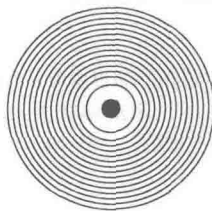


图 11-6

明环的半径为  $r = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right) R \lambda}, k = 1, 2, \dots$

暗环的半径为  $r = \sqrt{2kR\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots$

条纹特点:

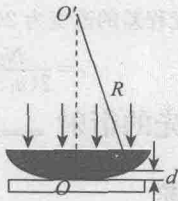
(1) 牛顿环为等厚干涉, 是以接触点为中心的不等间距的同心圆条纹.

(2) 牛顿环中心是个暗斑, 这是由于透镜与玻璃片的非刚性.

(3) 中心为零级暗纹, 某一级明环中心比同级数的暗环中心对应的空气膜厚度小(半径小), 相邻两明(或暗)环对应的厚度差为  $\frac{\lambda}{2n} = \frac{\lambda_n}{2}$ .

(4) 离  $O$  点越远, 空气厚度增加得越快, 即劈尖夹角  $\theta$  逐渐增大, 所以牛顿干涉条纹间距变小, 从里向外逐渐变密, 不等间距分布.

小结:

名称	内容	说明
牛顿环	牛顿环装置是由一个曲率半径很大的平凸透镜放在一块光学平面玻璃上组成的. 在透镜与玻璃片之间就会形成一个厚度由中心开始逐渐增大的环形空气薄膜	属于等厚干涉 
条纹分布特征	<p>(1) 牛顿环是明暗相间的同心圆环, 且内疏外密, 越靠近中心, 条纹干涉级越低.</p> <p>(2) 明环半径</p> $r = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}} \quad k=1, 2, 3, \dots$ <p>(3) 暗环半径</p> $r = \sqrt{kR\lambda} \quad k=0, 1, 2, \dots$	<p>平凸透镜的曲率半径为</p> $R = \frac{r_k^2 + m - r_k^2}{m\lambda}$ <p>(<math>m</math> 为明(或暗)纹移动的条数.)</p>

例 4 两平凸透镜按图 11-7 所示放置, 上面一块是标准件, 半径为  $R_1$ , 另一块是待测样品, 用波长为  $\lambda$  的单色平行光垂直照射, 测得  $k$  级暗环的半径为  $r$ , 求待测样品的曲率半径表达式.

解 牛顿环的第  $k$  级暗环满足的条件为

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \text{ 即 } 2e = k\lambda.$$

而膜厚为 
$$e = \left( \frac{r^2}{2R_1} + \frac{r^2}{2R_2} \right) \quad (r \text{ 为暗环径}),$$

故 
$$r^2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = k\lambda, R_2 = \frac{r^2 R_1}{k\lambda R_1 - r^2}.$$

如果  $R_1 = 500 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ,  $k = 50$ ,  $r = 1 \text{ cm}$ , 则  $R_2 = 600.1 \text{ cm}$ .

### 3. 迈克耳孙干涉仪

迈克耳孙干涉仪是利用分振幅法产生双光束干涉的仪器, 干涉情况等效于空气薄膜干涉, 动镜  $M_2$  沿轴向移动  $\lambda/2$  距离, 设场中将有一条干涉条纹移动, 所以  $M_2$  移动的距离  $\Delta d$  与视场中移过的条纹数  $N$  有如下关系:  $\Delta d = N\lambda/2$ .

例 5 迈克耳孙干涉仪用氯氟激光器( $\lambda_1 = 632.8 \text{ nm}$ )作光源.

(1) 如果动镜  $M_2$  移动一段距离, 这时数得干涉条纹移动了 792 条, 求  $M_2$  移动的距离.

(2) 如果迈克耳孙干涉仪的一臂引入长 100 mm 的玻璃管, 并充以压强为 101 325 Pa 的空气, 用波长  $\lambda_2 = 585 \text{ nm}$  的光照射, 将玻璃管抽成真空, 发现有 100 条干涉条纹在移动, 求空气的折射率.

(3) 仍用氯氟激光器作光源, 在  $M_2$  镜前插入一薄玻璃片, 观察到有 150 条干涉条纹移过, 设玻璃的折射率  $n_1 = 1.632$ , 求玻璃片厚度  $e$ .

解 (1)  $M_2$  移动的距离为

$$\Delta d = N \frac{\lambda_1}{2} \left( 792 \times \frac{632.8 \times 10^{-9}}{2} \right) \text{ m} = 0.2506 \times 10^{-3} \text{ m} = 0.2506 \text{ mm}$$

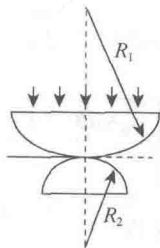


图 11-7



(2)实际上,同一位置处光程差改变一具波长 $\lambda$ ,就会有一条条纹移动,依据题意,光程差的改变为 $2(n-1)l=N_1\lambda$ ,式中, $n$ 为空气折射率; $L$ 为玻璃管长度.

$$n=\frac{N_1\lambda}{2l}+1=\frac{100\times 585\times 10^{-6}}{2\times 100}+1=1.000\ 292\ 5.$$

(3)光程差的改变为 $2(n_1-1)e=N_2\lambda$ ,则玻璃片厚度为

$$e=\frac{N_2\lambda}{2(n_1-1)}=\frac{150\times 632.8\times 10^{-9}}{2\times (1.632-1)}\text{m}=7.51\times 10^{-5}\text{m}=75.1\ \mu\text{m}.$$

## 四、光的衍射

### 1. 衍射现象

波在传播过程中遇到障碍物时,传播方向会发生变化,能绕过障碍物的边缘继续传播,衍射是波的基本特性之一,光是一种电磁波,所以光也具有衍射现象,发生明显衍射现象的条件是障碍物的几何尺寸能够与光波的波长相比拟.

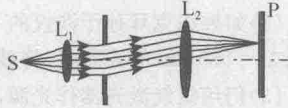
### 2. 惠更斯-菲涅耳原理

波阵面上各点都可以当作子波波源,其后波场中,各点波的强度由各个子波在该点的相干叠加决定.此原理说明衍射或近场衍射的本质和干涉相同,都是相干光波的叠加,对于衍射而言,相干光源有无限多个且连续分布.光学中把衍射现象分为两类:

(1)障碍物与光源和观察屏的距离分别为有限远或者有一个距离为有限远,这类衍射称为菲涅耳衍射或近场衍射.

(2)障碍物与光源和观察屏的距离均为无限远,即入射光和衍射光都是平行光束,显然这种衍射需要利用透镜,这类衍射称为夫琅禾费衍射或远场衍射.

小结:

名称	内容	说明
光的衍射现象	光的衍射现象是指光在传播过程中遇到障碍物时,不再遵循直线传播的规律,而会传到障碍物的阴影,区域并形成明暗变化的光强分布	衍射是波动的另一个主要基本特征.只有当障碍物的大小与光波的波长可以相比拟时,才会观察到较明显的衍射现象
惠更斯-菲涅耳原理	波在传播过程中,从同一波阵面上各点发出的子波,经传播而在空间某点相遇时,产生相干叠加	可以定量地解释光的衍射现象
衍射分类	<p>(1)菲涅耳衍射:衍射屏离光源或观察屏的距离为有限远处所形成的衍射现象.</p> <p>(2)夫琅禾费衍射:衍射屏与光源和观察屏的距离都是无限远处所形成的衍射现象,即认为相对于衍射屏的入射光和出射光都是平行光</p>	<p>在实验室中,夫琅禾费衍射通常利用两个会聚透镜来实现.</p> 

例6 波长为 $5\ 461\text{\AA}$ 的平行光垂直地射在 $0.1\text{ mm}$ 宽的细缝上,若将焦距为 $100\text{ cm}$ 的透镜置于缝的后面,并使光会聚到单平面处的屏幕上,问衍射图案的中央 $O$ 处到第一级暗条纹、第三级暗条纹和第一级明条纹的距离分别是多少?

解 第一级暗条纹、第三级暗条纹离  $O$  点的距离分别为

$$x_1 = \frac{f\lambda}{a} = \frac{1 \times 5.461 \times 10^{-10}}{0.1 \times 10^{-3}} = 5.46 \times 10^{-3} (\text{m})$$

$$x_3 = \frac{3f\lambda}{a} = \frac{3 \times 1 \times 5.461 \times 10^{-10}}{0.1 \times 10^{-3}} = 1.64 \times 10^{-2} (\text{m})$$

明条纹处衍射角  $\theta$  满足

$$a \sin \theta = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

所以第  $k$  级明条纹至中心  $O$  的距离为

$$x_k' = f \tan \theta \approx f \sin \theta \approx \pm (2k+1) \frac{f\lambda}{2a}$$

第一级明条纹离中心  $O$  的距离为

$$x_1' = (2 \times 1 + 1) \times \frac{1 \times 5.461 \times 10^{-10}}{2 \times 0.1 \times 10^{-3}} = 8.2 \times 10^{-3} (\text{m})$$

## 五、单缝夫琅禾费衍射

图 11-8 所示为单缝夫琅禾费衍射示意图, 波长为  $\lambda$  的单色平行光束垂直照射在宽度为  $a$  的单缝上, 平行衍射光束(用衍射角  $\theta$  表示不同的平行衍射光束)经透镜  $L$ , 汇聚于焦平面上的观测屏上.  $\theta$  不同, 汇聚点  $P$  的位置也不同, 观测屏上将呈现明暗相间的衍射条纹, 条纹的明暗位置可用菲涅耳半波带法分析: 将单缝处的波阵面分割为许多面积近似相等的半波带, 点  $P$  处的明暗取决于半波带的数目. 当单缝处的波阵面可分为偶数个半波带时, 点  $P$  处是暗的. 当单缝可分为奇数个半波带时, 点  $P$  处是亮的, 即由单缝两端发出的光线到屏上某点的光程差  $\delta$  满足:

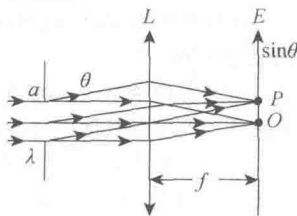


图 11-8

$$\delta = na \sin \theta = \begin{cases} \pm 2k \frac{\lambda}{2}, & \text{暗纹中心,} \\ \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}, & \text{明纹中心.} \end{cases} \quad k=1, 2, 3, \dots$$

0, 中央明纹中心,

式中,  $n$  为介质折射率;  $k$  为衍射级次, 宽单缝  $a$  处的波阵面被分割出来的半波带的数目  $N$  与衍射角  $\theta$  的关系为  $N = \frac{2a \sin \theta}{\lambda}$ , 中央亮纹的角度(中央亮纹对镜中心所张的角)为  $2 \frac{\lambda}{a}$ ; 中央明纹的线宽度  $\Delta X = 2f \frac{\lambda}{a}$  ( $f$  为透镜的焦距);  $k$  级明纹的角宽度为  $(k+1) \frac{\lambda}{a} - k \frac{\lambda}{a} = \frac{\lambda}{a}$ ;  $k$  级明纹的位置  $x = f(2k+1) \frac{\lambda}{2a}$ . 由上面讨论可以看出: 单缝宽度愈小, 衍射现象愈明显. 此外, 虽然屏上衍射条纹明暗相间, 但各点的振幅和强度是连续变化的.

下面用旋转矢量图示法推导单缝衍射光强公式, 将单缝处的波阵面分割成  $N$  条等宽的波带, 由于  $N$  很大, 一般近似地认为, 由各个波带发出的子波在点  $P$  的振幅相等且  $\Delta A$  表示. 相邻波带发出的子波到达点  $P$  的光程差  $\delta = \frac{a}{N} \sin \theta$ , 相应的位相差  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{N} \sin \theta$ , 由若干个同向频率振动的合成公

式,可得合振幅为

$$A = \Delta A \frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}} \approx \Delta A \frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}} = N\Delta A \frac{\sin\frac{\pi\sin\theta}{\lambda}}{\frac{\pi\sin\theta}{\lambda}}.$$

令  $u = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$ , 则  $A = N\Delta A \frac{\sin u}{u}$ , 当  $\theta = 0$  时,  $u = 0$ ,  $A = N\Delta A = A_0$  为中央明纹中以  $O$  处的合振幅, 所以  $A = A_0 \frac{\sin u}{u}$ .

由于光强正比振幅的平方, 点  $P$  处的光强为  $I = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2}$ ,  $I_0$  为中央明纹中心  $O$  处的光强, 称为光强主极大.

(1) 极小值位置: 令  $u = k\pi$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , 则  $\sin u = 0$ ,  $I = 0$ , 由于  $u = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$ , 所以光强极小值位置满足的条件为  $a \sin\theta = k\lambda$ .

(2) 次极大位置: 令  $\frac{d}{du} \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 = 0$ , 则次极大的条件为  $\tan u = u$ , 用图解法求得  $u$  值为  $u = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi, \dots$ , 相应地有  $a \sin\theta = \pm 1.43\lambda, \pm 2.46\lambda, \pm 3.47\lambda, \dots$ , 与半波带法结果略有不同.

(3) 条纹特点

① 中央明纹最亮. 衍射角越大, 分成的半波带越多, 波带越窄, 光能就越少, 中央向两边的明条纹的亮度逐渐降低.

② 相邻两条暗条纹的间距就是明条纹的宽度, 因此除了中央明纹, 条纹是等间隔的平行直条纹. 中央明纹宽度是其他明纹宽度的两倍.

③ 白光照射时, 除了中央明纹的中心是白色, 边缘为彩色外, 其他各级明纹均为由紫色到红色的彩色条纹. 波长越长, 离中央明纹越远. 不同波长、不同级次的条纹可能会产生重叠现象.



**温馨提示** 暗条纹里很细(理论上暗条纹无宽度), 屏上自某级暗条纹开始, 光强逐步增大最大值(即条件所说的明纹位置), 再逐步减小到下一级暗条纹, 因此相邻两条暗条纹的间距就是明条纹的宽度.

小结:

名称	内容	说明
明暗纹条件	$b \sin\theta = \begin{cases} \pm k\lambda & \text{暗纹中心} \\ \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{明纹中心} \end{cases}$ $b \sin\theta = 0$ 中央明纹	(1) 属于夫琅禾费衍射. (2) 采用半波带法得出明暗纹条件. 注意 $k$ 不取零, 正负号表示同级衍射条纹对称分布在中央明纹两侧
条纹位置	$x = f \tan\theta \approx f \sin\theta$ 暗纹位置 $x = k \frac{f\lambda}{b}$ 明纹位置 $x = (2k+1) \frac{f\lambda}{2b}$	暗纹的衍射角 $\theta_2 \approx \sin\theta_k = k \frac{\lambda}{b}$

名称	内容	说明
明纹宽度	中央明纹的宽度 $\Delta x_0 = \frac{2f\lambda}{b}$	(1) 半角宽度 $\theta_1 = \frac{\lambda}{b}$ 几何光学是波动光学在 $b \gg \lambda$ 时的极限情况.
	其他明纹的宽度 $\Delta x = \frac{f\lambda}{b}$	(2) 中央明纹宽度是其他明纹宽度的 2 倍

例 7 在单缝夫琅禾费衍射实验中,入射光是两种波长的光,  $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$ ,  $\lambda_2 = 760 \text{ nm}$ , 已知单缝宽度  $a = 1.0 \times 10^{-2} \text{ cm}$ , 透镜焦距  $f = 50 \text{ cm}$ , 试求:

(1) 两种光第 1 级衍射纹中以之间的距离;

(2) 若用光栅数为  $d = 10 \times 10^{-3} \text{ cm}$  的光栅换单缝, 其他条件不变, 求两种光第 1 级主极大之间的距离.

解 (1) 单缝衍明纹条件为  $a \sin \theta = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) 明纹的位置, 在衍射角很小的情况下, 应为

$$x_k = f \tan \theta \approx f \sin \theta = f(2k+1) \frac{\lambda}{2a}, \text{ 所以两种光第 1 级明纹中心之间的距离为}$$

$$\Delta x = f(2 \times 1 + 1) \frac{\lambda_2}{2a} - f(2 \times 1 + 1) \frac{\lambda_1}{2a} = \frac{3f}{2a} (\lambda_2 - \lambda_1) = 0.27 \text{ cm}$$

(2) 光栅方程为  $d \sin \theta = k\lambda$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 主极大条纹在屏上的位置为

$$x_k = f \tan \theta \approx f \sin \theta = f \frac{k\lambda}{d}.$$

两种光第 1 级主极大条纹之间的距离为  $\Delta x = f \frac{\lambda_2}{d} - f \frac{\lambda_1}{d} = \frac{f}{d} (\lambda_2 - \lambda_1) = 1.8 \text{ cm}$ .

## 六、光学仪器的分辨本领

依据圆孔衍射规律和瑞利判据可得出仪器(物镜)的最小分辨角  $\delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ , 仪器分辨率  $R = \frac{1}{\delta\theta} = \frac{D}{1.22\lambda}$ .

例 8 设光栅长度  $15 \text{ cm}$ , 每毫米内有  $1200$  条缝. 试求: 对于波长  $\lambda = 540 \text{ nm}$  的可见光, 1 级光栅光谱所能分辨的最小波长差.

解 光栅的总缝数为  $N = 150 \times 1200 \text{ 条} = 180000 \text{ 条}$ , 光栅的色分辨为

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = 180000k$$

故 1 级光谱的分辨本领  $R = 180000$ .

对于波长为  $540 \text{ nm}$  的可见光, 1 级光栅光谱所能分辨的最小波长差为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{540 \times 10^{-9}}{180000} \text{ m} = 0.003 \times 10^{-9} \text{ m} = 0.003 \text{ nm}.$$

## ※圆孔衍射

## 瑞利判据

如果一具像点的艾里斑的中心刚好与另一像点衍射图样的第一级暗纹相重合,就认为这两个物点恰好能为这一光学仪器所分辨,把夫琅禾费圆孔衍射的艾里斑半角宽度,即最小分辨角的倒数 $\frac{1}{\theta_0}$ 称为分辨本领,式中, $D$ 为透镜或圆孔的直径, $\lambda$ 为入射光的波长.

$$\theta_0 = 1.22\lambda/D$$

小结:

名称	内容	说明
艾里斑对透镜光心的张角(半角)	$\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$	圆孔衍射图样为一组明、暗相间的同心圆环,中心为一亮圆斑,称为艾里斑
瑞利判据	<p>一个光源的艾里斑中心若正好落在另一个光源的艾里斑的边缘(第一级暗纹处),这时两个点光源(或物点)恰为这一光学仪器所分辨.</p> <p>光学仪器的分辨本领(分辨率)</p> $R = \frac{1}{\theta} = \frac{D}{1.22\lambda}$	<p>提高光学仪器分辨率的办法:</p> <p>(1)增加物镜的孔径 <math>D</math>;</p> <p>(2)减少入射光的波长</p>

例9 当用波长为  $5893\text{\AA}$  的光照射时,能清楚地分清是两平行直线的最小间距为多少? 设人站在  $0.5\text{ m}$  远处观察,人眼瞳孔直径为  $3\text{ mm}$ .

解 两直线对人眼的张角等于最小分辨角时,才刚能分清是两直线,因此有

$$\frac{x}{0.5} = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 1.22 \times \frac{5893 \times 10^{-10}}{3 \times 10^{-3}}$$

两直线之间的最小距离为

$$x = 0.5 \times 1.22 \times \frac{5893 \times 10^{-10}}{3 \times 10^{-3}} = 1.2 \times 10^{-4} (\text{m}) = 0.12 (\text{mm})$$

## 七、光栅衍射

## (1)光栅衍射特点

①光栅衍射光谱间距大、亮度高、条纹细、边缘锐、分辨率高. 对于某衍射角  $\theta$ ,若这些单缝中任意一个的最大光程差是半波长的偶数倍(或奇数倍),则所有其他单缝均如此,它们在屏上的衍射条纹相互重合,因此提高了衍射条纹的亮度.

②光栅衍射实质上是单缝衍射与缝间光线干涉的综合.

## (2)光栅方程

## ①光栅常数

已知光栅中各透光缝宽为  $b$ ,不透光的刻痕宽为  $b'$ ,两邻透光缝对点点的间距  $d = b + b'$  称为光栅常量,  $d$  是光栅的一个重要参数.

## ②光栅方程

若相邻两缝沿  $\theta$  方向发出的两条光线的光程差  $d \sin \theta$  为半波长的偶数倍,则任意两单缝沿  $\theta$  角

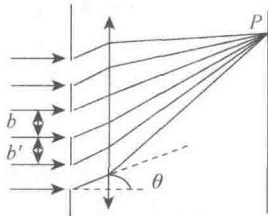


图 11-9

方向的衍射光线的光程差都为半波长的偶数倍,它们在屏上相干叠加产生明条纹(称为主极大)。因此,在光栅衍射图样中,各级主极大取决于下述光栅方程:

$$(b+b')\sin\theta=\pm k\lambda, \quad k=0,1,2,\dots$$

$k=0$  的条纹叫中央明纹, $k=1,2,\dots$  的明纹分别叫做第一级、第二级、……明纹(各级主极大)。相邻主极大明纹之间有  $N-1$  条暗纹,还有  $N-2$  条纹明纹,次明纹光强很弱。

### (3) 光栅衍射条纹特点

① 屏幕中心为中央主极大,两侧对称分布。级次越高离中央主极大越远,相邻两明纹的间距较大,其间为很宽的暗区。

② 条纹很亮,光栅中的狭缝数目越多,明纹则越亮。

③ 条纹窄且不等间距。光栅常量越小,明纹则越窄,明纹间隔得越远。

④ 有缺级现象和重叠现象。

⑤ 白光照射时,除了中央明纹的中心是白色外,其他各级明纹均为由紫色到红色的彩色条纹。波长越长,离中央明纹越远。不同波长、不同级次的条纹可能会产生重叠现象。

小结:

名称	内容	说明
光栅方程	平行光垂直入射时,产生主明纹的条件 $(b+b')\sin\theta=\pm k\lambda$ $(k=0,1,2,\dots)$ $(b+b')$ 为光栅常量	(1) 光栅是由大量等宽、等间距的平行狭缝构成的光学元件 (2) 衍射光栅图样是在黑暗的背景上呈现一系列分得很开的细窄亮线,它是单缝衍射和多缝干涉的综合效果
缺级	当 $(b+b')$ 与 $b$ 之比为整数比时,出现缺级现象。所缺级次为 $k=\frac{b+b'}{b}k' \quad (k'=\pm 1,\pm 2,\dots)$	

**例 10** 用波长  $\lambda=5\,900\text{ \AA}$  的平行单色光垂直入射于每厘米有 5 000 条栅纹的衍射光栅,问最多能看到几级条纹?

**解** 每厘米有 5 000 条栅纹,故光栅常数为

$$d=\frac{1\times 10^{-2}}{5\,000}=2\times 10^{-6}(\text{m})$$

$$\text{由光栅公式} \quad k=\frac{d\sin\theta_{\max}}{\lambda}=\frac{d}{\lambda}=\frac{2\times 10^{-6}}{5\,900\times 10^{-10}}=3.39 \text{ 取整数 } k=3.$$

即最多能看到 3 级条纹。

## 八、光的偏振性 马吕斯定律

### 1. 自然光和偏振光

(1) 光作为电磁波,是一种横波,由许多列光波组成,包含了各个方向的光振动,没有哪一个方向的光振动会占优势,这样的光叫做自然光。

(2) 自然光经过某些物质的反射、折射或吸收后,可能只保留某一方向的光振动,称为线偏振光或完全偏振光,若一具方向光振动较与之相垂直方向上的光振动占优势,则称为部分偏振光。

## 2. 偏振光的起偏、检偏

偏振光:能吸收某一方向的光振动的某些物质制成的透明薄片,称为偏振片,偏振片允许通过的光振动方向称为偏振片的偏振化方向。

起偏:当强度为  $I_0$  的自然光射到偏振片上时,只有平行于偏振化方向的光振动能透过,因而透射光是线偏振光,透射光强度  $I = \frac{I_0}{2}$ , 这就是起偏。

检偏:用偏振片观察线偏振光,偏振片旋转过程中有光强变化,且有消光现象,这就是检偏。

## 3. 马吕斯定律

光强为  $I_0$  的线偏振光,当其偏振方向与检偏器偏振化方向的夹角为  $\alpha$  时,则透射过检偏器后的透射光强为

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

该式称为马吕斯定律。

例 11 强度为  $I$  的平行自然光,垂直通过两块平行放置的偏振片,若两偏振片的偏振化方向的夹角为  $30^\circ$ ,求射光强与入射光强之比。

解 透过第一块偏振片后的光强为

$$I_0 = \frac{1}{2} I$$

射光强为

$$I_N = I_0 \cdot \cos^2 30^\circ = \frac{1}{2} I \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} I$$

出射光强与入射光强之比为

$$\frac{I_N}{I} = \frac{3}{8}$$

## 4. 反射光和折射光的偏振

如图 11-10 所示,  $MM'$  是两种各向同性介质(如空气和玻璃)的分界面,实验表明,一束自然光从空气入射到玻璃后,在反射光束中垂直振动多于平行振动,而在折射光中平行振动多于垂直振动,即反射光束和折射光束都是部分偏振光,1812 年,布儒斯特发现,反射光的偏振化程度取决于入射角  $i$ ,当  $i$  等于某一定值  $i_0$ (称为起偏角或布儒斯特角),即满足  $\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1}$

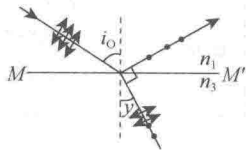


图 11-10

时,反射光为完全偏振光,且振动面与入射面垂直,由折射定律  $n_1 \sin i_0 = n_2 \sin \gamma$  可知

$$\sin i_0 = \frac{n_2}{n_1} \sin \gamma = \tan i_0 \sin \gamma = \frac{\sin i_0}{\cos i_0} \sin \gamma$$

$$\text{即 } \cos i_0 = \sin \gamma, i_0 + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

即反射光束与折射光束垂直。

## 5. 双折射现象

(1)一束光线射入各向异性介质后,会分裂为两束光线,沿不同方向传播,称为双折射,遵守折射定律的光束称为寻常光线,即  $o$  光,不遵守折射定律且不一定在入射面内的光束称为非常光线,即  $e$  光。

(2)产生双折射现象的原因是寻常光线与非常光线在晶体中具有不同的传播速度。 $o$  光在晶体各方向上的传播速度都相同,而  $e$  光的传播速度随方向的不同而改变,在晶体内部有一确定的方向,沿此方向  $o$  光和  $e$  光的传播速度相同,这一方向称为晶体的光轴,光沿光轴方向传播时不存在双折射现象。

(3) $o$  光和  $e$  光都是线偏振光, $o$  光的振动方向垂直于其主平面,而  $e$  光的振动方向包含在其主平

面内,只有当入射面与晶体主截面重合时, o 光和 e 光的振动方向才垂直。

(4) 偏振棱镜(尼科耳棱镜、格兰汤姆孙棱镜等)利用晶体的双折射现象,将一束自然光分成 o 光和 e 光,然后利用全反射原理,把其中的一束光反射掉,只让另一束光通过棱镜,从而获得振向一定的线偏光。

例 12 用方解石晶体制成一个长方形镜块,其光轴垂直于纸面,如图 11-11 所示,已知方解石晶体的主折射率为  $n_o=1.658$ ,  $n_e=1.486$ ,试求:

(1) 如果方解石晶体的厚度  $d=1.5\text{ cm}$ , 自然光入射角  $i=45^\circ$ , 求  $a, b$  两透射光之间的垂直距离;

(2) 标出两透射光的光振动方向并指出哪一束光是 e 光?

解 (1) 对一 o 光,由折射定律有

$$\sin i = n_o \sin \gamma_o,$$

$$\text{故} \quad \sin \gamma_o = \frac{\sin i}{n_o} = \frac{\sin 45^\circ}{1.658} = 0.4265.$$

e 光在垂直于光轴方向传播时亦满足折射定律

$$\sin i = n_e \sin \gamma_e,$$

$$\text{故} \quad \sin \gamma_e = \frac{\sin i}{n_e} = \frac{\sin 45^\circ}{1.486} = 0.4758.$$

$a, b$  两透射光之间的距离为

$$l = (d \tan \gamma_e - d \tan \gamma_o) \times \sin 45^\circ = \left[ 1.5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times (0.5410 - 0.4715) \right] \text{m} = 7.37 \times 10^{-2} \text{cm}.$$

(2) 光束  $a$  为 e 光, 光束  $b$  为 o 光, 光振动方向如图 11-11 所示。

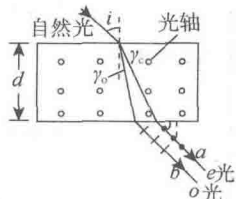


图 11-11




## 6. 偏振光的干涉

两束相干平面偏振光之间的相位差为  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} = (n_o - n_e)d + \pi$ .

式中,  $\frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$  为相干光束通过厚为  $d$  的晶片时产生的相位差;  $\pi$  为附加相位差, 有无附加相位差具体情况具体分析, 干涉明暗条件为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d + \pi = \begin{cases} 2k\pi, & \text{干涉最强, 视场最亮.} \\ (2k+1)\pi, & \text{干涉最弱, 视场最暗,} \end{cases} \quad k \text{ 其中 } k=1, 2, 3, \dots$$

小结:

名称	内容	说明
自然光与偏振光	自然光: 在垂直传播方向的平面内, 光矢量 $E$ 的振幅沿各个方向均等.	(1) 自然光的两个相互垂直的光矢量之间没有恒定的相位关系, 每一个独立的光振动的光强都等于自然光光强的一半. (2) 部分偏振光介于自然光和线偏振光之间
	自然光的表示法 	
	线偏振光(偏振光): 只在某一个固定方向有光矢量 $E$ 振动的光	
	垂直纸面振动的偏振光 	
	平行纸面振动的偏振光 	



名称	内容	说明
马中斯定律	光强为 $I_0$ 的线偏振光, 透过检偏器(偏振片)后的光强为 $I = I_0 \cos^2 \alpha$ $\alpha$ 为线偏振光与检偏器的偏振化方向间的夹角	利用偏振片可以获得线偏振光
布儒斯特定律	自然光入射到介质分界面时, 在一般情况下, 反射光和折射光都是部分偏振光, 当入射角 $i$ 满足 $\tan i_B = \frac{n_2}{n_1}$ 时, 反射光是振动方向垂直入射面的线偏振光, 折射光是部分偏振光. 同时折射光线与反射光线相互垂直	利用玻璃片堆可以产生两束振动方向相互垂直的线偏振光
双折射现象	当光入射到各向异性的晶体(如方解石、石英等)时, 晶体内将分出 o 光和 e 光两条折射偏振光, 这种现象称为光的双折射. 寻常光(o 光)遵守折射定律, 非常光(e 光)不遵守折射定律	利用各向异性晶体的双折射现象也可以得到线偏振光

例 13 光从玻璃中射向空气, 在介质面上发生反射, 测得布儒斯特角为  $i_0$ , 试求玻璃的折射率.

解 由布儒斯特定律  $\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1}$ , 有  $\tan i_0 = \frac{1}{n_1}$ . 故  $n_1 = \frac{1}{\tan i_0}$ .

例 14 两尼科耳棱镜的主截面间的夹角由  $45^\circ$  转到  $60^\circ$ . 试求:

(1) 当入射光是自然光时, 转动前后透射光强度之比;

(2) 当入射光是线偏光时, 转动前后透射光强度之比.

解 (1) 设自然光强度为  $I_0$ , 转动前有  $I_1 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 45^\circ = \frac{1}{4} I_0$ , 转动后有  $I_2 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 60^\circ = \frac{1}{8}$

$I_0$ , 故  $\frac{I_1}{I_2} = 2$ .

(2) 仍设线偏光强度为  $I_0$ , 转动前有

$$I_1 = I_0 \cos^2 \alpha \times \cos^2 45^\circ = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \alpha.$$

式中,  $\alpha$  为入射光振方向与第一个尼科耳主截面之夹角.

转动后有  $I_2 = I_0 \cos \alpha \times \cos^2 60^\circ = \frac{1}{4} I_0 \cos^2 \alpha$ , 故  $\frac{I_1}{I_2} = 2$ .

## 考研真题解析

- 1 在单色光杨氏干涉实验中,一条光路上放置一块玻璃片,它的折射率为  $n$ ,厚度为  $d$ . 设无玻璃片时,接收屏中心点处的光强为  $I_0$ . 忽略玻璃片的吸收,求:

- (1) 有玻璃片时接收屏中心点处的光强;  
(2)  $d$  取什么值时,接收屏中心处的光强最小?

(中国科学院 2006 年硕士学位研究生入学考试试题)

**思路分析** 无玻璃片时,接收屏中心点处的光强  $I_0$  即为光程差为 0 时,接收屏中心点处的光强. 当有玻璃片时,光程差改变,依据干涉光强公式  $I = I_0 \cos^2(\Delta\varphi/2)$  可得改变后的光强. 光强最小时,则根据干涉光强公式  $I = I_0 \cos^2(\Delta\varphi/2)$  可以确定玻璃片厚度  $d$ .

**解** (1) 当放置了玻璃片以后,中心处光强  $I = I_0 \cos^2(\Delta\varphi/2)$ ,其中位相差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi(n-1)d}{\lambda}$$

故

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\pi(n-1)d}{\lambda}$$

- (2) 当  $\Delta\varphi/2 = (k+1/2)\pi$ ,  $d = \frac{(k+1/2)\lambda}{n-1}$ , ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) 时,中心处光强最小.



**思路总结** 若在光路中插一介质片,光程差改变  $(n-1)d$ .

- 2 在双缝干涉装置中,用一透明薄云母片(折射率  $n=1.58$ )覆盖其中的一条狭缝,这时屏幕上原来的第八条明纹正好移动到屏幕中央原来零级明纹的位置. 如果入射光的波长为  $\lambda=500 \text{ nm}$ ,求云母片最小的厚度为多少?

(中国科学院 2007 年硕士学位研究生入学考试试题)

**思路分析** 在双缝干涉装置中,第  $k$  条明纹的光程差应等于  $k\lambda$ .

**解** 云母片最小的厚度为  $d$ . 则覆盖云母片后光程差的改变为

$$\delta = (n-1)d$$

由于屏幕上原来的第八条明纹正好移动到屏幕中央,故有

$$\delta = (n-1)d = 8\lambda$$

$$d = \frac{8\lambda}{n-1} = \frac{8 \times 500}{1.58-1} = 6897 \text{ nm}$$



**思路总结** 若在光路中插一厚度为  $x$  的介质片,光程差将改变  $(n-1)x$ .

- 3 如图 11-12(a) 所示,在两个偏振化方向相互垂直的偏振片  $P_1$  和  $P_2$  之间插入一块  $\Delta = \frac{3\pi}{4}$  的波晶片 K,波晶片的光轴方向与  $P_1$  和  $P_2$  偏振化方向的夹角分别为如图 11-12(b) 所示的  $30^\circ$  和  $60^\circ$ . 一束强度为  $I_0$  的单色平行自然光垂直入射到该装置上,忽略吸收和反射等光的损耗,分别求透射光在 I、II、III 区里的偏振态和光强度.

(哈尔滨工业大学 2004 年硕士学位研究生入学考试试题)

**思路分析** 自然光通过偏振片  $P_1$  后是振动方向与起偏器  $P_1$  的偏振化方向相同的线偏振光, 光强减半; 线偏振光通过波晶片时分解为平行光轴方向和垂直光轴方向的两束线偏振光, 两光通过波晶片  $K$  后, 相位差为  $\Delta = \frac{3\pi}{4}$ , 合成为椭圆偏振光, 光强不变; 两线偏振光再经过检偏器  $P_2$  后, 偏振态与  $P_2$  偏振化方向相现的线偏振光, 但两光已满足相干条件, 按相干叠加进行光强的计算。

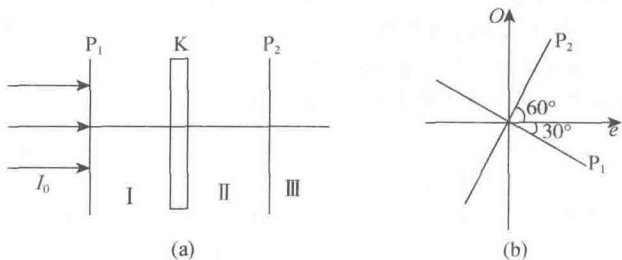


图 11-12

**解** 自然光通过偏振片后, 第 I 区是线偏振光, 振动方向与透振方向相同, 光强为

$$I_1 = \frac{I_0}{2} = A_1^2$$

线偏振光通过波晶片时分解为平行于光轴方向的 e 光和垂直于光轴方向的 o 光, 振幅分别为

$$A_e = A_1 \cos 30^\circ, A_o = A_1 \sin 30^\circ$$

两线偏振光通过波晶片  $K$  后, 相位差为  $\Delta = \frac{3\pi}{4}$ , 合成为椭圆偏振光, 两光进行非相干叠加

$$A^2 = A_1^2 \sin^2 30^\circ + A_1^2 \cos^2 30^\circ = A_1^2 = I_1$$

故光强不变。

两线偏振光再经过检偏器  $P_2$  后, 偏振态为与  $P_2$  偏振化方向相同的线偏振光, 两光透过  $P$  的振幅相同, 为


$$A_{2e} = A_{2o} = A_1 \cos 30^\circ \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} A_1$$

由于  $P_1$  和  $P_2$  偏振化方向相互垂直, 所以附加一个  $\pi$  的相位差, 故总相位差为

$$\Delta' = \Delta - \pi = \frac{3\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4}$$

最后的光强为

$$\begin{aligned} I &= A_{2e}^2 + A_{2o}^2 + 2A_{2e}A_{2o} \cos \frac{\pi}{4} \\ &= 2A_{2e}^2 (1 + \cos \frac{\pi}{4}) \\ &= \frac{3}{8} A_1^2 (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &= \frac{I_0}{16} (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \end{aligned}$$

 **思路总结** 偏振态的分析是研究与偏振现象有关的问题的基础,各元器件在影响偏振态方面的作用必须十分清晰。

偏振片是利用各向异性晶体的二向色性,只有与偏振片的偏振化方向相同的振动才全通过(理想的偏振片)。波晶片是光轴平行于入射表面的单轴晶体薄片,线偏振光通过波晶片后分解成两束互垂直的线偏振光,两束光传播方向一致,且具有固定的光程差 $|n_o - n_e|d_o$ 。在此区间,两束光频率相同、振动方向垂直、有固定相位差,所以偏振态一般是椭圆偏振光。

在计算叠加光强时,必须清楚是相干叠加还是非相干叠加,如本题的第Ⅱ区是相干叠加,故必须考虑相干项。

在偏振光的干涉实验中,还需注意两偏振片的偏振化方向的夹角对相干光的光程差的影响。

- 4 垂直入射的白光,从放置在空气中均匀的薄膜表面反射,对于波长 $\lambda_1 = 680 \text{ nm}$ 的光有一个干涉极大,而对波长为 $\lambda_2 = 510 \text{ nm}$ 的光又有一个干涉极小。已知此薄膜的折射率 $n = 1.33$ ,求它的最小厚度。

(中国科学院2006年硕士学位研究生入学考试试题)

**思路分析** 当反射光干涉极大时,光程差为波长的整数倍;而当反射光干涉极小时,光程差为半波长的奇数倍。

**解** 设薄膜的厚度为 $d$ ,考虑半波损失,波长为 $\lambda_1, \lambda_2$ 的光满足

$$\begin{cases} 2nd + \lambda_1/2 = k_1\lambda_1 & \text{①} \\ 2nd + \lambda_2/2 = (2k_2 + 1)\lambda_2/2 & \text{②} \end{cases}$$

其中, $k_1, k_2$ 均为整数。

由式①、②可得

$$2nd = \left(k_1 - \frac{1}{2}\right)\lambda_1 = k_2\lambda_2$$

将波长 $\lambda_1 = 680 \text{ nm}, \lambda_2 = 510 \text{ nm}$ 代入上式,解得


$$k_2 = 2(2k_1 - 1)/3$$

由于 $k_1, k_2$ 只能取整数,所以 $(k_1, k_2) = (2, 2), (5, 6), (8, 10), \dots$

由方程①,可得

$$d = \frac{(k_1 - 1/2)\lambda_1}{2n}$$

当 $k_1 = 2$ 时,可得薄膜的最小厚度为 $d = 383 \text{ nm}$ 。

 **思路总结** 反射光干涉极大的膜可以作增反膜,反射光干涉极小(透射极大)的膜可以作增透膜。

- 5 用钠黄光( $\lambda = 589.3 \text{ nm}$ )观察迈克耳孙干涉仪的等倾条纹,开始时视场中共看到10个亮环,中心为亮斑,然后移动干涉仪一臂的平面镜,先后看到10个亮环缩进中央,而视场中除中心为亮斑外,还剩下5个亮环。试求:开始时中心亮斑的干涉级次和移动平面镜后最外一个亮环的干涉级次。

(北京大学2000年硕士学位研究生入学考试试题)

**思路分析** 迈克耳孙干涉仪的等倾条纹是一系列的同心圆条纹,中央亮斑次最高,由中央向外亮环的级次逐个减小,观察到的最外围的亮环对应着视场或视场角所受的限制范围.移动一臂的平面镜后,看到亮环缩进中心,表明中心亮斑级次减小,即意味着空气层的厚度减小了.空气层厚度减小后,等倾圆条纹变得较为稀疏,在同样的视场范围内看到的亮环数将会减少.本题是通过条纹的相对级次的变化来求条纹的绝对级次.

等倾条纹的光程差公式为

$$2d\cos\gamma$$

式中, $\gamma$ 是光线的折射角.

若  $2d\cos\gamma = k\lambda (k=0,1,2,\dots)$  则相应点亮纹;

若  $2d\cos\gamma = (2k+1)\frac{\lambda}{2} (k=0,1,2,\dots)$  则相应点是暗纹.

在中心点, $i=0, \gamma=0$ ,所以光程差为  $2d$ .

**解** 设开始时中心亮斑的干涉级次为  $k$ ,则最外的第 10 个亮环的级次为  $(k-10)$ .那么中心亮斑和最外亮环应分别满足下列关系式

$$2d = k\lambda$$

$$2d\cos\gamma = (k-10)\lambda$$

式中, $\gamma$ 是视场边缘对应的视场角(折射角).

由上述两式可得

$$\cos\gamma = \frac{k-10}{k} \quad ①$$

平面镜移动  $\Delta d$  后,中心级次减小 10 级,变为  $(k-10)$  级,此时视场中共有 5 个亮环,最外的亮环的级次应为  $k-10-5 = k-15$  级,故有

$$2(d+\Delta d) = (k-10)\lambda$$

$$2(d+\Delta d)\cos\gamma = (k-15)\lambda$$

同样由上述两式可得

$$\cos\gamma = \frac{k-15}{k-10} \quad ②$$

由式①和式②,有

$$\cos\gamma = \frac{k-15}{k-10} = \frac{k-10}{k}$$

得

$$k=20$$

所以,移动平面镜后中心亮斑级次为  $k-10=20-10=10$  级,最外亮环的级次就是

$$k-15=20-15=5 \text{ 级}$$



**思路总结** 正确地写出相应条纹满足的光程差公式是解此题的关键.对等倾条纹应找出某级条纹对应的光线倾角;对等厚条纹应找出某级条纹对应的薄膜厚度.需特别注意的是,等倾条纹的中央级次最高.

6 光栅夫琅禾费衍射,已知波长为  $\lambda=600\text{ nm}$  的平行光正入射,其第 1 级谱线的衍射角为  $\theta_1=25^\circ$ ,求:

(1)光栅常数  $d$ ; (2)最多能看到的光谱级次  $m_{\max}$ ; (3)第 2 级光谱的角色散  $D_2$ ; (4)欲在第 2 级光谱中分辨出  $600\pm 0.01\text{ nm}$  的光谱,光栅的缝数  $N$ .

(西安交通大学 2006 年硕士学位研究生入学考试试题)

思路分析 利用光栅方程和光栅角色散、线色散和分辨本领进行计算.

解 (1)由光栅方程  $d\sin\theta=m\lambda(m=0,\pm 1,\pm 2,\dots)$

$$\text{代入已知条件有} \quad d = \frac{600}{\sin 25^\circ} = 1.42\mu\text{m}$$

(2)正入射时,最大衍射角是  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$

$$\text{所以屏上可见的最高级次是} \quad m_{\max} = \pm \frac{d}{\lambda} = \pm \frac{1.42}{0.6} = \pm 2.37 \approx \pm 2$$

即在屏上看到的最高级次是 2 级,最多能看到的光谱线有 5 条.

(3)根据角色散公式

$$D = \frac{\partial\theta}{\partial\lambda} = \frac{k}{d\cos\theta}$$

得第 2 级时

$$D_2 = \frac{\partial\theta_2}{\partial\lambda} = \frac{2}{d\cos\theta_2} \quad (1)$$

又有第 2 级满足的光栅方程

$$d\sin\theta_2 = 2\lambda$$

得

$$\sin\theta_2 = \frac{2\lambda}{d} = \frac{2 \times 0.6}{1.42} = 0.8450 \quad (2)$$

$$\text{式(2)代入式(1)得} \quad D_2 = \frac{k}{d\cos\theta_2} = \frac{2}{1.42 \sqrt{1-0.8450^2}} = 2.7\mu\text{m}$$

(4)由光栅的分辨本领

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$$

有

$$N = \frac{\lambda}{m\delta\lambda} = \frac{600}{2 \times 0.01} = 3 \times 10^4$$



**思路总结** 光栅的分辨本领是光栅的一个重要表征量.由夫琅禾费衍射装置图可以看出,光栅分辨本领中包含着两个基本物理内容.第一,实用的光栅首先要有好的色散本领,即将各波长尽量地分开;第二,按瑞利判据,要求各波长极大的半角宽度要尽量地窄.上述两点构成了光栅的分辨本领为  $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$ ,它的物理含义是,在某波长  $\lambda$  附近可分辨的另一波长  $\lambda + \delta\lambda$  的光谱与光栅的总条数  $N$  及观察的级次  $m$  有关.

7 钠灯的双线为  $\lambda_1=589.0\text{ nm}$  和  $\lambda_2=589.6\text{ nm}$ ,现钠灯经准直后垂直入射到一宽为  $D=50\text{ nm}$  的透射光栅上(1200 条/mm),光栅后有一焦距  $f=1\text{ m}$  的透镜,在后焦面处放置观察屏.求:

(1) $\lambda_1=589.0\text{ nm}$  的 1 级大的衍射角  $\theta_1$ ;

(2) $\lambda_1=589.0\text{ nm}$  和  $\lambda_2=589.6\text{ nm}$  两波长的 1 级主极大在屏上分开的距离  $\Delta x$ ;

(3) $\lambda_1=589.0\text{ nm}$  的 1 级主极大在屏上的宽度  $\Delta x_1$ ;

(4)此光栅是否可分辨  $\lambda=589.0\text{ nm}$  和  $\lambda_2=589.6\text{ nm}$  两双线?

(2006 年硕士学位研究生入学考试试题)

**思路分析** 利用光栅方程可以求出主极大的衍射角,用多光束干涉极小的光程差  $d\sin\theta = \frac{k\lambda}{N}$ , 求出主极大的角宽度,进而可以求出屏上的线宽度. 用光栅的分辨本领关系式求出可分辨的最小波长差  $\delta\lambda$ .

**解** 由已知条件可得光栅常数  $d = \frac{1}{1200} \text{ mm}$

光栅的总条纹  $N = 50 \times 1200 = 60000$  条

(1) 由光栅方程有  $d\sin\theta_1 = 1 \times \lambda_1$

得  $\sin\theta_1 = \frac{\lambda_1}{d} = \frac{589.0 \times 10^{-6}}{1/1200} = 0.7068$

衍射角  $\theta_1 = \sin^{-1} 0.7068 = 44.98^\circ$

(2) 同样由光栅方程得  $\sin\theta_2 = \frac{589.6 \times 10^{-6}}{1/1200} = 0.7075$

衍射角  $\theta_2 = \sin^{-1} 0.7075 = 45.03^\circ$

$\lambda_1 = 589.0 \text{ nm}$  在屏上的位置  $x_1 = f \tan\theta_1$

$\lambda_2 = 589.6 \text{ nm}$  在屏上的位置  $x_2 = f \tan\theta_2$

分开的距离为  $\Delta x = f(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)$

$= \tan 45.03^\circ - \tan 44.98^\circ = 1.75 \times 10^{-3} \text{ m}$

(3) 第 1 级主极大半角宽度

$$\delta\theta = \frac{\lambda_1}{Nd\cos\theta_1} = \frac{589.0 \times 10^{-6}}{6 \times 10^4 \times (1/1200) \cos 44.98^\circ}$$

$$= 1.665 \times 10^{-9} \text{ rad}$$

则第 1 级主极大屏上的宽度  $\Delta x_1 = 2f\delta\theta = 1.33 \times 10^{-9} \text{ m} = 1.33 \text{ nm}$

(4) 使用该光栅可分辨钠双线的最低级次是

$$m = \frac{R}{N} = \frac{\lambda}{(\lambda_2 - \lambda_1)N} = \frac{589.0}{0.6 \times 2 \times 10^4} = 0.05$$

此光栅在第 1 级就可将两波长分开,更何况是更高级了,所以使用此光栅可以分辨出钠黄双线.



**思路总结** 与上题类似,说明了光栅的分辨本领是光栅的一个重要表征量. 在实际选用光栅

时必须考虑分辨本领  $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$ , 在高级次上观察,选条数多的光栅都可提高测量的精度.

**8** 一电子显微镜的数值孔径为  $0.02 \text{ mm}$ , 电子束的加速电压为  $V = 10^4 \text{ V}$ . 试求 (1) 该显微镜能分辨的两物点的最小距离; (2) 是人眼分辨本领的多少倍?

(西安交通大学 2006 年硕士学位研究生入学考试试题)

**思路分析** 利用显微镜的分辨本领公式进行计算,根据德布罗意波公式计算电子的波长.

**解** (1) 电子显微镜所能分辨的两物点的最上距离是

$$\delta l = \frac{0.61\lambda}{n \sin U}$$

其中

$$n \sin U = 0.02$$

电子波长为

$$\lambda = \frac{12.25}{\sqrt{V}} = \frac{12.25}{\sqrt{10000}} = 0.0125 \text{ nm}$$

最后得

$$\delta l = \frac{0.61\lambda}{n \sin U} = \frac{0.61 \times 0.125}{0.02} = 0.38 \text{ nm}$$

(2) 人眼瞳孔直径约  $D=2\sim 3 \text{ mm}$ , 入射波长按  $\lambda=550 \text{ nm}$  代入

$$\delta\varphi = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

得人眼能分辨的最小角度约为

$$\delta\varphi = 1.22 \times \frac{550}{2.5 \times 10^6} = 2.684 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

再按明视距离为  $L=25 \text{ cm}$  计算, 人眼参分辨两物点的最小距离是

$$\delta l' = L\delta\varphi = 250 \times 2.684 \times 10^{-4} = 6.71 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

$$\frac{\delta l'}{\delta l} = \frac{6.71 \times 10^{-2}}{3.8 \times 10^{-7}} = 1.77 \times 10^5$$

电子显微镜的分辨本领是人眼分辨本领的 10 万倍。



**思路总结** 显微镜的分辨本领与波长有关, 入射波长愈短, 则分辨的物点间距愈小; 与物方的折射率有关; 折射率愈大, 则分辨的物点时间距愈小。故在使用光学显微镜时载物台上总要用折射率高的透明介质将物包裹, 采用短波光入射。光学显微镜的分辨本领要比电子显微镜低 4~5 个量级, 这是因为可见光的波长是几百个 nm。

9 (华南理工大学) 如图 11-13 所示, 平行单色光垂直射到薄膜上, 经上下两个表面反射的两束光发生干涉, 若薄膜厚度为  $e$ , 并且  $n_1 < n_2 > n_3$ ,  $\lambda_1$  为入射光在折射率为  $n_1$  的媒质中的波长, 则两束光反射光在相遇点的相位差为 ( )

A.  $2\pi n_2 e / (n_1 \lambda_1)$

B.  $[4\pi n_2 e / (n_2 \lambda_1)] + \pi$

C.  $[4\pi n_2 e / (n_1 \lambda_1)] + \pi$

D.  $4\pi n_2 e / (n_1 \lambda_1)$

解 答案为 C。

平行单色光垂直照射到薄膜上, 经上下两下表面反射的反射光的集合光程差为  $2n_2 e$ ,  $\lambda_1$  为入射光在折射率为  $n_1$  的媒质中波长, 则真空中的波长为  $\lambda = n_1 \lambda_1$ 。由于  $n_1 < n_2 > n_3$ , 在上表面的反射光出现半波损失, 而下表面的反射光没有出现半损失, 因此要考虑半波损失对光程差的影响, 即在计算上下两个表面的反射光的光程差时, 要加  $\lambda/2 = n_1 \lambda_1 / 2$ , 所以经上下两个表面反射的反射光的几何程差为  $\Delta = 2n_2 e + n_1 \lambda_1 / 2$ 。再根据光程差与相位差的关系, 两束

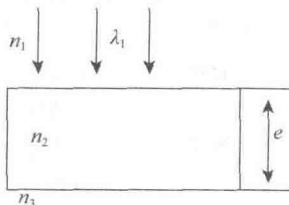


图 11-13

反射光在相遇点的相位差为  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = 4\pi n_2 e / (n_1 \lambda_1) + \pi$ , 所以答案选 C。



**思路总结** 不同的媒质中, 光波的波长是不同的。如果使用的是光程(差), 则要用真空中的光波波长  $\lambda$ 。在折射率为  $n$  的媒质中, 光波波长  $\lambda_n = \lambda/n$ 。

10 (华南理工大学) 光强为  $I_0$  的自然光依次通过两个偏振片  $P_1$  和  $P_2$ 。若  $P_1$  和  $P_2$  的偏振化方向的夹角  $\alpha=30^\circ$ , 则透射偏振光的强度  $I$  是 ( )

A.  $I_0/4$

B.  $\sqrt{3} I_0/4$

C.  $\sqrt{3} I_0/2$

D.  $I_0/8$

E.  $3I_0/8$

解 答案为 E。



光强为  $I_0$  的自然光通过第一个偏振片  $P_1$  后,出射的光是完全偏振光,光矢量振动方向与偏振片  $P_1$  的偏振化方向相同,出射的完全偏振光的强度  $I_0 = I_0/2$ .

通过第二个偏振片  $P_2$  后,根据马吕斯定律,出射的还是完全偏振光,光矢量振动方向与偏振片  $P_2$  的偏振化方向相同,出射的完全偏振光的强度  $I = I_1 \cos^2 \alpha$ ,其中  $\alpha$  是两偏振片  $P_1$  和  $P_2$  的偏振化方向的夹角,则透射偏振光的强度为

$$I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 30^\circ = \frac{3}{8} I_0$$



**思路总结** 自然光入射到偏振片,出射的是完全偏振光,光强为  $I = I_0/2$ . 完全偏振光入射到偏振片时,出射的光强要用马吕斯定律  $I = I_0 \cos^2 \alpha$  计算,式中  $\alpha$  是完全偏振光的光矢量振动方向与偏振片的偏振化方向的夹角.

## 课后习题

**9-1 解题过程** 当  $S$  点下移至  $S'$  点时,在这个过程中  $S$  点通过缝到屏上的光程差为 0,没有变化,所以间距不变,只是光源点  $O$  从  $O$  点面上移至  $O'$  点,本题选(B).

**11-2 解题过程** 由题可以知,  $n_1 < n_2, n_2 > n_3$ , 则  $n_2$  的折射率为最大,它们的光程差为  $\Delta = 2n_2 e \pm \frac{\lambda}{2}$ , 本题选 B.

**11-3 解题过程** 由于产生等原干涉系,所以条纹数目可用计算式  $n = \frac{2d}{\lambda}$ , 由于向左移动两个滚柱的时候  $d$  和  $\lambda_n$  的值始终不变,则  $n$  不变,即数目不变,间距变小,选(C).

**11-4 知识要点** 光程差定义式:  $D = nL$

**逻辑推理** 根据题意,条纹移走 7 根时,光程差的改变为波长的 7 倍. 而由光程差的定义可知,放入薄膜后,两臂光程差改变,比较可解得薄膜的厚度.

**解题过程** 设薄膜厚度为  $h$ , 放入薄膜,而臂光程差设  $2(n-1)h$ , 条纹移过 7 根,指光程改变  $7\lambda$ , 所以有

$$2(n-1)h = 7\lambda, \quad h = \frac{7\lambda}{2(n-1)} = 5.154 \times 10^{-6} \text{ m}$$

**11-5 解题过程** 单缝衍射公式  $b \sin \theta = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}$  可以得出  $b \sin \theta = \frac{3}{2} \lambda$ , 对应第一级明纹, 这样单缝处波阵面可分成 3 个半波带, 选(B).

**11-6 解题过程** 可能观察到的最大级次为  $k = \frac{d \sin(\frac{\pi}{2})}{\lambda} = \frac{1.0 \times 10^{-4} \sin(\frac{\pi}{2})}{550 \times 10^{-3}} = 1.82$ , 选(D).

**11-7 解题过程** 分析题中已知条件知:  $I_1 = \frac{1}{2} I_0$ , 当偏振光透过  $P_2$  以后,  $I_2 = I_1 \cos^2 45^\circ = \frac{1}{4} I_0$ , 再经过  $P_3$  以后则有  $I_3 = I_2 \cos^2 45^\circ = \frac{1}{8} I_0$ , 所以本题选(C).

**11-8 解题过程** 与自然光从空气中射入玻璃时,玻璃中的折射率大于空气中的,反射光是偏振光,且

光矢量的振动方向垂直于入射面, 本题选(B).

- 11-9 **知识点窍** 光线从光疏介质射入光质时会发生全反射, 临界角  $i_c = \arcsin \frac{n_1}{n_2}$ , 其中  $n_1$  为光疏介质的折射率,  $n_2$  为光密介质的折射率.

**逻辑推理** 代入上述全反射公式:  $i_c = \arcsin \frac{1}{n} \approx 48.8^\circ$

顶角  $\alpha = 2i_c = 97.6^\circ$

**解题过程** 选(C)

- 11-10 **知识点窍** 双缝干涉暗纹位置公式:  $x = \pm \frac{d'}{d} (2k+1) \frac{\lambda}{2}$

**逻辑推理** 直接由双缝干涉、暗纹位置求解.

**解题过程** 根据题目知, 第5条暗纹到中央明纹的距离为

$$x = \frac{22.78}{2} \times 10^{-3} \text{ m}$$

由公式

$$x = \frac{d'}{d} (2k+1) \frac{\lambda}{2}, \text{ 且 } k=4$$

得

$$\lambda = \frac{2x}{2k+1} \cdot \frac{d}{d'}$$

将  $x = \frac{22.78}{2} \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $d = 0.30 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $d' = 1.2 \text{ m}$  及  $k=4$  代入式得

$$\lambda = 6.328 \times 10^{-7} \text{ m} = 632.8 \text{ nm}$$

这是红光.

- 11-11 **逻辑推理** 设两明纹间隔为  $\Delta x$ , 则由中央明纹两侧第5级明纹间距  $x_5 - x_{-5} = 10\Delta x$  可求出  $\Delta x$ . 再由公式  $\Delta x = d'\lambda/d$  即可求出双缝间距  $d$ .

**解题过程** 由题可知设两条明纹之间的距离为  $\Delta x$ , 则

$$\Delta x = 1.22 \times 10^{-3} \text{ m}$$

根据干涉条件知

$$d = \frac{d'}{\Delta x} \lambda = \frac{3 \times 10}{1.22 \times 10^{-3}} 546.1 \times 10^{-5} = 1.34 \times 10^{-4} \text{ m}$$

- 11-12 **知识点窍** 劳埃德镜实验

**逻辑推理** 由发射器直接发射的微波与经水面反射后的微波相遇可互相干涉, 形成的干涉结果与缝距为  $2d$ 、缝屏间距为  $D$  的双缝干涉相似, 如图(b)所示.

**解题过程** 接收器测到极大值时:  $h = D \tan \theta$

当  $\theta$  角很小时,  $\tan \theta \approx \sin \theta$ , 则有  $h = D \sin \theta$

而根据题中条件设  $2d \sin \theta + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$ ,  $\sin \theta = \frac{2k\lambda - \lambda}{4d}$

则

$$h = D \sin \theta = \frac{(2k-1)\lambda D}{4d}$$

离地距离

$$h = \frac{\lambda D}{4d}$$

- 11-13 **逻辑推理** 由折射定律  $n = \frac{\sin \theta}{\sin \theta_1}$  可推导出折射角  $\theta_1$ .

光在不同介质中频率不变,速度、波长变为原来的 $\frac{1}{n}$ 倍。

S到C的几何路程由几何关系可得到,但光程 $=nL$ 。

**解题过程** (1)由折射定律  $n = \frac{\sin\theta}{\sin\theta_1}$  得折射角为

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{\sin\theta}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{\sin 30^\circ}{1.23}\right) = 24^\circ$$

(2)单色光在透明介质中的速度

$$v_n = \frac{c}{n} = 2.44 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

光在介质中的波长为

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} = 4.88 \times 10^{-7} \text{ m} = 488 \text{ nm}$$

光在介质中的频率不变,应等于在真空中的频率

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 5.0 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

(3)S到C的几何路程为

$$SC = SA + AB + BC = SA + \frac{d}{\sin\theta_1} + BC = 0.111 \text{ m}$$

S到C的光程为

$$\sum n_i L_i = SA \times 1 + AB \times n + BC \times 1 = 0.114 \text{ m}$$

#### 11-14 知识点 光程定义: $D = nL$

双缝干涉中的光程差

$$\Delta = D_1 - D_2 = \begin{cases} k\lambda & \text{对应第 } k \text{ 级明纹} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{对应第 } (k+1) \text{ 级暗纹} \end{cases}$$

**逻辑推理** 如题 11-12 图所示,对于原来中央极大点 O,在加入介质薄片之前,两相干光的光程差  $\Delta = 0$ ;在加入介质薄片后,虽然两相干光的几何路相同,但光程却不同,即  $\Delta \neq 0$ ,故 O 点不再是中央明纹,整个条纹发生平移。按题意:  $D_1 = n_1 d + (r_1 - d)$ ,  $D_2 = n_2 d + (r_2 - d)$ ,对于 O 点  $r_1 = r_2$ ,故插入介质薄片后两相干光到达 O 点的光程  $\Delta = D_1 - D_2 = k\lambda$ ,式中  $k=5$ ,即  $\Delta = (n_2 - n_1)d = 5\lambda$ ,由此可解出薄片厚度  $d$ 。

**解题过程** 设插入介质薄片前,两相干光到达 O 点的光程均为  $r$ (等于几何路程),则插入介质薄片后,光程分别为

$$D_1 = n_1 d + (r - d) \quad D_2 = n_2 d + (r - d)$$

$$\text{光程差} \quad \Delta = D_2 - D_1 = (n_2 - n_1)d$$

按题意,O点为第 5 级明纹,可知

$$\Delta = (n_2 - n_1)d = 5\lambda$$

$$\text{所以} \quad d = \frac{5\lambda}{n_2 - n_1} = 8.0 \mu\text{m}$$

#### 11-15 知识点 薄膜干涉

**解题过程** 根据薄膜干涉对反射光加强,有

$$2ne + \lambda/2 = k\lambda \quad (k=1,2,\dots)$$

$$\lambda = 4ne / (2k - 1)$$

在可见光范围,  $k=2$  时,  $\lambda=668.8 \text{ nm}$ (红光)

$k=3$  时,  $\lambda=401.3 \text{ nm}$ (紫光)

故正面呈红紫色. 同理, 对透射光加强, 有

$$2ne = k\lambda \quad (k=1, 2, \dots)$$

在可见光范围仅有  $k=2$  时,  $\lambda=501.6 \text{ nm}$ (绿光), 即背面呈绿色.

**11-16 知识要点** 垂直入射时, 薄膜干涉的光程差:  $\Delta = 2n_2d + (0 \text{ 或 } \frac{\lambda}{2})$

$$\text{干涉条件: } \Delta = \begin{cases} k\lambda & \text{加强 } k=1, 2, \dots \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{减弱 } k=0, 1, \dots \end{cases}$$

**逻辑推理** 按题意, 本题所用的增透膜将使  $\lambda=550\text{nm}$  的光在透射中得到加强. 在此只需求出透射的两相干光束的光程差  $\Delta$ , 再利用干涉加强条件确定最小厚度  $d_{\min}$ .

本题也可由反射的相消条件来确定透射的加强情况.

**解题过程** **解法一** 因为空气的折射率  $n_1=1$ , 故有  $n_1 < n_2 < n_3$ , 则对透射光而言, 两相干光的

$$\text{光程差 } \Delta_1 = 2n_2d + \frac{\lambda}{2}$$

由于干涉加强条件  $\Delta_1 = k\lambda (k=1, 2, \dots)$  得

$$2n_2d + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

$$\text{解得 } d = (k - \frac{1}{2}) \cdot \frac{\lambda}{2n_2}$$

取  $k=1$ , 则  $d_{\min} = 99.6\text{nm}$ .

**解法二** 由反射与透射的互补性, 波长为  $\lambda=550\text{nm}$  的光在透射中得到加强, 则在反射中一定减弱, 而反射光的光程差为  $\Delta_2 = 2n_2d$ . 由于干涉减弱条件  $\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$  得:

$$d = (2k+1) \frac{\lambda}{4n_2}$$

取  $k=0$ , 则

$$d_{\min} = 99.6\text{nm}.$$

**11-17 逻辑推理** 在劈尖干涉中, 细丝直径由公式  $d = \frac{\lambda}{2nb}L$  表示. 此处  $b$  为条纹间距. 本题中 30 条条

纹总宽度为  $\Delta x$ , 则  $b = \frac{\Delta x}{29}$ .

**解题过程** 因 30 条条纹的总宽度为  $\Delta x = 4.295 \times 10^{-3}\text{m}$ , 故条纹间距为  $b = \frac{\Delta x}{29}$

由细丝直径公式  $d = \frac{\lambda}{2nb}L$  得:

$$d = \frac{29\lambda L}{2n \cdot \Delta x} = 5.75 \times 10^{-5}\text{m}.$$

**11-18 逻辑推理** 两反射光光程差为  $\Delta = 2ne + \lambda/2$ . 由反射光暗纹公式  $2ne_k + \lambda/2 = (2k+1)\lambda/2, k=0, 1, 2, 3, \dots$ , 可以求厚度  $e_k$ . 又 AB 中共有 11 条暗纹(因半波损失, B 端也为暗纹),

则  $k$  取 10 即得薄膜厚度.

**解题过程** 根据推理

$$2ne_k + \lambda/2 = (2k+1)\lambda/2 \quad (k=0,1,2,3,\dots)$$

取  $k=10$ , 得薄膜厚度  $e_{10} = 10\lambda/2n = 1.4 \times 10^{-6} \text{ m}$ .

**11-19 知识点窍** 空气劈尖干涉, 相邻条纹的厚度差  $\Delta d = \frac{\lambda}{2n_2}$  (式中空气折射率  $n_2 \approx 1$ )

**逻辑推理** 待测钢珠与  $a, b$  直径不同时, 则由劈尖干涉知识求解.

**解题过程** 若待测钢珠  $C$  与  $a, b$  直径不同时, 将在两玻璃之间形成一空气劈尖, 设钢珠的直径

差为  $\Delta x$ , 则  $\Delta x = N \cdot \frac{\lambda}{2n_2}$ , 由图知  $N=6 \frac{1}{4}$ , 又因  $n_2 \approx 1$

$$\text{所以} \quad \Delta x = \frac{N\lambda}{2} = 1.81 \times 10^{-6} \text{ m}$$

当距离  $d$  稍有改变时,  $a, b$  与  $C$  之间条纹数目未变, 故不影响检验结果.

**11-20 解题过程** 空气劈光干涉时, 相邻条纹的厚度为

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2n}$$

当为空气时,

$$d_1 = \frac{\lambda}{2\theta}$$

当为液体时,

$$d_2 = \frac{\lambda}{2n\theta}$$

$$\Delta d = d_1 - d_2 = \frac{\lambda}{2\theta} - \frac{\lambda}{2n\theta}$$

$$\text{即可以得出} \quad \theta = \frac{\lambda \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2\Delta d} = 1.7 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

**11-21 知识点窍** 热膨胀公式:  $\Delta l = \alpha l \Delta T$

**逻辑推理** 由热膨胀公式  $\Delta l = \alpha l \Delta T$  可知, 要求热膨胀系数, 还要求出膨胀量  $\Delta l$ .

由于样品受热膨胀、表面上移, 在倾角  $\theta$  不变的条件下, 样品与平面玻璃间的空气的整体厚度减小, 根据等厚干涉原理, 干涉条纹将整体向右平移, 原  $k$  级条纹从  $a$  移至  $a'$ , 如图 11-19(b) 所示, 移过某一固定观察点条纹数目  $N$  与  $\Delta l$  的关系为:  $\Delta l = N \frac{\lambda}{2}$ .

**解题过程** 样品表面上移的高度  $\Delta l = N \frac{\lambda}{2}$  ①

热膨胀公式

$$\Delta l = \alpha l \Delta T$$
 ②

由①、②式得

$$\alpha = \frac{N\lambda}{2l\Delta T} = 1.51 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

**11-22 知识点窍** 牛顿环干涉暗环半径  $r = \sqrt{kR\lambda}$ , 其中  $k=0,1,2,\dots$

**逻辑推理** 直接由上式求解.

**解题过程** 牛顿环暗环半径

$$r = \sqrt{kR\lambda}$$

所以

$$\Delta r = r_4 - r_1 = \sqrt{4R\lambda} - \sqrt{R\lambda} = \sqrt{R\lambda}$$

所以  $\frac{\Delta r}{\Delta r} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$ , 由此得未知波长为

$$\lambda' = \left(\frac{\Delta r'}{\Delta r}\right)^2 \lambda = 546 \text{ nm}$$

- 11-23 **逻辑推理** 当透镜与玻璃之间充以折射率为  $n$  的液体时, 在液体中, 波长由  $\lambda$  变为  $\lambda'$ , 且  $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$

故明环半径应为

$$r' = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right) R \cdot \frac{\lambda}{n}}$$

**解题过程** 由牛顿环明环半径公式  $r = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{R\lambda}{n_2}}$

透镜与玻璃之间为空气时  $n_2 = 1$ ,  $K$  级明纹的直径为:

$$d_k = 2r_k = 2\sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right) R\lambda} \quad (1)$$

透镜与玻璃之间为液体时,  $n_2 = n$ ,  $K$  级明纹的直径为:

$$d'_k = 2r'_k = 2\sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right) R \cdot \frac{\lambda}{n}} \quad (2)$$

联立①、②式, 并将已知数据代入得液体的折射率为:

$$n = \left(\frac{d_k}{d'_k}\right)^2 = 1.22$$

- 11-24 **知识点窍** 牛顿环干涉现象

**解题过程** (1) 由于干涉条件可知, 油膜周围光程差为 0, 故周边是明环.

$$(2) \text{暗环条件: } \Delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} = 2n_2 d_m$$

可以得出令  $k = 3.9$ , 即  $k \approx 3$

即可以出现 4 个完整的暗环.

- 11-25 **知识点窍** 牛顿环干涉暗条纹形成条件:

$$\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda$$

**逻辑推理** 只需根据牛顿环的几何关系, 求得  $h$  同  $r_k$ 、 $R_1$ 、 $R_2$  的相互几何关系, 代入暗纹形成条件  $\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda$  中即可.

**解题过程** 假设第  $k$  个暗环处空气层厚度为  $h$ , 由几何关系易得

$$\begin{cases} r_k^2 = R_2^2 - (R_2 - h_2)^2 \approx 2R_2 h_1 \\ r_k^2 = R_1^2 - (R_1 - h_1)^2 \approx 2R_1 h_1 \end{cases}$$

$$\text{求得 } h = h_1 - h_2 = \frac{1}{2} r_k^2 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

代入暗条纹形成条件中:

$$2h + \frac{\lambda}{2} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda$$

证出

$$r_k^2 = k\lambda \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

代入求得  $R_2 = 102.8 \text{ cm}$

- 11-26 **解题过程** 迈克耳孙干涉仪中, 可动镜  $M$  移动距离  $d$  时, 两条光路的光程差为  $2d$ , 产生的条纹移动的条数为  $\Delta N$ . 并有  $\Delta N \cdot \lambda = 2d$

所以  $\lambda = 2d / \Delta N = 563.6 \text{ nm}$

- 11-27 **知识点拨** 单缝衍射的明纹条件:  $b \sin \varphi = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}$

半波带数目:  $N = 2k+1$  (以上式中,  $k$  取自然数)

**逻辑推理** 对于确定的观察点  $P$ ,  $\varphi$  是确定值, 由明纹条件  $b \sin \varphi = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}$  (式中  $k=1, 2, \dots$ ) 可知, 对应某一整数  $K$ , 有确定的波长  $\lambda$  与之对应, 由此可求出在可见光范围内入射光的波长, 相应的  $K$  值即为点  $P$  条纹级数, 而半波带的数目  $N = 2k+1$ .

**解题过程** (1) 由于  $b \ll f$ , 所以对点  $P$  而言,  $\sin \varphi \approx \frac{x}{f}$

根据单缝衍射明纹条件  $b \sin \varphi = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$ , 可得

$$\frac{bx}{f} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

即

$$\lambda = \frac{2bx}{(2k+1)f} \quad \text{式中 } k=1, 2, 3, \dots$$

取可见光范围  $400 \text{ nm} < \lambda < 760 \text{ nm}$  代入上式, 可知  $k$  值的范围为  $2.27 < k < 4.75$ .

显然整数  $k$  只有两个取值:  $k=3$  和  $k=4$ .

$k=3$  时,  $\lambda_1 = 600 \text{ nm}$ ;  $k=4$  时,  $\lambda_2 = 466.7 \text{ nm}$

(2) 点  $P$  条纹对应级次为:  $\lambda_1 = 600 \text{ nm}$  时,  $k=3$ ;  $\lambda_2 = 466.7 \text{ nm}$  时,  $k=4$ .

(3) 当  $\lambda_1 = 600 \text{ nm}$  时,  $k=3$ , 半波带数目为  $(2k+1)=7$ .

当  $\lambda_2 = 466.7 \text{ nm}$  时,  $k=4$ , 半波带数目为  $(2k+1)=9$ .

- 11-28 **知识点拨** 单缝衍射条件

$$b \sin \varphi = \begin{cases} k\lambda & (\text{暗纹}) \\ (2k+1) \frac{\lambda}{2} & (\text{明纹}) \quad k=1, 2, \dots \end{cases}$$

**逻辑推理** 根据单缝衍射条件求解.

**解题过程** 根据单缝衍射条件

$$b \sin \varphi = \begin{cases} k\lambda & (\text{暗纹}) \\ (2k+1) \frac{\lambda}{2} & (\text{明纹}) \quad k=1, 2, \dots \end{cases}$$

(1) 对应于暗纹, 当  $k=1$  时:  $b \sin \varphi_1 = \lambda$

①

当  $\varphi_1$  很小时

$$\sin \varphi_1 \approx \frac{x_1}{f}$$

②

由①、②式得第一级暗纹到中心的距离为

$$x_1 = \frac{\lambda}{b} f = 1.47 \times 10^{-3} \text{ (m)}$$

(2) 由明纹条件, 当  $k=2$  时

$$b \sin \varphi_2 = (2k+1) \frac{\lambda}{2} = \frac{5}{2} \lambda \quad (3)$$

$$\text{当 } \varphi_2 \text{ 很小时} \quad \sin \varphi_2 \approx \frac{x_2}{f} \quad (4)$$

由③、④式得第二级明纹中心的距离为

$$x_2 = \frac{5 \lambda f}{2 b} = 3.68 \times 10^{-3} \text{ m}$$

(3) 当斜入射时, 对于  $\theta'$  上的条纹位置

$$\text{第一级暗纹} \quad b(\sin 30^\circ - \sin \varphi'_1) = -\lambda \quad (5)$$

$$\text{暗纹中心距离为} \quad x'_1 = f \tan \varphi'_1 \quad (6)$$

$$\text{由⑤、⑥式得} \quad x'_1 = 0.580 \text{ m}$$

$$\text{同理, 第二级明纹} \quad b(\sin 30^\circ - \sin \varphi'_2) = -\frac{5}{2} \lambda \quad (7)$$

$$x'_2 = f \tan \varphi'_2 \quad (8)$$

$$\text{由⑦、⑧式得} \quad x'_2 = 0.583 \text{ m}$$

对于  $O'$  下的条纹位置, 同理得: 第一级暗纹距中心距离

$$x''_1 = f \tan[\arcsin(0.5 - \frac{\lambda}{b})] = 0.575 \text{ m}$$

$$\text{第二级明纹距中心距离} \quad x''_2 = f \tan[\arcsin(0.5 - \frac{5\lambda}{2b})] = 0.572 \text{ m}$$

**11-29 知识要点** 单缝衍射明纹条件:  $b \sin \varphi = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad k=1, 2, \dots$

**逻辑推理** 直接由单缝衍射明纹条件求解

**解题过程** 由单缝衍射明纹条件  $b \sin \varphi = (2k+1) \frac{\lambda}{2}, k=1, 2, \dots$

$$\text{依题意, 对于未知单色光} \quad b \sin \varphi = (2 \times 3 + 1) \cdot \frac{\lambda_1}{2} = \frac{7\lambda_1}{2} \quad (1)$$

$$\text{对于 } \lambda_2 = 600 \text{ nm 的光} \quad b \sin \varphi = (2 \times 2 + 1) \cdot \frac{\lambda_2}{2} = \frac{5\lambda_2}{2} \quad (2)$$

由①、②式得波长为

$$\lambda_1 = \frac{2k_2+1}{2k_1+1} \cdot \lambda_2 = \frac{5}{7} \lambda_2 = 428.6 \text{ nm}$$

**11-30 知识要点** 单缝衍射明纹条件:  $b \sin \varphi = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad k=1, 2, \dots$

光栅方程(明纹条件):  $d \sin \theta = \pm k \lambda \quad k=0, 1, 2, \dots$

(式中  $d = \frac{L}{N}$  为相邻狭缝的间距, 称为光栅常数)

**逻辑推理** 由单缝(光栅)明纹条件及几何关系, 可求出第一级明纹离中心的距离:  $x_1 = x_1(\lambda_1)$

$x_2 = x_2(\lambda_2)$  再由  $\Delta x = x_2 - x_1$  就可求出条纹间距.

**解题过程** (1) 光垂直照射单缝时, 对应第一级明纹的衍射角很小

由明纹条件及几何关系可得

$$b \sin \varphi = \frac{3}{2} \lambda, b \cdot \frac{x}{f} = \frac{3}{2} \lambda$$



所以 
$$x = \frac{3}{2} \frac{\lambda f}{b}$$

所以,当  $\lambda_1 = 400\text{nm}$  时,第一级明纹位置为:

$$x_1 = \frac{3}{2} \frac{\lambda_1 f}{b} = 3.0 \times 10^{-3} \text{m}$$

当  $\lambda_2 = 760\text{nm}$  时,第一级明纹位置为:

$$x_2 = \frac{3}{2} \frac{\lambda_2 f}{b} = 5.7 \times 10^{-3} \text{m}$$

以上两条纹的间距为  $\Delta x = x_2 - x_1 = 2.7 \times 10^{-3} \text{m}$

(2) 光垂直照射光栅时,由光栅方程  $2d \sin \theta = 10\lambda$ ,  $\sin \theta = \frac{x}{f}$ , 第  $k$  级明的位置  $x' =$

$$\frac{k\lambda f}{d}, \text{光栅常数 } d = \frac{10^{-2}}{10^3} \text{m} = 10^{-5} \text{m}$$

所以  $\lambda_1 = 400\text{nm}$  时,第一级明纹位置为:

$$x'_1 = \frac{\lambda_1 f}{d} = 2 \times 10^{-2} \text{m}$$

$\lambda_2 = 760\text{nm}$  时,第一级明纹位置为:

$$x'_2 = \frac{\lambda_2 f}{d} = 3.8 \times 10^{-2} \text{m}$$

以上两条纹的间距为  $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = 1.8 \times 10^{-2} \text{m}$

**11-31 知识点睛** 最小分辨角:  $\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$

**逻辑推理** 根据题意求出车与人距离一定时车灯对人眼的张角. 以张角等于人眼的最小分辨角时,眼睛恰能分辨出车灯.

一般地,当  $\theta \geq \theta_0$  时能分辨,  $\theta < \theta_0$  时,不能分辨.

**解题过程** 由公式  $\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ , 式中  $D$  为瞳孔直径

当人与车相距  $l$  时,相距为  $d$  的两车灯对人眼的张角为:  $\theta = \frac{d}{l}$

$\theta \geq \theta_0$  时能分辨两车灯,  $\theta = \theta_0$  时恰好能分辨出两车灯

此时对应 
$$\frac{d}{l} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

由上式可求出人与车的距离为  $\frac{dD}{1.22\lambda} = 4918 \text{m}$

**11-32 解题过程** 老鹰至少飞的高度为 
$$h = \frac{L}{\theta}$$

而 
$$\theta = \frac{1.22\lambda}{D}$$

所以可以得出 
$$h = \frac{DL}{1.22\lambda} = 409.8 \text{m}.$$

**11-33 知识点睛** 光栅衍射方程

$$d \sin \varphi = \pm k\lambda$$

**解题过程**

$$d \sin \varphi = k\lambda_1 = k'\lambda_2$$

得

$$k/k' = \lambda_2/\lambda_1 = 3/2$$

上式表明第一次重合是  $\lambda_1$  的第 3 级明纹与  $\lambda_2$  的第 2 级明纹重合, 第二次重合是  $\lambda_1$  的第 6 级明纹与  $\lambda_2$  的第 4 级明纹重合. 此时,  $k=6, k'=4, \varphi=60^\circ$ , 则光栅常数

$$d = k\lambda_1 / \sin\varphi = 3.05 \times 10^{-6} \text{ m} = 3.05 \mu\text{m}$$

### 11-34 知识要点 光栅方程: $d\sin\varphi = \pm k\lambda \quad k=1, 2, \dots$

光线倾斜入射时的明纹条件:  $d(\sin i \pm \sin\varphi) = \pm k\lambda$

**逻辑推理** 由光栅常数的定义可求出  $d = \frac{10^{-3}}{500} \text{ m}$ , 代入光栅方程并注意到  $\sin\varphi = \frac{k\lambda}{d} < 1$  可求出最大整数  $K$ , 这就是能看到光谱的级次.

当光线倾斜入射时, 明纹条件改为  $d(\sin i \pm \sin\varphi) = \pm k\lambda$ , 此时两侧条纹不再对称, 因此由  $\sin\varphi \leq 1$  可求出  $k_{m1}$  和  $k_{m2}$  两个值, 即为能观察到的最高级次明纹.

用白光照射时, 其波长范围为:  $\lambda_{\min} = 400 \text{ nm}, \lambda_{\max} = 760 \text{ nm}$

它们在屏上第一级明纹的间距即为所求线宽度.

**解题过程** (1) 光栅常数  $d = \frac{10^{-3}}{500} = 2.0 \times 10^{-6} \text{ m}$

由光栅方程:  $d\sin\varphi = \pm k\lambda$  得

$$\sin\varphi = \pm \frac{k\lambda}{d}$$

由于  $|\sin\varphi| \leq 1$ , 故  $k \leq 3.39$

取整数  $k=3$ , 即最多能看到第三级光谱.

(2) 倾斜入射时, 光栅明纹条件为:

$$d(\sin i \pm \sin\varphi) = \pm k\lambda$$

令  $\sin\varphi=1$ , 可得在中央主极大两侧能看到的最大级次分别为:  $k_{m1}=5, k_{m2}=1$ , 故在法线两侧能观察到的最大级次分别为五级和一级.

(3) 白光的最小波长  $\lambda_{\min} = 400 \text{ nm} = \lambda_1$ , 最大波长  $\lambda_{\max} = 760 \text{ nm} = \lambda_2$

明纹的衍射角为  $\varphi_1 = \arcsin \frac{\lambda_1}{d}; \varphi_2 = \arcsin \frac{\lambda_2}{d}$

对应的第一级明纹位置为:

$$x_1 = \tan\varphi_1 \cdot f = 0.2 \text{ m}; \quad x_2 = \tan\varphi_2 \cdot f = 0.41 \text{ m}$$

则第一级光谱的线宽为:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 0.21 \text{ m}$$

### 11-35 知识要点 光栅方程 $d\sin\varphi = (b+b')\sin\varphi = \pm k\lambda$

**解题过程** (1) 光栅上相邻的间距离为  $\Delta d = \frac{k\lambda}{\sin\varphi} = 6 \times 10^{-6} \text{ m}$

(2) 光栅的狭缝的密度为:

$$\text{由缺级条件 } \begin{cases} (b+b')\sin\varphi = k\lambda & (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ b\sin\varphi = k'\lambda & (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases} \Rightarrow \frac{b+b'}{b} = \frac{k}{k'} = m, k = mk'$$

由此当  $k'=1$  时,  $m=4, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \dots$  缺级.

当  $k'=2$  时,  $m=2, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$  缺级. (不符)

当  $k'=3$  时,  $m=\frac{4}{3}, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \dots$  缺级.

当  $k'=4$  时,  $m=1, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$  缺级.

所以狭缝的密度只能为  $1.5 \mu\text{m}$  或  $4.5 \mu\text{m}$ .

(3)  $-90^\circ < \varphi < 90^\circ$  范围内有: 光栅方程为  $(b+b')\sin\varphi = 2k\lambda$

$$\text{所以 } k < \frac{b+b'}{\lambda} = 10$$

则实际光栅的级数为:  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 9$ .

- 11-36 逻辑推理** X 射线入射到晶体上时, 干涉加强条件为  $2d\sin\theta = k\lambda (k=0, 1, 2, \dots)$ , 式中  $d$  为晶格常数, 即晶体内部原子平面之间的间距(如图所示).

**解题过程** (1) 岩晶体原子平面之间间距为:

$$d = \frac{k\lambda}{2\sin\theta} = 0.276 \times 10^{-9} \text{ m}$$

$$(2) \lambda_2 = \frac{2\sin\theta d}{k} = 1.6 \times 10^{-10} \text{ m}$$

- 11-37 知识点窍** 布儒斯特定律:  $\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1}$

**逻辑推理** 直接根据布儒斯特定律求解.

**解题过程** 设空气的折射率为  $n_1$ , 水的折射率为  $n_2$ , 因静水表面反射出来的太阳光是偏振光, 根据布儒斯特定律可知, 入射角为

$$i_0 = \arctan \frac{n_2}{n_1} = \arctan \frac{1.33}{1} = 53.1^\circ$$

故所求仰角为

$$\theta = \frac{\pi}{2} - i_0 = 36.9^\circ$$

- 11-38 知识点窍** 马吕斯定律:  $I = I_0 \cos^2 \alpha$

**逻辑推理** 自然光强  $I$  经偏振片 I 透射的偏振光强为  $\frac{I_0}{2}$ ; 偏振光经偏振片 II 透射的光强满足马吕斯定律. 若偏振片 III 插入两块偏振片之间, 则偏振片 II、III 必须两次应用马吕斯定律.

**解题过程** 自然光通过两个偏振化方向相交  $60^\circ$  的偏振片. 根据马吕斯定律有

$$I_1 = \frac{I_0}{2} \cos^2 60^\circ = \frac{1}{8} I_0 \quad ①$$

插入偏振片 III 后, 其透射光强为

$$I_2 = \left( \frac{I_0}{2} \cos^2 30^\circ \right) \cdot \cos^2 30^\circ = \frac{9}{32} I_0 \quad ②$$

比较①、②式可知:  $I_2 = 2.25 I_1$

- 11-39 知识点窍** 自然光经偏振片起偏后的光强:  $I = \frac{1}{2} I_0$

**逻辑推理** 偏振片的旋转仅对混合光中的线偏振光的透射强度有影响, 而对自然光、透射光强恒为入射光强的一半. 偏振片旋转一周的过程中, 混合光中的线偏振光透射光强最小值为零, 最大值为 100%.

**解题过程** 设入射的光强为  $I$ , 其中线偏振光强为  $xI$ . 自然光强为  $(1-x)I$ , 按题意旋转偏振片, 则透射光强的变化范围为

$$I_{\max} = \frac{1}{2} (1-x)I + xI = \frac{1}{2} (1+x)I$$

$$I_{\min} = \frac{1}{2}(1-x)I$$

按题意

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{\frac{1}{2}(1+x)I}{\frac{1}{2}(1-x)I} = 5$$

所以

$$x = \frac{2}{3}$$

即线偏振光占总入射光强的  $\frac{2}{3}$ , 自然光占  $\frac{1}{3}$ .

**11-40 知识点窍**  $\frac{1}{4}$  波片的厚度公式:  $d = \frac{\lambda}{4|n_o - n_e|}$ .

**逻辑推理** 若晶片使 o 光和 e 光产生  $\frac{\pi}{2}$  的相位差, 即  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}|n_o - n_e| = \frac{\pi}{2}$ , 则该厚度的晶片

称为  $\frac{1}{4}$  波片, 其厚度公式为:  $d = \frac{\lambda}{4|n_o - n_e|}$ .

**解题过程** 查表可知方解石晶体中 o 光和 e 光的折射率分别为

$$n_o = 1.658, n_e = 1.486$$

由  $\frac{1}{4}$  波片厚度公式  $d = \frac{\lambda}{4|n_o - n_e|}$  可得

$$d_1 = \frac{\lambda_1}{4|n_o - n_e|} = 857 \text{ nm}$$

$$d_2 = \frac{\lambda_2}{4|n_o - n_e|} = 794 \text{ nm}$$

**11-41 知识点窍** 固体旋光物质的旋转角:  $\Delta\Psi = \alpha l$  (式中  $\alpha$  为旋光率,  $l$  为晶片厚度)

**逻辑推理** 由第一偏振片(起偏器)透射的线偏振光沿光轴方向进入石英晶片时, 由于石英具有旋光性, 从石英晶片透射出来的线偏振光将旋转一个角度  $\Delta\Psi$ . 若  $\Delta\Psi = 90^\circ$ , 钠黄光将不能通过第二个偏振片, 据此, 由公式  $l = \frac{\Delta\Psi}{\alpha}$  可求出石英片的厚度.

**解题过程** 当旋转角  $\Delta\Psi = 90^\circ$  时, 钠黄光不能通过第二个偏振片, 由公式  $\Delta\Psi = \alpha l$  可得石英片的厚度为:  $l = \Delta\Psi / \alpha = 4.15 \text{ mm}$ .

**11-42 知识点窍** 两相干偏振光的相位差:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d + 0 \text{ (或 } \pi)$$

$$\text{干涉相消条件: } \Delta\varphi = (2k+1)\pi$$

**逻辑推理** 经方解石晶体透射的两束线偏振光, 其振动方向相互垂直, 再经第二个偏振中的检偏作用后成为相干光, 其相位差为  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d + 0 \text{ (或 } \pi)$ , 式中第一项为 o 光和 e 光通过晶片时产生的相位差, 第二项为两光的  $A_o$  与  $A_e$  在  $N_2$  上投影时有可能产生的附加相位差, 由图知, 本题应取  $\pi$ , 再由干涉相消条件可解得透射的可见光谱中少了哪些波长.

**解题过程** 由图可知  $A_o$  与  $A_e$  在  $N_2$  上投影时产生附加相位差  $\pi$ , 故两相干光的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d + \pi$$

由于干涉相消条件得 
$$\frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d + \pi = (2k+1)\pi$$

解得 
$$\lambda = \frac{(n_o - n_e)d}{k}$$

在可见光范围内(400nm~760nm)讨论,可得整数  $k$  的取值及对应缺少的波长分别为:  $k=6, 7, 8, 9, 10, \lambda=717\text{nm}, 614\text{nm}, 538\text{nm}, 478\text{nm}, 430\text{nm}$ .

#### 11-43 知识点拨 薄透镜的像方焦距公式:

$$f' = \frac{n_l}{\frac{n_l - n_o}{r_1} - \frac{n_l - n_l}{r_2}}$$

**逻辑推理**  $n_o, n_l$  为透镜前、后介质的折射率,  $n_l$  为透镜的折射率,  $r_1$  为透镜平的一面的曲率半径,  $r_2$  为透镜凸的一面的曲率半径.

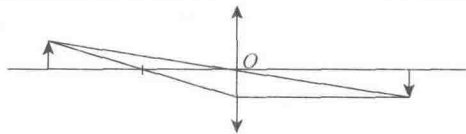
**解题过程** 根据公式及逻辑推理:

$$f' = \frac{n_l}{\frac{n_l - n_1}{r_1} - \frac{n_l - n_2}{r_2}} = \frac{r_2}{1 - \frac{n_2}{n_1}} = \frac{r_2}{1 - \frac{n_2}{n_1}} = \frac{r_2}{1 - \frac{u_1}{u_2}} = -22.1 \text{ cm}$$

#### 11-44 知识点拨 薄透镜的成像公式: $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'}$

**逻辑推理** 凸透镜的作图把握两条特殊光线: ①过光心的入射光线; ②过物方焦距的入射光线.

已知透镜像方焦距  $f'$  和物距中  $p$  时, 利用薄透镜的成像公式可求得像的位置.



图解 11-44

**解题过程** (1)(2)根据成像公式可得成像位置:

$$p' = \frac{pf'}{p+f} = \frac{(-50) \times 35}{-50+35} \text{ cm} = 117 \text{ cm}$$

#### 11-45 知识点拨 凹面镜的成像公式: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$

横向放大率:  $V = \left| \frac{p'}{p} \right|$

**逻辑推理**  $p < 0, f < 0$ , 当物不像同侧  $p' < 0$ , 物像同侧  $p' > 0$ . 对近轴光线成像, 当  $V > 1$  表示放大,  $V < 1$  表示缩小.

**解题过程**  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ , 代入数值:  $p' \approx -4\text{m}$

表示物像在同一侧.

横向放大率为  $V = \frac{p'}{p}$

故月球像的真径为:

$$d' = d \cdot V = d \cdot \frac{p'}{p} = 3.6 \times 10^{-2} \text{ m}$$

11-46 **解题过程** 甲为近视眼, 所以有:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{-0.5 \text{ m}} = -2 \text{ m}^{-1}$$

像方焦距  $f' = -0.5 \text{ m}$  (凹透镜), 焦度  $\Phi = \frac{1}{f'} = -2$  屈光度

所以甲需配 200 度的凹透镜.

乙为远视眼, 所以有:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{-1.0 \text{ m}} = -0.25 \text{ m}^{-1} = 3 \text{ m}^{-1}$$

像方焦距  $f' = 0.33 \text{ m}$  (凹透镜), 焦度  $\Phi = \frac{1}{f'} = 3$  屈光度

所以乙需配 300 度的凸透镜.

11-47 **知识点窍** 显微镜的工作原理

显微镜的视角放大率:  $M = -\frac{s_o \Delta}{f_o f_e}$

**逻辑推理** 根据显微镜的工作原理, 将物体置于物镜物方焦点  $f_o$  外侧附近, 调节物镜与目镜的间距  $d$ , 使物体经物镜放大成实像在目镜物方焦点  $f_e$  附近. 可先求得像距  $p' = d - |f_e|$ , 再求物体到物镜的距离中, 第三问直接代入显微镜视角放大率公式即可.

**解题过程** (1)  $p' = d - |f_e| = 195 \text{ mm}$

又  $f' = 7 \text{ mm}$  故  $p = \frac{f' p'}{f' - p'} = -7.3 \text{ mm}$

(2) 横向放大率为:

$$v = \frac{p'}{p} = -26.7$$

(3) 由逻辑推理知  $\Delta = d - |f_o| - |f_e| = 188 \text{ mm}$

则显微镜的视角放大率

$$M = -\frac{250 \times 188}{(-7) \times (-5)} \approx -1343$$

11-48 **知识点窍** 望远镜的放大率:  $M = -\frac{f_o'}{f_e'}$

**逻辑推理** 在望远镜中, 通常物镜的像方焦点和目镜的物方焦点几乎重合, 而已知  $f_o' + f_e' = 90 \text{ cm}$ , 即可求得  $f_o'$  和  $f_e'$ .

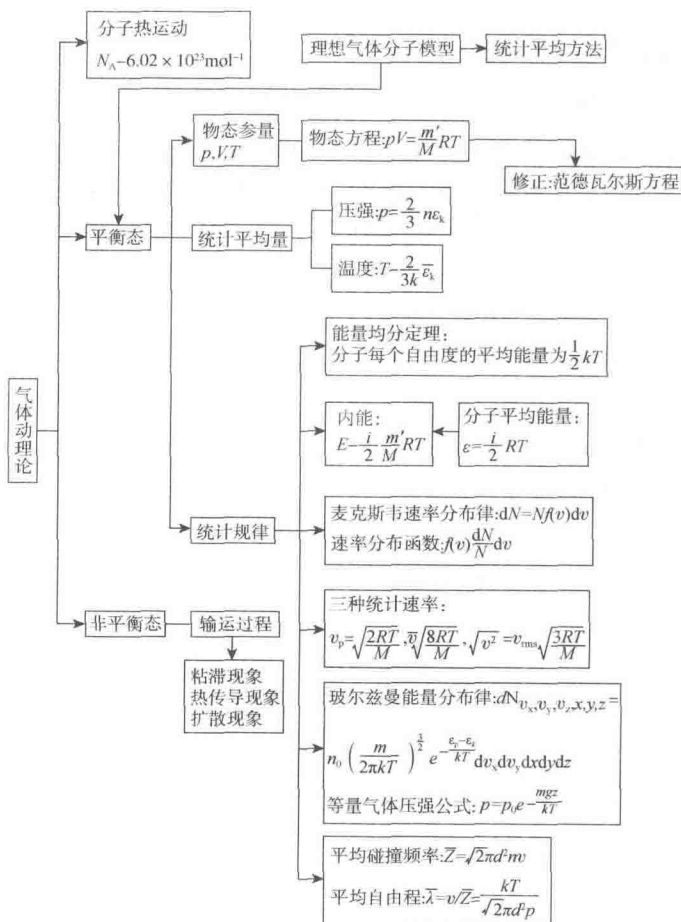
**解题过程**  $|M| = \frac{f_o'}{f_e'} = 8$ , 且  $f_o' + f_e' = 90 \text{ cm}$

故物镜的像方焦距为  $f_o' = 80 \text{ cm}$ . 目镜的像方焦距为:  $f_e' = 10 \text{ cm}$

## 第十二章

## 气体动理论

## 本章知识框架图



## 考试要点

1. 热力学第零定律和理想气体状态方程.
2. 理想气体微观模型的概念和意义, 理想气体的压强公式和温度公式及平均平动动能与温度的关系式, 压强和温度的微观实质和统计意义.
3. 能量按自由度均分定理的内容和意义, 理想气体的内能公式及热容量的计算.
4. 麦克斯韦速率分布函数, 玻尔兹曼能量分布律.
5. 平衡态下气体分子平均碰撞频率及平均自由程的概念.

## 知识点整理与解析

本章从物质的微观结构出发, 以大量的气体分子作为研究对象, 分析和讨论气体分子的无规则热运动和统计规律, 找出宏观参量与微观参量的关系. 从能量均分定理出发, 导出系统的内能公式. 研究麦克斯韦速率分布律的物理意义, 得到三个统计速率. 对气体分子的碰撞, 得到气体的平均碰撞频率和平均自由程.

### 一、理想气体的状态方程

#### 1. 热力学平衡态

把一定质量气体装在一定体积的容器里, 经过一段时间以后, 气体的各个部分就出现相同的温度  $T$  和相同的压力  $P$ , 此时气体的各个状态参量都具有确定的数值, 如果它与外界没有能量交换, 内部也没有任何形式的能量的转化, 则各个状态参量将不随时间变化, 这样的状态称为平衡态.

#### 2. 理想气体的状态方程

理想气体是气体的一种理想化的模型. 掌握了理想气体的规律之后, 便能比较方便地研究真实气体的情况, 另外, 有许多气体如氧气、空气以及氦、氖等, 在一定条件下, 都可以近似地认为是理想气体. 理想气体的定义如下:

- (1) 气体分子本身的线度远远小于分子之间的距离, 气体分子可看作质点;
- (2) 除了分子之间的碰撞, 分子之间以及分子与器壁之间没有相互作用;
- (3) 分子之间以及分子与器壁之间的碰撞是完全弹性的, 在相邻两次碰撞之间气体分子作匀速直线运动.



**温馨提示** 理想气体是一种理想模型, 在通常温度和压强下, 各种气体都近似地遵从气体三定律, 并且温度越高、压强越低, 实际气体就越接近理想气体.

对一质量为  $M$ , 摩尔质量为  $\mu$  的理想气体, 则有

$$PV = \frac{M}{\mu} RT \quad (12-1)$$

式(12-1)就是常用的理想气体状态方程, 它给出了一定量的理想气体在平衡状态下, 各个状态



参量之间的关系. 式中  $R$  为一定数, 称为普适气体常量, 在国际单位制中, 其量值和单位为  $8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ , 压强用  $\text{atm}$  为单位, 体积用  $\text{L}$  为单位时,  $R$  的量值和单位为  $0.082 \text{ atm} \cdot \text{L}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ .

例 1 一容器内装有氧气  $0.1 \text{ kg}$ , 压强为  $10 \text{ atm}$ , 温度为  $47^\circ\text{C}$ . 因容器漏气, 经若干时间后, 压强降到原来的  $5/8$ , 温度降到  $27^\circ\text{C}$ , 问:

(1) 容器的容积有多大?

(2) 后来漏了多少氧气?

解 由题意, 依据理想气体状态方程(12-1) 得

$$(1) V_1 = \frac{M_1}{\mu} \times \frac{RT_1}{P_1} = \frac{0.1 \times 0.082 \times (273 + 47)}{32 \times 10^{-3} \times 10} = 8.2 (\text{L})$$

$$(2) \Delta M = M_1 - M_2 = M_1 - \frac{P_2 V_2}{RT_2}$$

$$= 0.1 - \frac{32 \times 10^{-3} \times 10 \times \frac{5}{8} \times 8.2}{0.082 \times (273 + 27)} = 3.3 \times 10^{-1} (\text{kg})$$

小结:

名称	内容	说明
平衡态	在不受外界影响的条件下(与外界无任何形式的物质和能量交换), 系统的物态参量(宏观性质) 不随时间变化的状态	平衡态是一种热动平衡 平衡态是一种理想状态
物态方程	$pV = \frac{m'}{M}RT = \nu RT$ $p = nkT$ <p>式中, <math>m'</math> 为气体质量, <math>M</math> 为气体的摩尔质量, <math>\nu</math> 为气体物质的摩尔数, <math>n</math> 为气体的分子数密度</p>	$R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ —— 摩尔气体常数 $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ —— 玻耳兹曼常数 (对应于一个分子的常数)

## 二、热力学第零定律温度

### 1. 热力学第零定律

如果物体  $A$  和  $B$  分别与确定状态的物体  $C$  处于热平衡状态, 那么  $A$  和  $B$  之间也就处于热平衡.

### 2. 温度

温度是决定一个物体能否与其他物体处于热平衡的宏观性质, 处于热平衡的各物体的温度相同.

温度的数值表示法叫做温标. 经验温标三要素: ① 测温物质; ② 测温属性以及温度随测温属性的变化关系; ③ 固定点的温度值.

理想气体温标选择理想气体作为测温物质, 用玻意耳定律规定理想气体的温度  $T \propto pV$ , 并将水的三相点温度规定为  $T_3 = 273.15 \text{ K}$ .

热力学温标和摄氏温标的数值关系为

$$T = t + 273.15$$

### 三、压强公式和温度公式

#### 1. 统计假设

(1) 在平衡态, 分子沿各个方向运动的机会均等, 即分子速度按方向的分布是均匀的, 因而

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

式中,  $\overline{v_x^2}$ 、 $\overline{v_y^2}$  和  $\overline{v_z^2}$  分别是分子速度沿  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向分量的平方的平均值,  $\overline{v^2}$  是分子速率平方的平均值.

(2) 在平衡态, 忽略重力, 分子位置在空间的分布是均匀的, 因而单位体积的分子数也称为分子数密度, 为  $n = \frac{N}{V}$ , 式中  $N$  是分子总数,  $V$  是体积.

#### 2. 压强公式

依据理想气体微观模型和统计性假设, 可以导出理想气体压强公式

$$p = \frac{1}{3} nm \overline{v^2} = \frac{2}{3} n \overline{\epsilon_k}$$

式中  $\overline{\epsilon_k}$  为分子的平均平动动能. 该式把宏观量  $p$  和统计平均值  $n$  及  $\overline{\epsilon_k}$  联系起来, 反映了宏观量和微观量的关系. 它表明气体压强具有统计意义, 是大量分子对器壁频繁碰撞的结果, 而单个分子的碰撞是断续的和偶然的, 压强对大量气体分子才有明确的意义.

#### 3. 温度公式

由理想气体的物态方程可以得到  $pV = \frac{m}{M} RT = N \frac{R}{N_A} T = NkT$ , 所以

$$p = nkT$$

式中  $N_A = 6.023 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  为阿伏伽德罗常量,  $k = R/N_A = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  称为玻尔兹曼常数. 比较式  $p = \frac{1}{3} nm \overline{v^2}$  和  $p = nkT$  得

$$\overline{\epsilon_k} = \frac{3}{2} kT$$

上式表明, 温度这一表征气体处于热平衡态的物理量, 从微观上看是气体分子平均平动动能的量度. 它表征了大量气体分子热运动的剧烈程度, 是大量分子热运动的统计平均结果, 温度对个别分子而言是没有意义的.

**温馨提示** 理想气体的物态方程的变形式  $p = nkT$ , 联系了宏观参量压强  $p$  和温度  $T$  及微观参量分子数密度  $n$  的关系, 在解题过程中经常要用到.

**例 2** 一长金属管下端封闭, 上端开口, 置于压强  $p_0$  的大气中, 如图 12-1 所示, 今在分闭端口加热到  $T_1 = 1000 \text{ K}$ , 另一端达到  $T_2 = 200 \text{ K}$ , 设温度沿管长均匀变化, 现封闭开口端, 并使金属管冷却到  $100 \text{ K}$ , 计算此时管内压强.

**解** 系统的初态并不是平衡态, 而是定态, 但末态为平衡态, 设管长为  $L$ , 横截面积为  $S$ , 则管内  $y$  处的温度为

$$T(y) = T_2 + \frac{T_1 - T_2}{L} y.$$

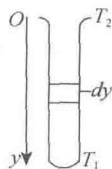


图 12-1

在距原点  $O$  为  $y$  处取一微元  $dV = Ddy$ , 质量  $dm = \rho dV$ , 此气体元可视为处于平衡态, 则

$$p_0 dV = \frac{dm}{\mu} RT(y).$$

气体密度为

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{p_0 \mu}{RT(y)} = \rho(y).$$

管内气体质量为

$$M = \int_0^L \rho S dy = \int_0^L \frac{p_0 \mu}{RT(y)} S dy = \frac{\mu p_0 S}{R} \frac{L}{T_1 - T_2} \ln 5.$$

末态为平衡态, 有  $pV = \frac{M}{\mu} RT$ , 又  $V = SL$ ,  $T = 100 \text{ K}$ , 则  $p = 0.2 p_0$ .

## 四、能量均分定理理想气体内能

### 1. 自由度

确定物体在空间位置所需要的独立坐标数目, 称为物体运动的自由度常用  $i$  来表示.

对于理想气体, 单原子分子只有 3 个平动自由度 ( $i = 3$ ); 双原子刚性分子除了有 3 个平动自由度外, 含有两个转动自由度 ( $i = 5$ ); 而由 3 个及 3 个以上原子构成的多原子刚性分子, 则有 3 个平动自由度和 3 个转动自由度, 共有六个自由度 ( $i = 6$ ).

### 2. 能量均分定理

气体处于平衡态时, 分子任何一个自由度的平均能量都相等, 均为  $\frac{1}{2} kT$ , 这个结论叫做能量按自由度均分定理.

### 3. 理想气体的内能

气体内部所有分子的动能和势能之总和, 称为气体的内能. 对于理想气体, 由于分子间没有相互作用力, 所以不存在相互作用的势能, 因此, 理想气体的内能是所有分子的动能之总和.

根据气体的理论, 可得质量为  $M$ , 摩尔质量为  $\mu$  的理想气体的内能为

$$E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} RT \quad (12-2)$$

式中,  $i$  为分子的自由度, 对于单原子分子  $i = 3$ , 对于双原子分子  $i = 5$ , 对于多原子分子  $i = 6$ .

由式(12-2)可知, 一定量的理想气体的内能完全由分子的自由度和热力学温度  $T$  决定, 与气体的压强和体积无关. 对给定的理想气体, 它的内能只是温度的单值函数. 由于温度是气体的状态参量, 所以内能也是状态的单值函数, 它是描述气体系统宏观状态的物理量.

对一定量的理想气体, 当温度改变  $\Delta T$  时, 由式(12-2)可知, 内能的改变等于

$$\Delta E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R \Delta T \quad (12-3)$$

上式表明, 不论经历什么样的状态变化过程, 只要温度改变一定, 一定量的理想气体的内能的改变总是一定的, 它与过程无关.

小结:

名称	内容	说明
压强公式	理想气体的压强: $p = \frac{1}{3} n m \overline{v^2} = \frac{2}{3} n \left( \frac{1}{2} m \overline{v^2} \right)$ 理想气体的平均平动动能: $\overline{\epsilon_k} = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$ 式中, $m$ 为气体分子的质量	大量理想气体分子处于平衡态时热运动的统计假设, 分子沿各个方向运动的机会是均等的; 分子速度在各个方向上的分量的各种平均值相等
温度公式	温度与分子平均平动动能的关系 $\overline{\epsilon_k} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$ 气体分子的方均根速率 $\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$	温度是分子平均平动动能的度量 温度相同, 分子平均平动动能相同, 但方均根速率不同(与气体种类相关)

例3 1 mol 单原子理想气体, 从同一状态1出发, 经过等容、等压和绝热三个不同的过程分别达到同一条等温线上, 如图 12-2 所示. 设图中两条等温线的温度分别为  $T_1 = 300 \text{ K}$ ,  $T_2 = 400 \text{ K}$ , 试分别求出三个过程的内能增量、功和热量值.

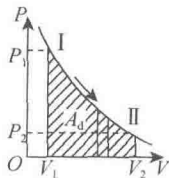


图 12-2

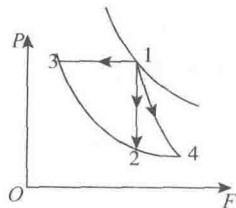


图 12-3

解 (1) 过程  $1 \rightarrow 2$  是等容降温过程

$$\Delta E = \frac{M}{\mu} C_v (T_1 - T_2) = \frac{3}{2} R (T_1 - T_2) = \frac{3}{2} \times 8.31 \times (-100) = -1.25 \times 10^3 \text{ (J)}$$

负号说明温度降低, 内能减少.

$$A = 0$$

$$Q = \Delta E = -1.25 \times 10^3 \text{ (J)}$$

负号说明过程是放热的.

(2) 过程  $1 \rightarrow 3$  是等压压缩过程, 由于其初、末态温度与  $1 \rightarrow 2$  过程的初、末态温度相同, 所以内能增量与  $1 \rightarrow 2$  过程内能的增量相同, 有

$$\Delta E = -1.25 \times 10^3 \text{ (J)}$$

$$A = P(V_3 - V_1) = R(T_1 - T_2) = 8.31 \times (-100)$$

$$=-8.31 \times 10^2 (\text{J})$$

负号说明是外界对气体做功.

热量可用以下两种方法来求.

根据等压过程热量的定义式,有

$$\begin{aligned} Q &= C_P(T_1 - T_2) = \frac{5}{2}R(T_1 - T_2) \\ &= \frac{5}{2} \times 8.31 \times (-100) = -2.08 \times 10^3 (\text{J}) \end{aligned}$$

负号说明过程是放热的.

也可根据热力学第一定律,有

$$Q = \Delta E + A = -1.25 \times 10^3 - 8.31 \times 10^2 = -2.08 \times 10^3 (\text{J})$$

(3) 过程 1 → 4 是绝热膨胀过程. 同理,有

$$\Delta E = -1.25 \times 10^3 (\text{J})$$

$$Q = 0$$

根据热力学第一定律

$$A = -\Delta E = 1.25 \times 10^3 \text{J}$$

通过本题说明:这三个过程中,内能增量  $\Delta E$  是相同的,说明内能是状态函数,一定理想气体的内能增量只跟初、末态温度有关,与状态变化过程无关. 而功和热量都是过程量,三个不同过程的热量和功是不同的.

## ■ 五、麦克斯韦速率分布律

(1) 麦克斯韦速度分布律:温度为  $T$  的平衡态下,粒子出现在  $v_x \rightarrow v_x + dv_x$ ,  $v_y \rightarrow v_y + dv_y$  和  $v_z \rightarrow v_z + dv_z$  间的概率为

$$\frac{dN_v}{N} = F(v_x, v_y, v_z) dv_x, dv_y, dv_z = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x, dv_y, dv_z$$

式中,  $F(v_x, v_y, v_z) = g(v_x)g(v_y)g(v_z)$  为速度分布函数.

(2) 麦克斯韦速率分布律:温度为  $T$  的平衡状态下,当分子之间的相互作用可以忽略时,速率在  $v \rightarrow v + dv$  间分子出现的概率为

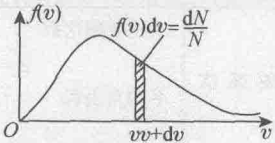
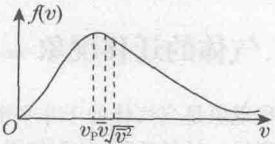
$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right) e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv = f(v) dv$$

式中,  $f(v)$  为分子速率分布函数;  $m$  为分子质量.

(3) 三种速率:最概然速率  $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ , 平均速率  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ , 方均根速率  $\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ , 显然

有  $v_p < \bar{v} < \sqrt{v^2}$ .

小结:

名称	内容	说明
麦克斯韦速率分布律	<p>理想气体在平衡态下,分子速率在 <math>v \sim (v+dv)</math> 区间内的分子数 <math>dN</math> 占总分子数 <math>N</math> 的比率为</p> $f(v)dv = \frac{dN}{N}$ <p>其中 <math>f(v)</math> 为速率分布函数,且有</p> $f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$ <p><math>f(v)</math> 满足归一化条件</p> $\int_0^{\infty} f(v)dv = 1$	<p>(1) <math>f(v)</math> 的物理意义: 表示速率在 <math>v</math> 附近的单位速率区间内的分子数占总分子数的比率.</p> <p>(2) 速率分布曲线</p> 
三种统计速率	<p>(1) 最概然速率</p> $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$ <p>(2) 平均速率</p> $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ <p>(3) 方均根速率</p> $\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$	 <p>三种速率用途不同:  <math>v_p</math>—研究分子速率分布;分子处于此速率区间的概率最大.  <math>\bar{v}</math>—计算平均自由程.  <math>\sqrt{v^2}</math>—计算平均平动动能</p>

例4 利用麦克斯韦速率分布律,求单位时间里,碰撞到容器内表面单位面积上的气体分子数.

解 设在一容器内有分子数密度为  $n$  的理想气体,取正交系,使  $x$  轴垂直于容器壁,在此壁上取面积元  $dA$ ,与  $dA$  相碰的分子是具有  $v_x$  分量的分子,有  $v_x$  分量且在  $v_x \rightarrow v_x + dv_x$  区间与  $dA$  碰撞的分子一定在以  $dA$  为底、 $v_x dt$  为高的柱体内.柱体体积为  $v_x dt dA$ ,单位体积内处于此区间的分子数为  $nf(v_x)dv_x$ ,所以速度  $v_x \rightarrow v_x + dv_x$  的分子在  $dt$  时间里与  $dA$  相碰的分子数为

$$nf(v_x)dv_x \cdot dt dA = n v_x f(v_x) dv_x dt dA$$

而单位时间内,与单位面积相碰且速度在  $v_x \rightarrow v_x + dv_x$  的分子数为  $nf(v_x)v_x dv_x$ .

因为  $v_x < 0$  的分子不能与  $dA$  相碰,所以相碰的分子数为

$$\delta = \int_0^{\infty} n v_x f(v_x) dv_x = \int_0^{\infty} n v_x \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x = \frac{1}{4} n \left( \frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2} = \frac{1}{4} \bar{v}.$$

## 六、分子的平均碰撞次数与平均自由程

1. 在气体分子热运动中,一个分子在单位时间里与其他分子碰撞的次数称为分子碰撞频率.

2. 碰撞频率的平均值称为平均碰撞频率,以  $\bar{Z}$  表示,有

$$\bar{Z} = \sqrt{2} \pi d^2 \bar{v} n$$

3. 自由程的平均值叫做平均自由程,用  $\bar{\lambda}$  表示,有

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

上面两式中,  $n$  为分子数密度,  $d$  为分子的有效直径,  $v$  为分子的平均速率,  $T$  与  $P$  分别为气体的温度和压强.

小结:

名称	内容	说明
平均碰撞次数和	平均碰撞次数 $\bar{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 \bar{v} n$ 平均自由程 $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$	在标准状态下: $\bar{Z}$ 数量级为 $10^9 \text{ s}^{-1}$ ; $\bar{\lambda}$ 数量级为 $10^{-8} \text{ m}$ .

## 七、气体的迁移现象

迁移现象是当气体处于非平衡态时,由于分子无规则热运动和分子间不断碰撞,引起某微量从一处到另一处的迁移,从而使得气体内部原来存在的某宏观量的不均匀趋向于均匀.

1. 粘滞现象

$$F = \eta \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta S$$

2. 热传导现象

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -k \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta S$$

3. 扩散现象

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -D \frac{\Delta n}{\Delta x} \Delta S$$

式中  $\eta$ 、 $k$ 、 $D$  分别称为粘度、热导率、扩散系数,  $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ 、 $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ 、 $\frac{\Delta n}{\Delta x}$  分别是速率梯度、温度梯度和密度梯度.

4. 三种迁移系数分别为

$$\eta = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \bar{\rho}$$

$$k = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \bar{\rho} \frac{C_{V,m}}{M}$$

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}$$

式中  $\bar{v}$ 、 $\bar{\lambda}$ 、 $\bar{\rho}$ 、 $C_{V,m}$  和  $M$  分别为气体分子的平均速率、气体分子平均自由程、气体密度、定体摩尔热容和气体的摩尔质量.

## 八、实际气体的范德瓦尔斯方程

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

## 考研真题解析

- 1 如果在一个固定的容器内,理想气体的温度提高为原来的两倍,那么出现的结果是:气体压强提高为原来的\_\_\_\_\_倍,分子的平均动能提高为原来的\_\_\_\_\_倍.

(中国科学院研究生 2007 年硕士学位研究生入学考试试题)

解 有理想气体的状态方程  $p = nkT$  知,  $n$  不变时,温度提高为原来的两倍,即  $T' = 2T$ ,压强也提高为原来的两倍,  $ek$  也提高为原来的两倍.

这道题的答案应为:2 倍,2 倍.



**思路总结** 固定的容器,则体积不变,压强与温度成正比;而分子的平均动能仅取决于温度与气体的自由度  $i$ .

- 2 按照气体分子运动论,气体压强的形成是由于( )

- A. 气体分子不断碰撞器壁  
B. 气体分子之间不断发生碰撞  
C. 气体分子的扩散  
D. 理想气体的热胀冷缩现象

(清华大学 2000 年硕士学位研究生入学考试试题)

解题分析 要有压强这一宏观量的微观本质来分析判断题中各选项的正确与否.

解 气体作用于器壁的压强是气体中大量分子对器壁碰撞的结果,碰撞时气体分子对器壁作用以冲量,由于分子与器壁的碰撞为弹性碰撞,所以作用在器壁上的力的方向都与器壁相互垂直.压强是大量分子对器壁不断碰撞的平均结果.

这道题的答案应选择 A.



**思路总结** 从气体动理论的观点来看,理想气体可看成是大量的不断做无规则运动的、本身体积可以忽略不计的、彼此间相互作用可予以考虑的弹性小球所组成.这是一种理想模型,它只是真实气体在压强较小时的近似模型.

- 3 按照经典的能均分定理,由刚性双原子分子组成的理想气体的定体摩尔热容量是理想气体常数  $R$  的\_\_\_\_\_.

- A. 1 倍                      B. 1.5 倍                      C. 2 倍                      D. 2.5 倍

(清华大学 2000 年硕士学位研究生入学考试试题)

解 刚性双原子分子的自由度是  $i = 5$ ,其定体摩尔热容量  $C_V = \frac{i}{2}R = \frac{5}{2}R = 2.5R$ ,应选 D.



**思路总结** 常温下理想气体的定体摩尔热容量为:单原子分子,  $C_V = \frac{3}{2}R$ ;刚性双原子分子  $C_V = \frac{5}{2}R$ ;刚性多原子分子  $C_V = \frac{6}{2}R$ ;内能  $E = \nu C_V T$ ,即对于一定量的某种理想气体,它的内能在宏观上只是温度的单值函数.




- 4 1 mol 单原子分子从状态 A 变为状态 B, 如果不知是什么气体, 变化过程也不知道, 但 A、B 两态的压强、体积和温度都知道, 则可以求出( ).

A. 气体所做的功                      B. 气体内能的变化  
C. 气体传给外界的热量              D. 气体的质量

(中国科学院研究生院 2007 年硕士学位研究生入学考试试题)

解 单原子分子的自由度  $i = 3$ , 摩尔数  $\nu = i$ , 内能  $E = \frac{i}{2} \nu R T = \frac{3}{2} R T$ , 是状态量, 只取决于状态(温度); 内能的变化  $\Delta E = \frac{i}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} R \Delta T$ , 只与始末状态有关, 与是什么气体、经历什么变化过程无关, 所以答案应选 B.

 **思路总结** 对于一定量的理想气体, 它的内能在宏观上只是温度的单值函数, 且与热力学温度成正比, 当理想气体温度由  $T_1$  变到  $T_2$  时, 内能也将发生相应的变化, 即


$$\Delta E = \frac{i}{2} \nu R (T_1 - T_2) = \frac{i}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} R \Delta T$$

- 5 已知一理想气体的分子速率分布函数为  $f(v)$ , 试写出此气体的分子平均速率表达式\_\_\_\_\_.

(复旦大学 2006 年硕士学位研究生入学考试试题)

思路点拨 由平均速率的定义  $\bar{v} = \frac{\int_0^{\infty} v dN}{N} = \int_0^{\infty} v f(v) dv$  即可求出.


解 
$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv$$

 **思路总结** 分布在任一速率  $v$  附近  $dv$  间隔内的分子数为  $dN = N f(v) dv$ , 由于  $dv$  很小, 可近似认为  $dN$  个分子的速率是相同的, 都等于  $v$ , 这样, 这  $dN$  个分子的速率综合就是  $v dN = v N f(v) dv$ . 把这个结果对所有可能的速率间隔求和就得到全部分子的速率的总和, 再除以总分子数  $N$  即可求出分子的平均速率  $\bar{v}$ .

- 6  $f(v)$  为麦氏速率分布函数,  $\int_{v_1}^{v_2} f(v) dv$  表示\_\_\_\_\_.

(西安交通大学 2007 年硕士学位研究生如入学考试试题)

解 由速率分布函数的定义:  $f(v) = \frac{dN}{N dv}$ ,  $f(v) dv = \frac{dN}{N}$ , 则  $\int_{v_1}^{v_2} f(v) dv = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dN}{N}$  表示速率在  $v_1$  到  $v_2$  之间的分子数占总分子数的比率.

 **思路总结**  $\int_{v_1}^{v_2} f(v) dv$  为分布函数在  $v_1 \sim v_2$  间隔内对应的曲线下面积, 表示  $v_1 \sim v_2$  速率间隔内分子数占总分子数的比率.

7  $f(v)$  为速率分布函数, 则速率  $v \sim v_p$  的分子平均速率表达式为( ).

- A.  $\bar{v} = \int_0^{v_p} f(v) dv$       B.  $\bar{v} = \frac{\int_0^{v_p} v f(v) dv}{\int_0^{v_p} f(v) dv}$   
 C.  $\bar{v} = \int_0^{v_p} v f(v) dv$       D.  $\bar{v} = \frac{1}{2} v_p$

(中国科学院西安光机所 2006 年硕士学位研究生入学考试试题)

解 由平均速率的定义,  $v < v_p$  区间内分子的平均速率应为:  $\bar{v} = \frac{\int_0^{v_p} v dN}{\int_0^{v_p} dN}$ . 分子、分母同除以  $N$ , 得

$$\bar{v} = \frac{\int_0^{v_p} v \frac{dN}{N}}{\int_0^{v_p} \frac{dN}{N}} = \frac{\int_0^{v_p} v f(v) dv}{\int_0^{v_p} f(v) dv}$$

所以应该选择 B.



**思路总结**  $v < v_p$  区间的分子平均速率  $0 \sim v_p$  区间内所有分子速率之和除以该区间内的分子总数.

8 设气体的速率分布函数为  $f(v)$ , 总分子数为  $N$ , 则

(1) 处于  $v \sim v + dv$  速率区间的分子数  $dN =$  \_\_\_\_\_;

(2) 处于  $v \sim v_p$  的分子数  $\Delta N =$  则  $\frac{\Delta N}{N} =$  \_\_\_\_\_;

(3) 平均速率  $\bar{v}$  与  $f(v)$  的关系为  $\bar{v} =$  \_\_\_\_\_.

(中国科学院西安光机所 2005 年硕士学位研究生入学考试试题)

解 由速率分布函数  $f(v) = \frac{dN}{N dv}$ , 有

(1) 处于  $v \sim v + dv$  速率区间的分子数  $dN = N f(v) dv$ ;

(2) 处于  $v \sim v_p$  的分子数为  $\Delta N$ , 则  $\frac{\Delta N}{N} = \int_0^{v_p} \frac{dN}{N} = \int_0^{v_p} f(v) dv$ ;

(3) 平均速率  $\bar{v}$  与  $f(v)$  的关系为  $\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv$ .



**思路总结** 要明确速率分布函数的定义, 以及速率分布函数曲线下某一窄条面积所代表的物理意义.

## 9 设气体分子的速率分布满足麦克斯韦分布律.

(1) 求气体分子速率与最概然速率相差不超过 0.5% 的分子占全部分子的百分之几?

(2) 设氢气的温度为 300 K, 求速率在 3000 ~ 3010 m/s 之间的分子数之比.

(3) 某种气体的温度为 100 K 和 400 K 时的最概然速率分别为  $v_{p1}$  和  $v_{p2}$ . 在 100 K 时与  $v_{p1}$  相差不超过 1 m/s 的分子数为总数的  $a\%$ , 求 400 K 时  $v_{p2}$  相差不超过 1 m/s 的分子数占总数的百分比.

(南京大学 2006 年硕士学位入学考试试题)

**解题分析** 可引用麦克斯韦速率分布函数  $f(v) = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$  求解此题, 但要注意“气体分子速率与最概然速率相差不超过 0.5%”的含义为: 气体分子速率的大小介于  $v_p - \frac{5}{1000}v_p$  和  $v_p + \frac{5}{1000}v_p$  之间.

**解** (1) 按题意,  $v = v_p - \frac{5}{1000}v_p = \frac{995}{1000}v_p$ ,  $\Delta v = (v_p + \frac{5v_p}{1000}) - (v_p - \frac{5v_p}{1000}) = \frac{v_p}{100}$ .

再次, 利用  $W = \frac{v}{v_p}$  把麦克斯韦速率分布改成如下简单形式

$$\frac{\Delta N}{N} = f(W)\Delta W = \frac{4}{\sqrt{\pi}} W^2 e^{-W^2} \Delta W$$

现在

$$W = \frac{v}{v_p} = \frac{995}{1000}, \Delta W = \frac{\Delta v}{v_p} = \frac{1}{100}$$

则

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \times (\frac{995}{1000})^2 \times e^{-(\frac{995}{1000})^2} \times \frac{1}{100} = 0.83\%$$

(2) 按题意

$$v_1 = 2v_2 = 3000 \text{ m/s}, \Delta v_1 = \Delta v_2 = 10 \text{ m/s}$$

$$\text{可得 } \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{e^{-\frac{m(2v_2)^2}{2kT}} (2v_2)^2 \Delta v_1}{e^{-\frac{mv_2^2}{2kT}} v_2^2 \Delta v_2} = e^{-\frac{3mv_2^2}{2kT}} \times 4 = e^{-\frac{3 \times 1000^2}{2 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300}} \times 4 = 0.2667$$

(3) 与(1)相同, 若取

$$v_1 = v_{p1} - \frac{v_{p1}}{100} = \frac{99}{100}v_{p1}, \Delta v = (v_{p1} + \frac{v_{p1}}{100}) - (v_{p1} - \frac{v_{p1}}{100}) = \frac{v_{p1}}{50}$$

同理

$$v_2 = \frac{99}{100}v_{p2}, \Delta v_2 = \frac{v_{p2}}{50}$$

由

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} (\frac{v}{v_p})^2 e^{-(\frac{v}{v_p})^2} \Delta \frac{v}{v_p}$$

可知, 当满足  $\frac{v_1}{v_{p1}} = \frac{v_2}{v_{p2}} = \frac{99}{100}$ ,  $\frac{\Delta v_1}{v_{p1}} = \frac{\Delta v_2}{v_{p2}} = \frac{1}{50}$  时, 若温度分别为 100 K 和 400 K, 与最概然速率  $v_{p1}$ 、 $v_{p2}$  相差不超过 1 m/s 的分子数占分子数的百分比均为  $a\%$ .

## 思路总结

把麦克斯韦速率分布改写成如下形式, 往往有助于问题的分析. 即令  $W = \frac{v}{v_p}$ ,

则  $\frac{\Delta N}{N} = f(W)\Delta W = \frac{4}{\sqrt{\pi}} W^2 e^{-W^2} \Delta W$ . 如果气体分子热运动速率与最概然速率相差不超过 1 m/s, 由

题中计算结果可见  $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \times (\frac{99}{100})^2 \times e^{-(\frac{99}{100})^2} \times \frac{1}{50} = 1.66\%$ , 与气体的温度无关.

10 根据麦克斯韦速率分布,在室温下(300 K) 氢气分子的方均根速率的数量级为( ).

- A. 1 倍      B.  $10^2$  m/s      C.  $10^3$  m/s      D.  $10^4$  m/s

(清华大学 2000 年硕士学位研究生入学考试试题)

解 分子方均根速率

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 1.73\sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

将  $T = 300$  K,  $\mu = 0.002$  代入上式,可得

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 300}{0.002}} = 1933.8 \text{ m/s}$$

应选 D.

**思路总结** 在力学中已经知道,地球表面附近的物体要脱离地球引力场的束缚,其逃逸速率(第二宇宙速度)为  $v = 11.2$  km/s,现在可以计算一下  $T = 300$  K 时,  $\text{H}_2$ 、 $\text{He}$ 、 $\text{O}_2$  和  $\text{N}_2$  的方均根速率,依次得到 1.93 km/s、1.35 km/s、0.48 km/s、0.51 km/s. 显然,它们都小于逃逸速率  $v$ ,其中氢的方均根速率最大,也只是逃逸速率的  $1/6$ . 这样一来,大气层中似乎应该有大量的氢分子,但实际上地球大气层中几乎没有自由氢分子. 这是什么原因呢?借助速率分布曲线可以看出,有相当数量的一部分气体分子的速率比方均根速率大很多,当这些分子的速率达到逃逸速率时,它们就逃逸出大气层,研究表明:当方均根速率大于地球逃逸速率的  $1/10$  时,可以逃离地球.  $T = 300$  K 时,氢、氦的方均根速率均大于地球逃逸速率的  $1/10$ ,可以逃离地球. 氢、氦的方均根速率均小于地球逃逸速率的  $1/10$ ,不能逃离地球. 所以在地球大气层只剩下了自由氧分子和氮分子,而几乎不存在自由氢分子和氦分子.

## 课后习题

12-1 **解题过程** 物质的平均动能由它的温度决定,如果氢气和氮气的分子平均动能相同,则它们的温度也相同,又气体的压强  $p = nkT$ ,由于它们的分子数密度相同,故  $n$  也相同,  $k$  为常数,故压强  $p$  也相同,本题选(C).

12-2 **知识点窍** 温度为  $T$  时, 1mol 理想气体的内能:

$$\text{单原子分子: } \frac{3}{2}RT; \text{刚性双原子分子: } \frac{5}{2}RT$$

**逻辑推理** 氢气  $i = 3$  为原子分子,氧气  $i = 5$  为刚性双原子分子.

**解题过程** 选 D

12-3 **解题过程** 由题知,分子方根速率两边平方得  $v^2 = \frac{3RT}{n}$ , 由于方程为  $p = knT$ , 所以有  $p_1 : p_2 : p_3 = T_1 : T_2 : T_3 = 1 : 4 : 16$ , 本题选(C).

12-4 **解题过程** 对于理想主体,由式  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$  可以看出  $\bar{v} = 2v_0$ , 对于平均碰撞率  $\bar{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 n$ ,  $\bar{Z} = 2\bar{Z}_0$ ; 平均自由程  $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$ ,  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0$  即平均自由程不变, 本题选(B).

- 12-5 **解题过程** 麦克斯韦速度分布函数为  $f(v) = \frac{dN}{Ndv}$ , 由此可以表示单位体积内速率在  $v \sim v+dv$  区间内的分子数, 本题选(B).

- 12-6 **逻辑推理** 由  $pV = \frac{m}{M}RT$  知, 压强  $P$  与温度  $T$  成正比, 由此求出末态的压强.

**解题过程** 由克拉伯龙方程为:  $pV = nRT$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$T_1 = 7^\circ\text{C} = 273.15 + 7 = 280.15\text{K}$$

$$T_2 = 37^\circ\text{C} = 273.15 + 37 = 310.15\text{K}$$

$$\text{所以 } p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = \frac{310.15}{280.15} \times 4 \times 10^5 = 4.43 \times 10^5 \text{ Pa}$$

- 12-7 **知识点窍** 理想气体物理方程  $pV = \frac{m}{M}RT$

**逻辑推理** 由公式  $p = p_0 + \rho gh$  求解.

**解题过程** 由方程  $pV = nRT$  得

$$\text{可以推得: } \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

$$V_2 = \frac{p_1 V_1}{T_1} \cdot \frac{T_2}{p_2} = \frac{T_2}{T_1} \frac{p_0 + \rho gh}{p_0} V_1 = 6.11 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

- 12-8 **知识点窍** 理想气体物理方程  $pV = \frac{m}{M}RT$

**解题过程**  $m_1 = Mp_1 V_1 / RT; m_2 = Mp_2 V_1 / RT; m_3 = Mp_3 V_3 / RT$

则一瓶氧气可用天数

$$n = (m_1 - m_2) / m_3 = (p_1 - p_2) V_1 / p_3 V_3 = 9.5$$

- 12-9 **逻辑推理** 太阳质量  $m_s$  即为氢原子的总质量, 太阳体积即为氢气体积  $V$ . 由题中给定的条件可求出氢原子的数密度  $n = \frac{m_s}{m_H \cdot V}$ , 再由物态方程  $p = nkT$  可求出温度  $T$ .

**解题过程** 由物态方程  $p = nkT$  得

$$T = \frac{p}{nk} \quad (1)$$

$$n = \frac{m_s}{m_H \cdot V} \quad (2)$$

由 ①、② 式可得太阳的温度为

$$T = \frac{m_H V p}{k m_s} = \frac{m_H p}{k m_s} \cdot \frac{4}{3} \pi R_s^3 = 1.16 \times 10^7 \text{ K}$$

- 12-10 **逻辑推理** (1) 由题中给定的压强  $P$  和温度  $T$  可知该容器内的气体可视为理想气体, 因此, 由动态方程  $p = nkT$  可直接求出分子数密度  $n$ .

(2) 平均密度可由定义式  $\rho = \frac{m}{V}$  及物态方程  $pV = \frac{m}{M}RT$  求得.

(3) 分子平均平动动能可由  $\bar{\epsilon_k} = \frac{3}{2} kT$  直接得出.

(4) 若分子间距为  $d$ , 则每个分子所占体积  $V_0 = d^3$ , 而  $n$  的物理意义为单位体积的分子数, 即  $n \cdot d^3 = 1$ , 由此可求出  $d$ .

**解题过程** (1) 分子数密度:  $n = \frac{p}{kT} = 2.44 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$

(2) 氧气密度:  $\rho = \frac{m}{V}$ , 而  $pV = \frac{m}{M}RT$ , 两式联立得

$$\rho = \frac{pM}{RT} = 1.30 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

(3) 分子平均平动动能:  $\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2}kT = 6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$

(4) 设分子平均间距为  $\bar{d}$ , 则一个分子所占体积为  $\bar{d}^3$ , 由分子数密度  $n$  的物理意义可知

$$n = \frac{1}{\bar{d}^3}.$$

所以  $\bar{d} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} = 3.45 \times 10^{-9} \text{ m}$

**12-11 逻辑推理** 由  $pV = \frac{m}{M}RT$  可求出温度  $T$ , 将  $T$  代入  $\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2}kT$  即可求出分子的平均平动动能.

**解题过程** 由  $pV = \frac{m}{M}RT$  得  $T = \frac{MpV}{mR}$  ①

分子平均平动动能公式  $\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2}kT$  ②

将 ① 式代入 ② 式得  $\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2}k \cdot \frac{MpV}{mR} = 3.89 \times 10^{-22} \text{ J}$

**12-12 逻辑推理** 将已知温度代入公式  $\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2}kT$  便可求出分子平均平动动能. 将  $1 \text{ eV}$  能量转换成国际单位再代入  $\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2}kT$ , 便可求出对应的温度.

**解题过程**  $T_1 = 273 \text{ K}$  时的分子平均平动动能为

$$\bar{\epsilon}_1 = \frac{3}{2}kT_1 = 5.65 \times 10^{-21} \text{ J}$$

$T_2 = 373 \text{ K}$  时的分子平均平动动能为

$$\bar{\epsilon}_2 = \frac{3}{2}kT_2 = 7.72 \times 10^{-21} \text{ J}$$

平均平动动能  $\bar{\epsilon}_k = 1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$  时, 由  $\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2}kT$  可得对应的温度为

$$T = \frac{2\bar{\epsilon}_k}{3k} = 7.73 \times 10^3 \text{ K}$$

这个温度约为  $7.5 \times 10^3 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**12-13 知识点窍** 理想气体的物态方程:  $Pv = \frac{m'}{m}RT$

**逻辑推理** 根据物态方程:  $m' = \frac{PVM}{RT}$ , 可见质量比在  $P, V, T$  相同的时候等于摩尔质量比. 内

能  $E = \frac{i}{2}PV$ , 可见内能比在  $P, V$  相同时等于自由度之比.

**解题过程** 利用逻辑推理中的结论:

$$\frac{m'(\text{Hz})}{m'(\text{He})} = \frac{M(\text{Hz})}{M(\text{He})} = \frac{1}{2}, \frac{E(\text{Hz})}{E(\text{He})} = \frac{i(\text{Hz})}{i(\text{He})} = \frac{5}{3}$$

- 12-14 逻辑推理** 因组成恒星的质子可视为质点, 其自由度  $i = 3$ , 因此可将大量质子视为理想气体, 质子的平均动能就等于平均平动动能, 可由  $\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2} kT$  得出. 再由平均动能的定义式及已求出的  $\bar{\epsilon}_k$  便可解出方均根速率  $\sqrt{v^2}$ .

**解题过程** (1) 质子的平均动能应等于平均平动动能, 即

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT = 2.07 \times 10^{-15} \text{ J}$$

$$(2) \text{ 由 } \bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 \text{ 得 } \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{2\bar{\epsilon}_k}{m}} = 1.58 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- 12-15 知识点窍** 平均速率  $\bar{v}$ 、方均根速率  $\sqrt{v^2}$  及最概然速率  $v_p$ .

**解题过程** 当气温为  $T_1 = 300 \text{ K}$  时有

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT_1}{\pi M}} = 1.78 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT_1}{M}} = 1.93 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT_1}{M}} = 1.58 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

当气温为  $T_2 = 2.7 \text{ K}$  时, 有

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT_2}{\pi M}} = 1.69 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT_2}{M}} = 1.83 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT_2}{M}} = 1.5 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- 12-16 知识点窍** 最概然速率:  $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$

**逻辑推理** 由  $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$  可知, 在相同的温度下,  $v_p \propto \frac{1}{\sqrt{M}}$ , 即  $(v_p)_{\text{H}_2} > (v_p)_{\text{O}_2}$ .

由此可知曲线 II 所标  $v_p = 2000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  应为氢气的最概然速率. 由于已知  $(v_p)_{\text{H}_2}$ ,  $M_{\text{H}_2}$ , 由最概然速率  $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$  可求对应的温度  $T$ . 利用  $M_{\text{O}_2}$  及  $T$  可求出  $(v_p)_{\text{O}_2}$ .

**解题过程** 在相同温度下, 氢气的最概然速率  $(v_p)_{\text{H}_2}$  应大于氧气的最概然速率  $(v_p)_{\text{O}_2}$ , 所以图中曲线 II 所示的  $v_p = 2000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  应为  $(v_p)_{\text{H}_2}$ , 即  $(v_p)_{\text{H}_2} = 2000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

由最概然速率公式  $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$  得两种气体所处的温度为

$$T = \frac{v_p^2 \cdot M_{\text{H}_2}}{2R} = 4.81 \times 10^2 \text{ K}$$

在此温度下,氧气的最概然速率为

$$(v_p)_{O_2} = \sqrt{\frac{2RT}{M_{O_2}}} = 5.0 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

12-17 解题过程 电子的方根速率为

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 9.5 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

热运动平均动能

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2} kT = 4.1 \times 10^{-17} \text{ J}$$

12-18 逻辑推理 (1) 由内能公式和物态方程可求出气体的压强.

(2) 由压强及分子数密度 ( $n = \frac{N}{V}$ ) 可求出温度  $T$ .

(3) 将温度  $T$  代入  $\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2} kT$  可求出平动动能.

解题过程 (1) 由于刚性双原子分子的自由度  $i = 5$ , 所以气体内能

$$E = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT = \frac{5m}{2M} RT$$

①

理想气体物态方程

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

②

由 ①、② 式可得气体的压强为

$$p = \frac{2E}{5V} = 1.35 \times 10^5 \text{ Pa}$$

(2) 将分子数密度  $n = \frac{N}{V}$  代入公式:  $p = nkT$  可求出气体的温度为

$$T = \frac{p}{nk} = \frac{pV}{Nk} = 3.62 \times 10^2 \text{ K}$$

气体分子的平均平动动能为

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2} kT = 7.49 \times 10^{-21} \text{ J}$$

12-19 知识点窍 理想气体分子的平均平动动能:  $\bar{\epsilon}_k = 3kT/2$

最概然速率公式:  $v_p = \sqrt{2RT/M}$

解题过程 (1) 理想气体的平均分子动能为:  $\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2} kT$

由于氢气和氧气的温度相同则氧气的分子的平均动能  $\bar{\epsilon}_{O_2} = \bar{\epsilon}_{H_2} = 6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$

又因  $T = \frac{2\bar{\epsilon}_k}{3k} = 300 \text{ K}$

(2) 氢气最概然速率:  $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = 3.95 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

12-20 知识点窍 理想气体的方均根速率:  $\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

逻辑推理 由方均根速率公式可知:  $\sqrt{v^2} \propto \sqrt{\frac{1}{M}}$

而声波的速率  $u \propto \sqrt{v^2}$ , 所以声波在氧气和氢气中的速率比为  $\frac{u_1}{u_2} = \frac{\sqrt{M_2}}{\sqrt{M_1}}$ .



**解题过程** 由题意:设声波在氧气和氢气中的速率分别为

$$u_1 = K(\sqrt{v^2})_{\text{O}_2} \quad u_2 = K(\sqrt{v^2})_{\text{H}_2}$$

则由

$$\sqrt{v^2} \propto \sqrt{\frac{1}{M}}$$

可得

$$\frac{u_1}{u_2} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = \sqrt{\frac{2}{32}} = \frac{1}{4}$$

- 12-21 知识要点** 气体分子热运动的平均速率  $\bar{v} = \sqrt{8RT/\pi M}$ , 对于摩尔质量  $M$  不同的气体分子, 为使  $\bar{v}$  等于逃逸速率  $v$ , 所需的温度是不同的。

**解题过程** (1) 由题意逃逸速率  $v = \sqrt{2gr}$ , 而分子热运动的平均速率  $\bar{v} = \sqrt{8RT/\pi M}$ . 当  $\bar{v} = v$  时, 有  $T = \frac{\pi M v^2}{8R}$

由于氢气的摩尔质量  $M_{\text{H}_2} = 2.0 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , 氧气的摩尔质量  $M_{\text{O}_2} = 3.2 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , 则它们达到逃逸速率时所需的温度分别为

$$T_{\text{H}_2} = 1.18 \times 10^4 \text{ K}, T_{\text{O}_2} = 1.89 \times 10^5 \text{ K}$$

(2) 当温度相同时, 氢气的平均速率比氧气的要大(约为 4 倍), 因此达到逃逸速率的氢气分子比氧气分子多. 由麦克斯韦分子速率分布曲线可知, 在任一温度下, 总有一些气体分子的运动速率大于逃逸速率. 从分布曲线也可知道, 在相同温度下, 氢气分子能达到逃逸速率的可能性大于氧气分子. 故大气层中氢气比氧气要少.

- 12-22 知识要点** 理想气体的内能与温度的关系:

$$E = \frac{M'}{M} \cdot \frac{i}{2} RT$$

**逻辑推理** 依题意, 容器内分子定向运动动能  $\frac{1}{2} m v^2$  的 80% 转化为系统内能. 而对理想气体,

内能是温度的单值函数:  $\Delta E = \frac{m'}{m} \cdot \frac{i}{2} R \Delta T$ . 则有:

$$\left( \frac{1}{2} m' v^2 \right) \cdot 80\% = \frac{M'}{M} \cdot \frac{5}{2} \cdot R \Delta T$$

**解题过程** 依据逻辑推理

$$\Delta E = \left( \frac{1}{2} m' v^2 \right) \cdot 80\% = \frac{m'}{M} \cdot \frac{5}{2} R \Delta T$$

解得  $\Delta T = 0.986 \text{ K}$

- 11-23 知识要点** 温度为  $T$  时理想气体分子的方均根速率:

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

麦克斯韦速率分布函数:

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

**逻辑推理** 本题可使用近似计算公式:

$$\frac{\Delta N}{N} \approx f(v_p) \cdot \Delta V$$

即在  $(v_p - \Delta v/2, v_p + \Delta v/2)$  内的气体分子数占总分子数的比例约为  $f(v_p) \cdot \Delta v$

**解题过程** 由题意:  $\Delta v = 20 \text{ m/s}$ . 将  $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$  和  $m = \frac{M}{NA}$  代入:  $\frac{\Delta N}{N} \approx f(v_p) \cdot \Delta v =$

$$4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv_p^2}{2kT}} v_p^2 \cdot \Delta v = 1.05\%$$

**12-24 逻辑推理** 由分布函数的物理意义和归一化条件可得出: 曲线下的面积表示系统分子的总数  $N$ . 再由图示曲线的方程及  $N$  可求出  $a$ . 求某区间的分子数可由积分得到.

求分子动能应先求  $\overline{v^2}$ , 再由公式  $\overline{\epsilon_k} = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$  求出  $\overline{\epsilon_k}$ .

**解题过程** (1) 由归一化条件可得曲线下的面积为

$$S = \int_0^\infty Nf(v)dv = N \int_0^{2v_0} f(v)dv = N$$

所以曲线下面积表示系统分子总数  $N$ .

(2) 设  $y(v) = Nf(v)$ , 由题图可知

$$y(v) = \begin{cases} \frac{a}{v_0} \cdot v & (0, v_0) \\ a & (v_0, 2v_0) \end{cases}$$

$$\text{所以 } N = \int_0^{2v_0} ydv = \int_0^{v_0} \frac{a}{v_0} \cdot vdv + \int_{v_0}^{2v_0} a dv = \frac{3}{2} av_0$$

$$\text{所以 } a = \frac{2N}{3v_0}$$

(3) 速率在  $\frac{1}{2}v_0$  和  $\frac{3}{2}v_0$  范围内的分子数为

$$N' = \int_{\frac{1}{2}v_0}^{\frac{3}{2}v_0} ydv = \int_{\frac{1}{2}v_0}^{v_0} \frac{a}{v_0} \cdot vdv + \int_{v_0}^{\frac{3}{2}v_0} a dv = \frac{7}{12}N$$

(4) 按方均速率的定义有

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty \frac{v^2 dN}{N} = \int_0^\infty v^2 f(v)dv$$

所以分子的平均平动动能为

$$\overline{\epsilon_k} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{1}{2} m \left( \int_0^{v_0} \frac{a}{Nv_0} v^3 dv + \int_{v_0}^{2v_0} \frac{a}{N} v^2 dv \right) = \frac{31}{36} mv_0^2$$

**12-25 知识点窍** 麦克斯韦分子速率分布函数:  $f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot v^2 \exp(-\frac{mv^2}{2kT})$

方均根速率的意义:  $\sqrt{\overline{v^2}} = \left( \int_0^\infty \frac{v^2}{N} dN \right)^{1/2}$

**逻辑推理** 由方均根速率的意义及麦克斯韦分布函数可求出方均根速率. 而最概然速率是指  $f(v)$  取得最大值时对应的速率, 可由求极值的方法得到.

**解题过程**

$$\begin{aligned} \sqrt{\overline{v^2}} &= \left( \int_0^\infty \frac{v^2}{N} dN \right)^{1/2} = \left[ \int_0^\infty 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^4 \exp(-\frac{mv^2}{2kT}) dv \right]^{1/2} \\ &= \left( \frac{3kT}{m} \right)^{1/2} = \left( \frac{3RT}{M} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\text{令 } \frac{df(v)}{dv} = 0 \text{ 得}$$

$$4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\left[2v\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)-2v^2\frac{mv}{2kT}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\right]=0$$

由此可求出分子的最概然速率为

$$v_p = v = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2RT}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

**12-26 知识点窍** 理解速率分布函数的物理意义.

**解题过程** (1) 由电子在  $v \sim v_F dv$  之间的概率分布知:

$$\text{速率分布函数 } f(v) = \begin{cases} \frac{4\pi A}{N} v^2 dv & (v_F > v > 0) \\ 0 & (v > v_F) \end{cases}$$

$$(2) \text{ 由题中条件可知 } A = \frac{3N}{4\pi v_F^3}.$$

(3) 由题中信息分析知:

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 f(v) dv = \int_0^{v_F} \frac{4\pi R}{N} v^4 dv = \frac{3}{5} v_F^2$$

即可证明

$$\overline{\epsilon} = \frac{3}{5} \epsilon_F$$

$$\text{其中 } \epsilon_F = \frac{1}{2} m v_F^2.$$

**12-27 知识点窍** 玻尔兹曼分布律  $n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$

**逻辑推理** 由玻尔兹曼分布律及状态方程得到公式  $p = p_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$ , 即可求出飞机的高度  $h$ .

**解题过程** 由玻尔兹曼分布律  $n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$  及理想气体状态方程  $pV = nKT$  得

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$$

$$\frac{p_0}{p} = \exp\left(\frac{mgh}{kT}\right)$$

$$\text{两边取对数得 } \ln\left(\frac{p_0}{p}\right) = \frac{mgh}{kT}$$

$$\text{所以 } h = \frac{kT \ln\left(\frac{p_0}{p}\right)}{mg} = \frac{RT \ln\left(\frac{p_0}{p}\right)}{Mg} = 1.93 \times 10^3 \text{ m}$$

**12-28 知识点窍** 平均自由程公式:  $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$  (式中  $n$  为分子数密度) 物态方程:  $p = nkT$

**逻辑推理** 由平均自由程公式及物态方程可知:  $\bar{\lambda} \propto \frac{1}{p}$ , 即  $\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} = \frac{p_2}{p_1}$ , 将已知数据代入上式即可求解.

**解题过程** 由  $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$  和  $p = nkT$  可知当温度恒定时,  $\bar{\lambda} \propto \frac{1}{p}$

$$\text{因此 } \frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} = \frac{p_2}{p_1}$$

所以当  $p_2 = \frac{\bar{\lambda}_1 p_1}{\bar{\lambda}_2} = 6.06 \text{ Pa}$  时, 氮气分子的平均自由程为  $1.0 \text{ mm}$ .

**12-29 知识要点** 理想气体物态方程:  $p = nkT$  平均自由程公式:  $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$

**逻辑推理** 因为压强  $p$ 、温度  $T$  已知, 由物态方程可直接求出分子数密度  $n$ . 将  $n$  代入平均自由程公式就可求出平均自由程.

**解题过程**  $p = nkT$  得  $n = \frac{p}{kT}$  ①

分子的平均自由程为  $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$  ②

已知  $T = 300 \text{ K}, p = 1.33 \times 10^{-11} \text{ Pa}, d = 3.0 \times 10^{-8} \text{ m}$

由 ①、② 式代入已知数推得  $\begin{cases} n = 3.21 \times 10^9 \text{ m}^{-3} \\ \bar{\lambda} = 7.8 \times 10^8 \text{ m} \end{cases}$

由  $\bar{\lambda}$  的值可见分子几乎不发生碰撞, 压强为  $1.33 \times 10^{-3} \text{ Pa}$  时

$$\begin{cases} n = p/kT = 3.21 \times 10^{17} \text{ m}^{-3} \\ \bar{\lambda} = kT/\sqrt{2}\pi d^2 p = 7.8 \text{ m} \end{cases}$$

此时分子的平均自由度变小, 碰撞几率变大, 但相对显像管的尺寸而言, 碰撞应很少发生.

**12-30 逻辑推理**  $1 \text{ s}$  内平均碰撞次数即为平均碰撞频率. 将已知量  $p$ 、 $T$  代入物态方程  $p = nkT$  可求

出  $n$ . 将已知量  $T$  代入  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$  可求出平均速率  $\bar{v}$ , 将  $n$ 、 $\bar{v}$  及已知量  $d$  代入  $\bar{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 n \bar{v}$  就可求出平均碰撞频率.

**解题过程** 由  $p = nkT$  得:  $n = \frac{p}{kT}$

将  $n = \frac{p}{kT}, \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$

代入平均碰撞频率公式

$$\bar{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 n \cdot \bar{v} = \sqrt{2}\pi d^2 \cdot \frac{p}{kT} \cdot \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = 3.81 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$$

**12-31 逻辑推理** (1) 气体分子热运动的平均自由程  $\bar{\lambda} = 1/(\sqrt{2}\pi d^2 n) = kT/(\sqrt{2}\pi d^2 p)$ , 因此, 温度、压强一定时, 平均自由程  $\bar{\lambda} \propto 1/d^2$ . (2) 当温度不变时, 平均自由程  $\bar{\lambda} \propto 1/p$ .

**解题过程** (1) 由平均自由程的意义式  $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$  知

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_1}} = \sqrt{\frac{27.5 \times 10^{-8}}{9.9 \times 10^{-8}}} = 1.67.$$

(2) 由式  $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$ , 当  $p' = \frac{1}{2}p$  时

$$\bar{\lambda}' = 2\bar{\lambda} = 5.5 \times 10^{-7} \text{ m}$$

氮气分子的平均碰撞频率

$$\bar{Z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} = \frac{\sqrt{8RT/\pi M}}{2\bar{\lambda}} = 8.56 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$$

12-32 **知识点窍** 范德瓦耳斯方程:  $p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2}$  理想气体物态方程:  $pV = \frac{m}{M}RT$

**逻辑推理** 将给定常量代入范德瓦耳斯方程和理想气体物态方程,就可分别求出对应的压强.

**解题过程** 由已知范德瓦耳斯方程有:

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2}$$

所以有:

$$p = 3.05 \times 10^6 \text{ Pa}$$

对于理想气体:

$$p_{\text{理}} = \frac{RT}{V} = 3.78 \times 10^6 \text{ Pa}$$

12-33 **解题过程** 由公式  $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -kS \frac{\Delta T}{\Delta x}$

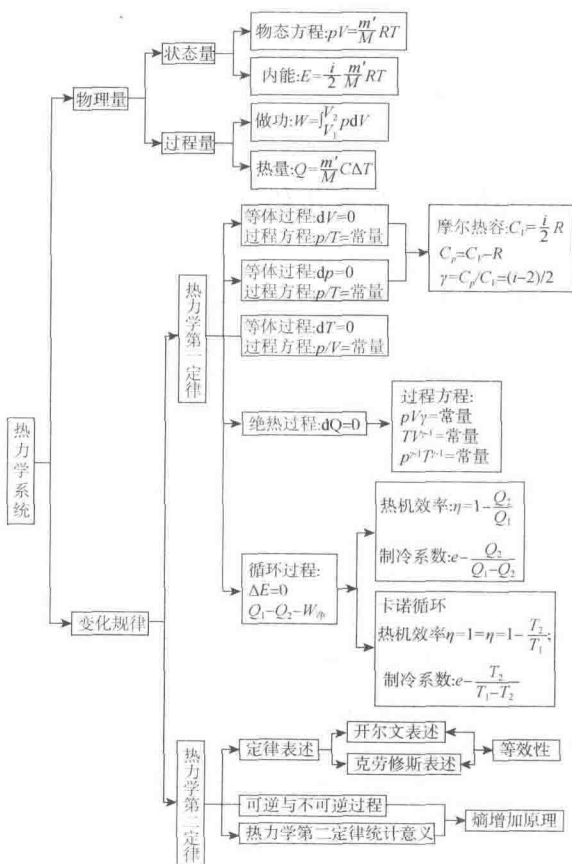
$$\text{所以 } \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -0.05 \times 5.6 \times \frac{22.2}{0.09} = 69$$

若冰箱马达运行时间为冰箱关闭时间的 15%, 则有  $\frac{\Delta Q}{\Delta t \cdot 15\%} = 460 \text{ W}$ .

## 第十三章

## 热力学基础

## 本章知识框架图



## 考试要点

1. 功和热量的定义及计算式.
2. 热力学系统及平衡态的概念, 准静态过程的特征, 用  $p-V$  图表示准静态过程.
3. 熟练运用理想气体状态方程.
4. 理想气体内能的概念及其一般计算方法, 计算理想气体的定体摩尔热容与定压摩尔热容.
5. 热力学第一定律, 理想气体三个“等值过程”和绝热过程的特征, 及这四个典型过程中的功、内能增量和热量.
6. 循环过程的特征, 计算简单循环过程和卡诺循环的效率.
7. 可逆过程和不可逆过程的含义以及过程进行的方向性, 热力学第二定律的两种表述, 该定律的物理意义及其统计规律性, 熵的概念.

## 知识点整理与解析

### 一、准静态过程 功 内能变化和热量

#### 1. 准静态过程

过程进行中的每一时刻, 系统的状态都无限接近于平衡态的称为准静态过程, 应该是一种无限缓慢的变化过程.

#### 2. 准静态过程中系统对外做的体积功

体积功为 
$$dA = p dV, A = \int_{V_2}^{V_1} p dV.$$

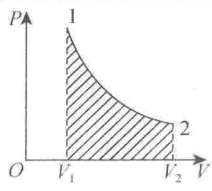
功是一个过程量.

#### 3. 热量

系统和外界之间由于温度不同而变换的热运动能量. 热量也是一个过程量, 说某物体在某温度下含有多少热量是不正确的.

小结:

名称	内容	说明
准静态过程	系统在状态变化过程中所经历的任意中间状态, 都可看作平衡态的过程	$p-V$ 图上可用一条曲线表示一个准静态过程

名称	内容	说明
功	 $W = \int_{V_1}^{V_2} p dV$ <p>功的几何意义: 在 <math>p-V</math> 图上, 过程曲线下的面积在数值上等于该过程中气体所做的功</p>	<p>(1) 功是过程量.</p> <p>(2) 功的微观本质是通过宏观的有规则运动与系统分子的无规则运动相互转化来完成能量交换</p>
热量	$Q = \nu C(T_2 - T_1)$ <p>式中, <math>\nu = \frac{m'}{M}</math> 为物质的量, <math>C</math> 为摩尔热容</p>	<p>(1) 热量是过程量.</p> <p>(2) 热量的微观本质是通过分子的无规则运动完成能量交换</p>

## 二、热力学第一定律

### 1. 热力学第一定律

$$Q = W + E - E_0 = W + \Delta E$$

$Q$ 、 $W$  是过程量, 且有正、负规定, 系统吸热  $Q > 0$ , 系统放热  $Q < 0$ , 系统对外界做功  $W > 0$ , 外界对系统做功  $W < 0$ . 热力学第一定律是包括热现象在内的能量守恒与转化定律.

2. 热力学第一定律是能量守恒和转化定律在热学中的具体体现, 对任何热力学系统及其任何过程都适用, 它宣告了第一类永动机不可能制成.

### 3. 摩尔热容

摩尔热容是 1 mol 物质当温度升高 1 K 时所吸收的热量, 表示为  $C_m = \frac{dQ_m}{dT}$ .

(1) 等体摩尔热容为 1 mol 物质在等体过程中温度升高 1 K 所吸收的热量, 即

$$C_{V,m} = \left( \frac{dQ_m}{dT} \right)_V$$

(2) 定压摩尔热容为 1 mol 物质在等压过程中温度升高 1 K 所吸收的热量, 即

$$C_{p,m} = \left( \frac{dQ_m}{dT} \right)_p$$

对于能量自由度为  $i$  的理想气体,  $C_{V,m} = \frac{i}{2}R$ ,  $C_{p,m} = C_{V,m} + R = \frac{i+2}{2}R$ , 摩尔热容比为

$$\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{V,m}} = \frac{i+2}{i}$$



小结:

名称	内容	说明
理想气体的内能	$E = \nu \frac{i}{2} RT$ <p>理想气体的内能只是温度的单值函数.</p> $E_2 - E_1 = \nu \frac{i}{2} (T_2 - T_1)$ <p>理想气体的内能改变量仅取决于始末状态的温度,与所经历的过程无关</p>	内能是状态量
热力学第一定律	<p>系统从外界吸收的热量,一部分使系统的内能增加,另一部分用于系统对外做功.即</p> $Q = E_2 - E_1 + W = \Delta E + W$ <p>符号约定:</p> <p>系统吸热 <math>Q &gt; 0</math>, 系统放热 <math>Q &lt; 0</math>;</p> <p>系统对外做功 <math>W &gt; 0</math>, 外界对系统做功 <math>W &lt; 0</math>;</p> <p>系统内能增加 <math>\Delta E &gt; 0</math>, 系统内能减少 <math>\Delta E &lt; 0</math></p>	热力学第一定律是包括热现象在内的能量守恒定律与转化定律
摩尔热容	<p>摩尔热容表示 1mol 的物质在状态变化过程中温度升高 1K 所吸收的热量.</p> <p>(1) 定体摩尔热容</p> $C_{V,m} = \frac{dQ_v}{dT} = \frac{i}{2} R$ <p>1mol 的理想气体在等体过程中温度升高 1K 所吸收的热量.</p> <p>(2) 定压摩尔热容</p> $C_{p,m} = \frac{dQ_p}{dT} = \frac{i+2}{2} R$ <p>1mol 的理想气体在等压过程中温度升高 1K 所吸收的热量</p>	<p>(1) 迈耶公式</p> $C_{p,m} = C_{V,m} + R$ <p>说明: 在等压过程中, 1mol 理想气体温度升高 1K 时, 要比等体过程多吸收的 8.31J 的热量用于对外做功.</p> <p>(2) 比热容比</p> $\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{V,m}} = \frac{i+2}{i}$

## 4. 热力学第一定律的应用

热力学第一定律可以在等值准静态过程上应用. 将热力学第一定律在理想气体的等体、等压、等温和绝热过程中应用, 为了便于比较, 将四种过程的特征、过程的吸热的热量、对外做的功和内能的增量等列成下表, 以便学习和掌握.

准静态过程	等容	等压	等温	绝热
特征	$V = C$	$p = C$	$T = C$	$Q = 0$
过程方程	$\frac{p}{T} = \text{常量}$	$\frac{V}{T} = \text{常量}$	$pv = \text{常量}$	$pV = \text{常量}$ $TV^{\gamma-1} = \text{常量}$ $pV^{\gamma} T^{-\gamma} = \text{常量}$

准静态过程	等容	等压	等温	绝热
系统做功 $A$	0	$p(V_2 - V_1)$ 或 $\frac{M}{M_{\text{mol}}} R(T_2 - T_1)$	$\frac{M}{M_{\text{mol}}} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ 或 $\frac{M}{M_{\text{mol}}} RT \ln \frac{p_1}{p_2}$	$\frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}$ 或 $\frac{M}{M_{\text{mol}}} C_{V,m}(T_2 - T_1)$
吸收热量	$\frac{M}{M_{\text{mol}}} C_{V,m}(T_2 - T_1)$	$\frac{M}{M_{\text{mol}}} C_{p,m}(T_2 - T_1)$		0
$\frac{M}{M_{\text{mol}}} C_{V,m}(T_2 - T_1)$	$\frac{M}{M_{\text{mol}}} C_{V,m}(T_2 - T_1)$			0
摩尔热容 $C$	$C_{V,m} \frac{i}{2} R$	$C_{p,m} + R$	$\infty$	0

例 1 1 mol 单原子理想气体, 从同一状态 1 出发, 经过等容、等压和绝热三个不同的过程, 分别达到同一条等温线上, 如图 13-1 所示. 设图中两条等温线的温度分别为  $T_1 = 300 \text{ K}$ ,  $T_2 = 400 \text{ K}$ , 试分别求出这三个过程的内能增量、功和热量.

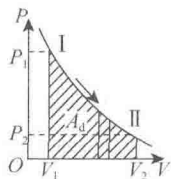


图 13-1

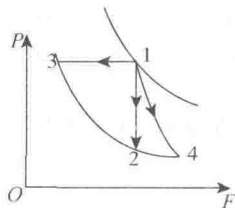


图 13-2

解 (1) 过程  $1 \rightarrow 2$  是等容降温过程

$$\Delta E = \frac{M}{\mu} C_V (T_1 - T_2) = \frac{3}{2} R (T_1 - T_2) = \frac{3}{2} \times 8.31 \times (-100) = -1.25 \times 10^3 \text{ (J)}$$

负号说明温度降低, 内能减少.

$$A = 0$$

$$Q = \Delta E = -1.25 \times 10^3 \text{ (J)}$$

负号说明过程是放热的.

(2) 过程  $1 \rightarrow 3$  是等压压缩过程, 由于其初、末态温度 1  $\rightarrow$  2 过程内能的增量相同, 有

$$\Delta E = -1.25 \times 10^3 \text{ (J)}$$

$$\begin{aligned} A &= P(V_1 - V_2) = R(T_1 - T_2) = 8.31 \times (-100) \\ &= -8.31 \times 10^2 \text{ (J)} \end{aligned}$$

负号说明是外界对气体做功.

热量可用以下两种方法来求.

根据等压过程热量的定义式, 有

$$Q = C_P (T_1 - T_2) = \frac{5}{2} R (T_1 - T_2)$$

$$= \frac{5}{2} \times 8.31 \times (-100) = -2.08 \times 10^3 (\text{J})$$

符号说明过程是放热的.

也可根据热力学第一定律,有

$$Q = \Delta E + A = -1.25 \times 10^3 - 98.31 \times 10^2 = -2.08 \times 10^3 (\text{J})$$

(3) 过程  $1 \rightarrow 4$  是绝热膨胀过程. 同理,有

$$\Delta E = -1.25 \times 10^3 (\text{J})$$

$$Q = 0$$

根据热力学第一定律

$$A = -\Delta E = 1.25 \times 10^3 (\text{J})$$

通过本题说明:这三个过程中,内能增量  $\Delta E$  是相同的,说明内能是状态函数,一定理想气体的内能增量只跟初、末态温度有关,与状态变化过程无关. 而功和热量都是过程量. 三个不同过程的热量和功是不同的.

### 三、循环过程 卡诺循环

#### 1. 循环过程

系统经历一系列变化以后,又回到原来的初始状态的整个过程叫循环过程,简称循环.

由于系统状态复原,所以整个循环上  $\Delta E = 0$ ,由热力学第一定律给出  $Q = W$ ,及系统从外界吸收的净热量等于系统对外做的净功.

热机循环(正循环):系统从高温热源吸热  $Q_1$ ,对外做净化功  $W$ ,向低温热源放热  $Q_2$ ,则循环换的效率为

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

制冷循环(逆循环):系统从低温热源吸热  $Q_2$ ,外界对它做功  $W$ ,向高温热源放热  $Q_1$ ,则制冷系数为

$$e = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

#### 2. 卡诺循环

卡诺循环是在两个恒温热源(高温热源  $T_1$ ,和低温热源  $T_2$ ) 它是由两条等温线和两条绝热线构成的.

理想气体准静态卡诺循环的效率为  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_1}$

它只由高、低温热源的温度决定,且两个热源温差越大,效率就越高.

上式只适用于卡诺循环效率的计算,对其他循环并不适用.

小结:

名称	内容	说明
一般循环	(1) 正循环 热机效率 $\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$ 式中, $W$ 是工作物质经一个循环后对外做的净功, $Q_1$ 为热机从高温热源吸收的热量, $Q_2$ 为热机向低温热源放出的热量(绝对值). (2) 逆循环 制冷系数 $e = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$ 式中 $W$ 、 $Q_1$ 、 $Q_2$ 取正值	循环的特征: 系统经过一系列状态变化过程后, 即 $\Delta E = 0$ . 在 $p-V$ 图上表示为一条封闭曲线, 且闭合曲线所包围的面积表示整个循环过程中所做的净功
卡诺循环	卡诺循环是由两条等温线和两条绝热线构成的循环, 是一个理想的循环. 卡诺热机的效率 $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ 卡诺制冷机的制冷系数 $e = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$	(1) 卡诺热机的效率只与两热源的温度有关, 与气体的种类无关. 注意: 此处效率公式中适用于卡诺循环. (2) 热机的效率总是小于 1 的

例 2 1 mol 氦气, 作如图 13-3 所示的  $abcd$  循环,  $bc$  为绝热过程, 试求:

- (1)  $T_a$ 、 $T_b$  和  $T_c$ .
- (2) 等温过程  $ab$  的内能变换  $\Delta E_{ab}$ .
- (3) 氦气在一循环中所做的功  $A$ .
- (4) 循环效率  $\eta$ .

解 (1) 用理想气体状态方程来求  $T_a$ 、 $T_b$ 、 $T_c$ , 有

$$T_a = \frac{P_a V_a}{R} = \frac{1 \times 24.6}{0.082} = 300(\text{K})$$

$$T_b = \frac{P_b V_b}{R} = \frac{2 \times 24.6}{0.082} = 600(\text{K})$$

$$T_c = \frac{P_c V_c}{R} = \frac{1 \times 37.2}{0.082} = 454(\text{K})$$

(2) 等容过程

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{ab} &= \frac{M}{\mu} C_v (T_b - T_a) = \frac{3}{2} R (T_b - T_a) \\
 &= \frac{3}{2} \times 8.31 \times (600 - 300) = 3740(\text{J})
 \end{aligned}$$

在等容过程中, 因  $A = 0$ , 所以吸热全部用于增加内能, 有

$$Q_{ab} = \Delta E_{ab} = 3740(\text{J})$$

(3) 一个循环过程的功等于干净吸热, 有

$$A = Q_1 - Q_2 = C_v (T_b - T_a) - C_d (T_c - T_a) = 3740 - \frac{5}{2} \times 8.31 \times (454 - 300) = 541(\text{J})$$

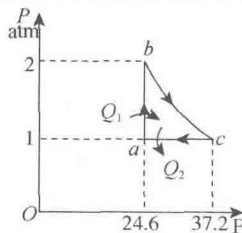


图 13-3

(4) 循环效率为

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{541}{3\,740} = 14.4\%$$

## 四、热力学第二定律

### 1. 可逆过程与不可逆过程

在系统状态变化过程中,如果逆过程能够重复正过程的每一个状态,而且不引起其他变化,这样的过程叫可逆过程;反之,在不引起其他变化的条件下,不能使逆过程重复正过程的每一个状态,或者虽然重复但必然会引起其他变化,这样的过程都叫做不可逆过程。

可逆过程必须是系统状态和外界都能复原,否则就是不可逆过程。可逆过程是一种理想过程,只有十分缓慢的、无摩擦的准静态过程,才可以近似作为可逆过程。各种自然的宏观过程都是不可逆的,是按一定的方向进行的,而且它们的不可逆性是相互依存的。比如:功热转换、热传导和绝热自由膨胀。

### 2. 热力学第二定律的两种表述

热力学第二定律是关于自然过程的方向的规律,是可以用任何一个实际的自然过程进行的方向表述。

#### (1) 克劳休斯表述

热量不能自动地从低温物体传向高温物体。这里要注意的是“自动”二字,因为依靠逆循环的制冷机,有外界作功,是可以把热量从低温物种传向高温物体的。热力学第二定律的两种表述初看起来似乎无联系,但可以证明,热力学第二定律的两种说法是一致的。

#### (2) 开尔文表述

不可能制造出这样一种循环工作的热机,它只从单一热源吸取热量使之全部变为有用功,而不产生其他影响。应该注意,这里指的是循环工作的热机,如果工作物质进行的不是循环过程,那么是可以做功而放出热量的。例如,理想气体的等温膨胀过程。

小结:

名称	内容	说明
开尔文表述	不可能制成一种循环工作的热机,只从一个热源吸取热量,使之全部变成有用功,而其他物体不发生变化	(1) 关键词:循环 (2) 开尔文表述说明单热源热机(即第二类永动机)是不存在的
克劳休斯表述	热量不可能自动地从低温物体传向高温物	(1) 关键词:自动 (2) 热力学第二定律两种表述具有等效性
热力学第二定律的实质	自然界中一切与热现象有关的宏观过程具有单方向性,是不可逆的	热力学第二定律可有多种表述方法

### 3. 热力学第二定律的微观意义

自然过程总是沿着使分子运动更加无序的方向进行,或者向着热力学概率  $\Omega$  (某宏观态对应的微观状态数) 增大的方向进行,孤立系统的平衡态对应的热力学概率最大。

#### 4. 卡诺定理

卡诺定理有两项内容:

(1) 工作在相同的高温热源(温度为  $T_1$ ) 和相同的低温热源(温度为  $T_2$ ) 之间的一切可逆卡诺机, 其效率都相等, 与工作物质无关, 即  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

(2) 工作在相同的高温热源和相同的低温热源之间的一切不可逆热机, 其效率都不可能大于可逆热机的效率, 即  $\eta' \leq \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ .

式中  $\eta$  为可逆热机效率,  $\eta'$  为不可逆热机效率.

小结:

名称	内容	说明
卡诺定理	<p>(1) 在同样高低温热源之间工作的一切可逆机, 不论什么工作物质, 效率都等于</p> $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ <p>(2) 在同样高低温热源之间工作的一切不可逆机的效率, 不可能高于可逆机, 即</p> $\eta \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}$	卡诺定理提供了提高热机效率的方向. 首先要使实际不可逆机尽量地接近可逆机; 同时尽量增大高、低温热源的温度差

### 五、熵和熵增加原理

1. 波尔兹曼熵:  $S = k \ln \Omega$

2. 克劳修斯熵:  $dS = \frac{dQ_R}{T}$  或  $S_2 - S_1 = \int_{1(R)}^2 \frac{dQ}{T}$ , 其中(R) 为可逆过程.

3. 熵增加原理: 在孤立系统中所进行的自然过程总是沿着熵增大的方向进行. 即

$$\Delta S > 0$$

(1) 熵是态函数, 两平衡态之间的熵变与过程无关.

(2) 熵增加原理只适用于绝热过程或孤立系统中所发生的过程.

(3) 熵增加原理和热力学第二定律实质上式一致的, 都表示自然界所发生的与热现象有关的宏观过程的方向性.

小结:

名称	内容	说明
熵	<p>若系统从初态 A 经历任一可逆过程变化到末态 B 时, 其熵的变化为</p> $S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T}$	熵是为了判断孤立系统中过程进行方向而引入的系统状态的单值函数
熵增加原理	<p>孤立系统内所进行的任何不可逆过程, 总是沿着熵增加的方向进行, 只有可逆过程系统的熵才不变</p> $\Delta S \geq 0$	熵增加原理可作为热力学第二定律的定理表达式. 用熵增加原理可以判断过程发展的方向和限度

## 六、热力学第二定律的统计意义

小结:

名称	内容	说明
热力学第二定律的统计意义	一个不受外界影响的封闭系统,其内部发生的过程,总是由概率小的状态向概率大的状态进行,由包含微观状态数目少的宏观状态向包含微观状态数目多的宏观状态进行	熵与热力学概率 $W$ 的关系满足 $S = k \ln W$ 上式称为玻耳兹曼关系

### 考研真题解析

- 1 如图 13-4 所示,一定量理想气体由  $P$  点出发,经历不同过程,其中  $PC$  为等温过程,  $PE$  为绝热过程,则哪一过程吸热最多? \_\_\_\_\_; 哪一过程吸热而降温? \_\_\_\_\_; 哪一过程放热? \_\_\_\_\_.

(中国科学院西安光机所 2006 年硕士学位研究生入学考试试题)

解 由热力学第一定律  $Q = A + \Delta E$   
 等压过程中  $Q_p = p(V_2 - V_1) + \nu C_V(V_2 - V_1)$   
 $= \nu R(V_2 - V_1) + \nu C_V(V_2 - V_1)$   
 $= \nu C_p(V_2 - V_1)$

即  $P \rightarrow B$  等压过程中,吸入的热量一部分用于对外做功,一部分用于增加内能,所以吸热最多.

$P \rightarrow D$  的过程,位于等温线以下,膨胀吸热,但温度下降.

$P \rightarrow F$  的过程,位于绝热线以下,膨胀吸热,温度下降.

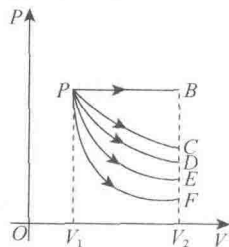


图 13-4

**思路总结**  $PE$  为绝热过程  $Q = 0$ ;  $PD$  过程位于等温线以下,绝热线以上,  $Q > 0$ , 系统吸热膨胀, 温度下降;  $PF$  过程位于绝热线以下,  $Q < 0$ , 系统膨胀放热, 温度下降.

- 2 已知 1 mol 气体的状态方程为  $p(V-b) = RT$ , 内能  $E = C_V T E_0$ , 式中  $b, C_V, E_0$  为常量, 该气体由  $(p_1, V_1)$  态经绝热过程到达  $(p_2, V_2)$  态, 试求:

- (1) 气体的绝热过程方程;
- (2) 此过程中气体所做的功.

(复旦大学 2003 年硕士学位研究生入学考试试题)

**解题分析** 应用微小绝热过程的热力学第一定律及所给气体的状态方程, 可求得气体的绝热过程,

气体经过绝热过程所做的功, 可由  $A = -\Delta E = -C_V(T_2 - T_1) = \frac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$  求得.

**解** (1) 对一微小绝热过程  $dQ = 0$ , 应用热力学第一定律得  $dA = -dE$ , 即

$$pdV = -C_V dT \quad (1)$$

注意  $p(V-b) = RT$ , 对其微分

$$(V-b)dp + pdV = RdT \quad (2)$$

将 (1) 中的  $dT$  代入式 (2), 则

$$(V-b)dp + pdV = -R \frac{pdV}{C_V}$$

$$(V-b)dp + p\left(1 + \frac{R}{C_V}\right)dV = 0$$

$$(V-b)dp + \gamma p dV = 0$$

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V-b} = 0$$

等式两边同时积分, 可得

$$\ln p + \gamma \ln(V-b) = \text{常量}$$

$$p(V-b)^\gamma = \text{常量}$$

(2) 气体所做的功

$$\begin{aligned} A = -\Delta E &= -C_V(T_2 - T_1) = -\frac{R}{\gamma-1} \left[ \frac{p_2(V_2-b)}{R} - \frac{p_1(V_1-b)}{R} \right] \\ &= \frac{p_1(V_1-b) - p_2(V_2-b)}{\gamma-1} \end{aligned}$$



思路总结

由于已知气体由  $(p_1, V_1)$  经绝热过程到达  $(p_2, V_2)$ , 所以恋情

$A = -\Delta E = -C_V(T_2 - T_1) = \frac{R}{\gamma-1}(T_2 - T_1)$  求功  $A$  比较方便.

3 1 mol 双原子理想气体的过程方程为  $pV^\gamma = \text{常数}$ , 已知初态为  $(p_1, V_1)$ , 求:

(1) 气体沿此过程膨胀到  $2V_1$  对外所做的功, 气体内能的变化和吸收(或放出)的热量;

(2) 摩尔热容  $C$ .

(复旦大学 2004 年硕士学位研究生入学考试试题)

**解题分析** 由于已知过程方程, 可由  $A = \int_{V_1}^{2V_1} p dV$  计算气体膨胀所做的功; 内能变化可由  $\Delta E = C_V \Delta T$  求得; 气体膨胀过程中吸收的热量  $Q = \Delta E + A$ . 由摩尔热容的定义  $C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$ , 将  $\Delta Q, \Delta T$  代入即可求得摩尔热容.

**解** (1) 由题意知  $pV^\gamma = B$  ( $B$  为常数), 则  $p = \frac{B}{V^\gamma}$

$$\text{气体对外做功} \quad A = \int_{V_1}^{2V_1} p dV = \int_{V_1}^{2V_1} \frac{B}{V^\gamma} dV = B \left( \frac{1}{V^{\gamma-1}} - \frac{1}{2V_1^{\gamma-1}} \right) = \frac{B}{2V_1^{\gamma-1}}$$

$$\text{有理想气体状态方程 } pV = RT, \text{ 可得 } T = \frac{pV}{R} = \frac{B}{RV}$$

$$\text{对于双原子分子理想气体} \quad C_V = \frac{5}{2}R$$

$$\text{则内能增量 } \Delta E = C_V \Delta T = C_V(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}RB \left( \frac{1}{2RV_1} - \frac{1}{RV_1} \right) = -\frac{5}{4} \frac{B}{V_1}$$



吸收热量  $Q = \Delta E + A = -\frac{5}{4} \frac{B}{V_1} + \frac{B}{2V_1} = -\frac{3}{4} \frac{B}{V_1}$  (“-”表明系统放热)

(2) 由气体摩尔热容的定义式  $C = \frac{dQ}{dT} = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$ , 题目中  $\Delta T = T_2 - T_1 = -\frac{B}{2RV_1}$ ,  $\Delta Q = Q = -\frac{3}{4}$

$\frac{B}{V_1}$ , 则摩尔热容  $C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{-\frac{3}{4} \frac{B}{V_1}}{-\frac{B}{2RV_1}} = \frac{3}{2} R$

**思路总结** 如果理想气体的状态参量  $p, V$  在变化过程中满足  $pV^n = \text{常量}$ , 则此过程称为多方过程, 式中  $n$  为常数, 称为多方指数. 由理论推算可知, 一般情况下, 多方过程的摩尔热容为  $C = C_V \frac{n-\gamma}{n-1}$ , 即  $C = \frac{5}{2} R \frac{2-1.4}{2-1} = \frac{3}{2} R$ .

4 某气体服从这样的状态方程  $p(V-\nu b) = \nu RT$ , 内能为  $E = C_V T + E_0$ , 其中  $C_V$  和  $E_0$  是常量.

(1) 求定体摩尔热容;

(2) 求等温过程中, 系统对外所做的功;

(3) 证明: 定压摩尔热容为  $C_p = C_V + \nu R$ .

(中山大学 2004 年硕士学位研究生入学考试试题)

**解题分析** 由定体摩尔热容  $C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$  可求得定压摩尔热容, 由  $C_p = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p$  可求得定压摩尔热

容; 等温过程系统对外做功  $A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$ .

**解** (1) 根据定体摩尔热容的定义, 有

$$C_V = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_V$$

由热力学第一定律, 在  $V$  不变时, 有  $\Delta Q = \Delta E + p \Delta V = \Delta E$

所以 
$$C_V = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta E}{\Delta T} \right)_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V$$

由题知

$$E = C_V T + E_0$$

所以

$$C_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V$$

(2) 等温过程中, 内能改变  $\Delta E = 0$ , 功和热量变化相同, 即

$$\begin{aligned} A = Q &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V - \nu b} dV \\ &= \nu RT \ln(V - \nu b) \Big|_{V_1}^{V_2} = \nu RT \ln \frac{V_2 - \nu b}{V_1 - \nu b} \end{aligned}$$

(3) 证明: 由定压摩尔热容定义有  $C_p = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)$

由热力学第一定律知:  $\Delta Q = \Delta E + p \Delta V$ , 所以

$$C_p = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta E}{\Delta T} \right)_p + p \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta V}{\Delta T} \right)_p = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_p + p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

因为  $E = C_V T + E_0$ , 则

$$C_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_p$$

又因为  $p(V - \nu b) = \nu RT$ , 所以

$$V = \frac{\nu RT}{p} + \nu b, \text{ 即 } \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{\nu R}{p}$$

则有

$$C_p = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_p + p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = C_v + \nu R$$

即定压摩尔热容量为

$$C_p = C_v + \nu R$$

**思路总结** 等温过程中,  $\Delta E = 0$ , 吸收的热量全部用来对外做功. 由定义定体摩尔热容  $C_v = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_v$ , 定压摩尔热容  $C_p = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p$ , 结合热力学第一定律, 即可求得定压摩尔热容  $C_p$ .

- 5 如图 13-5 所示, 一定量的理想气体, 从  $p$ - $V$  图上初态  $a$  经历 (1) 或 (2) 过程到达末态  $b$ , 已知  $a, b$  两态处于同一条绝热线上 (图中虚线是绝热线), 则气体在

- A. (1) 过程中吸热, (2) 过程中放热  
B. (2) 过程中放热, (2) 过程中吸热  
C. 两种过程都吸热  
D. 两种过程都放热

(华南理工大学 2005 年硕士学位研究生入学考试试题)

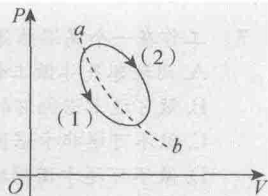


图 13-5

**解题分析** 可由热力学第一定律, 分析过程 (1)、(2) 的内能、做功来确定是吸热还是放热.

**解** 在 (2) 过程中,  $T_a > T_b$ ,  $\Delta T = T_b - T_a < 0$ , 故  $\Delta E_{(2)} < 0$

由于  $T_b > T_a$ , 属于气体膨胀过程, 故  $A > 0$ , 由于 (2) 过程的内能变化与绝热过程的内能变化相同, 即  $\Delta E_{(1)} = \Delta E_Q$ , 比较 (2) 过程与绝热过程曲线下的面积可知  $\Delta E_{(2)} > \Delta E_Q$ .

根据热力学第一定律可知  $Q > 0$  (吸热)

在 (1) 过程中,  $\Delta E_{(1)} < 0$ ,  $A_{(1)} > 0$  (与上面分析相同); 比较面积可知,  $A_Q > A_{(1)}$ , 而  $\Delta E_{(1)} = \Delta E_Q$ , 则根据热力学第一定律可知:  $Q < 0$  (放热)

故应选 B.

**思路总结** 绝热过程  $Q = 0$ ,  $A_Q = -\Delta E_Q$ . 将这一条件作为标准分别分析 (1)、(2) 过程, 即可得到正确结论.

- 6 一卡诺热机工作在 360 K 的高温热源和 270 K 的低温热源之间, 如果每个循环从高温热源吸收的热量为 600 J, 则每个循环中该热机对外做功为多少? 将此热机逆向运行 (变为卡诺制冷机), 如果每个循环要从低温热源抽走 1200 J 的热量, 则外界必须做多少功?

(浙江大学 2006 年硕士学位研究生入学考试试题)

**解题分析** 拉诺热机的效率为  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ , 已知  $T_1 = 360$  K,  $T_2 = 270$  K, 由此可求得每个循环中热


机对外做功  $A$ . 逆向运行时, 制冷系数  $\omega = \frac{Q_2}{A} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$ , 由此可求得外界必须做的功  $A$ .

**解** 卡诺热机的效率为  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{A}{Q_1}$ , 所以

$$A = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) Q_1 = 600 \times \left(1 - \frac{270}{360}\right) 150 \text{ J}$$

若对于卡诺制冷机,则有  $\omega = \frac{Q_2}{A} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$ , 所以

$$A = \left(\frac{T_1 - T_2}{T_2}\right) Q_2 = 1200 \times \left(\frac{360 - 270}{270}\right) = 400 \text{ J}$$

 **思路总结** 这道题是卡诺热机效率  $\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$  以及卡诺制冷机制冷系数  $\omega = \frac{Q_2}{A} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$  的应用问题.

7 工作在一个高温热源和一个低温热源间的热机.


- A. 用理想气体做工作物质的热机效率最高
  - B. 做可逆卡诺循环的热机效率最高, 与工作物质无关
  - C. 做不可逆非卡诺循环的热机效率最高
  - D. 做不可逆卡诺循环且用理想气体做工作物质的热机效率最高
- (清华大学 2000 年硕士学位研究生入学考试试题)

**解题分析** 应用卡诺定理进行分析, 即可得到正确选项.

**精选** 卡诺定理的内容是:

- (1) 在相同高温热源(温度为  $T_1$ ) 和相同低温热源(温度为  $T_2$ ) 之间工作的一切可逆热机(其循环是可逆的), 不管使用什么样的工质, 其效率均相同, 且为  $1 - \frac{T_2}{T_1}$ .
- (2) 在相同高温热源(温度为  $T_1$ ) 和相同低温热源(温度为  $T_2$ ) 之间工作的一切可逆热机(其循环是不可逆的), 其效率均不可能大于(实际上是小于)可逆热机的效率, 即  $\eta \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}$ .

所以应选 B.

 **思路总结** 可逆卡诺热机效率最高, 且与工作物质无关.

- 8 一台理想热机按卡诺循环工作, 每一个循环做功  $A = 7.35 \times 10^4 \text{ J}$ , 高温热源温度  $T_1 = 100^\circ\text{C}$ , 低温热源温度  $T_2 = 0^\circ\text{C}$ , 则该热机效率为 \_\_\_\_\_, 热机每一循环从热源吸收的热量为 \_\_\_\_\_ J, 每一循环向低温处派出的热量是 \_\_\_\_\_ J.
- (中国科学院研究生院 2007 年硕士学位研究入学考试试题)

**解** 有卡诺循环的效率公式, 有

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{273}{373} = 0.268$$

热机每一个循环从热源吸收的热量为

$$Q_1 = \frac{A}{\eta} = \frac{7.35 \times 10^4}{0.268} = 2.743 \times 10^5 \text{ J}$$

每一个循环向低温热源排出热量是

$$Q_2 = (1 - \eta) Q_1 = (1 - 0.268) \times 2.743 \times 10^5 = 2.008 \times 10^5 \text{ J}$$



**思路总结** 卡诺循环的效率  $\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ , 应用这一公式即可求解.

9 一摩尔单原子理想气体, 自  $a$  点起顺时针经两个等体过程及两个等温过程完成循环(见图 13-6 中的  $T$ - $V$  图). 求:

(1) 各过程中做的功及吸收的热量.

(2) 此热机的循环效率(已知:  $R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ ,  $V_2 = 2V_1$ ).

(复旦大学 2006 年硕士学位研究生入学考试实验)

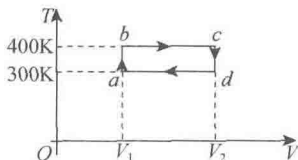


图 13-6

**思路分析** 首先将  $T$ - $V$  图转换成  $p$ - $V$  图, 然后求各过程吸收的热量, 代入  $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$  即可求解.

**解** 将题中的  $T$ - $V$  图转换成  $p$ - $V$  图(见图 13-6 中  $p$ - $V$  图), 可得

由  $a \rightarrow b$ ,  $b \rightarrow c$  系统吸热, 由  $c \rightarrow d$ ,  $d \rightarrow a$  系统放热.

系统吸热

$$Q_{ab} = C_V(T_b - T_a) = \frac{3}{2}R(400 - 300) = 150R \text{ (J)}$$

$$Q_{bc} = RT_b \ln \frac{V_c}{V_b} = 400R \ln \frac{V_2}{V_1} = 400R \ln 2 \text{ (J)}$$

系统放热

$$Q_{cd} = C_V(T_d - T_c) = -\frac{3}{2}R(400 - 300) = -150R \text{ (J)}$$

$$Q_{da} = RT_d \ln \frac{V_a}{V_d} = 300R \ln \frac{V_1}{V_2} = -300R \ln 2 \text{ (J)}$$

热机效率

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{放}|}{Q_{吸}} = 1 - \frac{150R + 300R \ln 2}{150R + 400R \ln 2} = 16.2\%$$



**思路总结** 只有卡诺循环可以直接从已知热源温度求效率, 即  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ . 一般循环应由

$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$  求效率.

10 一热机, 其工作物质为理想气体, 它的循环如图 13-7 所示, 从初态  $a$  经定体加热到状态  $b$ , 再由状态  $b$  经绝热膨胀到状态  $c$ , 然后进定压压缩返回初始状态, 求热机效率.

(西安交通大学 2007 年硕士学位研究生入学考试试题)

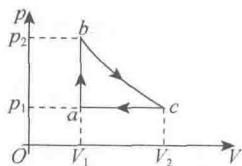


图 13-7

**解题分析** 这是一个正循环过程, 其效率  $\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$ . 因此, 欲求其效率,

首先应明确在循环过程中哪些是吸热过程以及吸收的热量  $Q_1$ , 哪些是放热过程以及放出的热量  $Q_2$ , 然后代入公式计算即可.

解  $a \rightarrow b$  过程, 吸收热量  
 $c \rightarrow a$  过程, 放出热量

$$Q_1 = \nu C_V (T_b - T_a)$$

$$|Q_2| = \nu C_p (T_c - T_a)$$

$$\text{循环效率} \quad \eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{\nu C_p (T_c - T_a)}{\nu C_V (T_b - T_a)} = 1 - \gamma \frac{\frac{T_c}{T_a} - 1}{\frac{T_b}{T_a} - 1} \quad ①$$

$$\text{由 } a \rightarrow b \text{ 等体过程, 有} \quad \frac{T_b}{T_a} = \frac{p_b}{p_a} \quad ②$$

$$\text{由 } c \rightarrow d \text{ 等压过程, 有} \quad \frac{T_c}{T_a} = \frac{V_c}{V_a} = \frac{V_2}{V_1} \quad ③$$

$$\text{由 } b \rightarrow a \text{ 绝热过程, 有} \quad \frac{p_b}{p_c} = \left(\frac{V_c}{V_b}\right)^\gamma = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma \text{ 又 } p_c = p_a, \text{ 所以}$$

$$\frac{p_b}{p_a} = \frac{p_b}{p_c} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma \quad ④$$

$$\text{将式 ③、④ 代入式 ① 得} \quad \eta = 1 - \gamma \frac{\frac{V_2}{V_1} - 1}{\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma - 1}$$

**思路总结** 求循环效率的关键是要判断整个过程中吸收的总热量与放出的总热量. 从得到的结果来看, 这道题目中循环的效率  $\eta$  取决于比热容比  $\gamma$  及状态  $a$ , 状态  $c$  的体积  $V_1, V_2$ , 若已知  $p_a, T_a, T_b$ , 由  $T_c = \frac{V_2}{V_1} T_a$ , 而  $\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma = \frac{p_b}{p_a} = \frac{T_b}{T_a}$ , 即  $\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_b}{T_a}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ . 有  $\frac{T_c}{T_b} = \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_b}{T_a}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ , 所以  $\eta = 1 - \gamma \frac{\left(\frac{T_b}{T_a}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1}{\frac{T_b}{T_a} - 1}$ .  
 即效率  $\eta$  取决于比热容比  $\gamma$  及状态  $a$ , 状态  $b$  的温度  $T_a, T_b$ .

11 理想气体卡诺循环过程的两条绝热线下的面积大小(图 13-8 中阴影部分)分别为  $S_1$  和  $S_2$ , 则二者的大小关系是( ).

A.  $S_1 > S_2$       B.  $S_1 = S_2$       C.  $S_1 < S_2$       D. 无法确定

(中国科学院西安光机所 2005 年硕士学位研究入学考试试题)

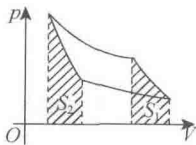


图 13-8

解 有绝热过程气体对外做功  $A = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}$ , 可知面积  $S_1 = S_2$ .

**思路总结** 绝热过程气体不与外界交换热量,  $A = -\Delta E = -\frac{M}{\mu} C_V (T_2 - T_1)$ , 注意到  $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V}$ ,  $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$  及理想气体物态方程  $pV = \frac{M}{\mu} RT$ , 则有  $A = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}$ .

12 (电子技术大学) 一定量的理想气体向真空作绝热自由膨胀, 体积由  $V_1$  增至  $V_2$ , 在此过程中气体的( ).

A. 内能不变, 熵增加      B. 内能不变, 熵减少  
 C. 内能不变, 熵不变      D. 内能增加, 熵增加

解 答案为 A.

当理想气体向真空作绝热自由膨胀时,对外做功为零,与外界没有热量交换.根据热力学第一定律,则系统的内能改变量为零,系统内能不变.这是个不可逆过程,根据熵增加原理,系统的熵要增加.



**思路总结** 理想气体向真空作绝热自由膨胀,系统做功为零,内能不变;体积增大,压强减小,温度不变;熵减少.

- 13** (吉林大学) 1 mol 单原子理想气体,初始体积为 10 升,温度为  $27^\circ\text{C}$ ,该气体经等压膨胀为原体积的两倍,求此过程中的热力学系统内能变化、吸收的热量和系统做的总功.

解 已知  $\frac{m'}{M} = 1 \text{ mol}$ , 初态体积  $V_0 = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ , 初态温度  $T_0 = 300 \text{ K}$

单原子分子  $i = 3$ , 等体摩尔热容  $C_V = \frac{3}{2}R$ , 等压摩尔热容  $C_p = \frac{5}{2}R$

等压膨胀, 末态体积  $V = 2V_0$ , 根据理想气体物态方程  $pV = \frac{m'}{M}RT$

末态温度  $T = \frac{V}{V_0}T_0 = 600 \text{ K}$

根据理想气体内能  $E = \frac{i}{2} \frac{m'}{M}RT$

热力学系统的内能变化:  $\Delta E = \frac{i}{2} \frac{m'}{M}R\Delta T = 3.74 \times 10^3 \text{ J}$

吸收的热量  $Q = \frac{m'}{M}C_p\Delta T = 6.23 \times 10^3 \text{ J}$

对外界做的总功  $W = p(V - V_0) = \frac{m'}{M}R\Delta T = 2.49 \times 10^3 \text{ J}$



**思路总结** 本题求出任意两项后,都可以运用热力学第一定律  $Q = \Delta E + W$  求出另一项,或者可以在求出三项之后,用热力学第一定律检验结果的正确性.

- 14** (江苏大学) 2 mol 由双原子刚性分子组成的理想气体,分别经过等体和等压过程使温度从 300 K 加热到 350 K,试求在两个过程中各吸收了多少热量?增加了多少内能?对外做了多少功?

解 已知摩尔数  $\nu = 2 \text{ mol}$ , 刚性双原子分子自由度  $i = 5$ , 则气体等体摩尔热容  $C_V = \frac{5}{2}R$ , 气体等

压摩尔热容  $C_p = \frac{7}{2}R$ , 初态温度  $T_1 = 300 \text{ K}$ , 末态温度  $T_2 = 350 \text{ K}$

(1) 等体过程

气体对外做功  $W_V = 0$ , 内能的变化

$$\Delta E = \frac{m'}{M}C_V(T_2 - T_1) = 2.08 \times 10^3 \text{ J}$$

根据热力学第一定律,吸收的热量

$$Q_V = \Delta E + W = 2.08 \times 10^3 \text{ J}$$

## (2) 等压过程

因为内能只是温度的函数,与过程无关,有上面计算过程可得:

内能的变化

$$\Delta E = 2.08 \times 10^3 \text{ J}$$

气体对外做功

$$W_p = p\Delta V = \frac{m'}{M}R(T_2 - T_1) = 8.31 \times 10^2 \text{ J}$$

根据热力学第一定律,吸收的热量为

$$Q_p = \Delta E + W = 2.91 \times 10^3 \text{ J}$$



**思路总结** 等体过程的热量也可以  $Q_V = \frac{m'}{M}C_V(T_2 - T_1) = 2.08 \times 10^3 \text{ J}$ ; 等压过程的热量也

可以  $Q_p = \frac{m'}{M}C_p(T_2 - T_1) = 2.91 \times 10^3 \text{ J}$ .

## 课后习题

**13-1 解题过程** 根据图中条件知  $bca$  为理想元件绝热过程, 根据理想气体状态方程  $pV = nRT$ , 压强和体积的乘积与  $T$  成反比, 则与  $b1a$  过程中  $p$  与  $V$  乘积相比,  $bca$  过程乘积小, 则温度就更高, 所以该过程为吸热过程, 作负功; 同理当  $pV$  乘积变大时, 温度  $T$  则减小, 该  $b2a$  过程就为放热过程, 做正功. 本题选 B.

**13-2 解题过程** 由理想气体的状态方程  $pV = nRT$ , 当气体的压强不变时, 体积在  $A$  到  $B$  过程中变大, 则温度  $T$  增大, 即气体内能必然增大, 本题选 B.

**13-3 解题过程** 由热力学第一定律有  $\alpha = \Delta E + W$ , 物体内能等于吸收的热量和外界对该物体做功之

和  $\frac{\alpha_{H_2}}{\alpha_{He}} = \frac{i_{H_2}}{i_{He}} = \frac{5}{3}$ . 当给氦气 3J 热量使之温度升高, 要使其升高到相同的温度, 向氢气传递 5J 的能量. 本题选 C.

**13-4 解题过程** A 图中绝热线比等温线要陡, 因此不对; B 和 C 都是两绝热线相交于一点, 肯定是不对的, 只有 D 符合理论, 可以实现, 本题选 D.

**13-5 解题过程** 由公式  $\frac{W}{Q_{吸}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ , 即可选 B.

**13-6 解题过程** 热力学第二定律一切与热现象有关的实际过程都是平方向进行的不可逆过程, 则 A 是正确的, 本题选 (A).

**13-7 逻辑推理** 在  $P-V$  图中, 等温线与绝热线的交点  $(V_0, P_0)$  处

等温线的斜率为  $\left(\frac{dp}{dV}\right)_T = -\frac{P_0}{V_0}$

绝热线的斜率为:  $\left(\frac{dp}{dV}\right)_a = -\gamma \frac{P_0}{V_0}$

因为  $\gamma > 1$ , 所以绝热线比等温线陡.

绝热线  $PV^\gamma = C$  是一簇平行曲线簇, 互不相交.

**解题过程** 选 D.

**13-8 知识总结** 热量计算式:  $Q = mc\Delta T$

**逻辑推理** 设想质量为  $m$  的水从瀑布顶端落到底部,重力对它做的功为  $W = mgh$ . 被水吸收的热量为  $Q = W \times 50\%$ ,由公式  $Q = mc\Delta T$  可求出温差  $\Delta T$ .

**解题过程** 质量为  $m$  的水从瀑布顶部落到底部,重力对它做的功为

$$W = mgh \quad ①$$

$$\text{水吸收的热量 } Q = 0.5W \quad ②$$

$$\text{由 } Q = mc\Delta T \text{ 得产生的温差为 } \Delta T = \frac{Q}{mc} \quad ③$$

$$\text{联立 } ① \sim ③ \text{ 式可得 } \Delta T = \frac{0.5}{c}gh = 1.15\text{K}$$

**13-9 逻辑推理** 由于已知  $A$ 、 $B$  两点坐标,可由直线的两点式确定直线方程  $p = p(V)$ ,再由  $W = \int p dV$  求出气体所做的功.

**解题过程** 由直线的两点式方程得

$$\frac{p-p_A}{V-V_A} = \frac{p_B-p_A}{V_B-V_A}$$

将已知数据代入上式并整理得

$$p = -10^8 V + 4 \times 10^5$$

由气体做功公式可得气体所做的功为

$$W = \int_{V_A}^{V_B} p dV = \int_{2 \times 10^{-3}}^{3 \times 10^{-3}} (-10^8 V + 4 \times 10^5) dV$$

$$W = 150\text{J}$$

此题也可由  $p-V$  曲线与  $V$  轴所围面积求解,即气体做功在数值上恰好等于梯形  $ABCD$  的面积.

**13-10 知识点窍** 理想气体物态方程:  $pV = \frac{m}{M}RT = nRT$  气体做功公式:  $W = \int p dV$

**逻辑推理** 因为压强不变,即  $p$  是常数,由  $W = \int_{V_1}^{V_2} p dV$  容易得到  $W = p \cdot (V_2 - V_1)$ ;再由理想气体物态方程求出  $p$  的表达式,将两个方程联立即可求出  $W$  的值.

**解题过程** 由气体做功的公式及压强不变可得  $W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) = p \cdot 2V_1 \quad ①$

$$\text{由理想气体物态方程得 } p = nR \cdot \frac{T_1}{V_1} \quad ②$$

$$\text{由 } ①、② \text{ 式得 } W = 2nRT_1 = 9.97 \times 10^3 \text{J}$$

**13-11 逻辑推理** 由气体做功公式  $W = \int p dV$  及压强不变,容易求出气体做的功  $W$ . 再将  $W$  和吸收的热量  $Q$  代入热力学第一定律  $Q = \Delta E + W$ ,就可求出气体内能的改变  $\Delta E$ .

**解题过程** 由于压强  $P = 1.0 \times 10^5 \text{Pa}$  保持不变,空气膨胀对外做功为

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) = 5.0 \times 10^2 \text{J} \quad ①$$

$$\text{由热力学第一定律得 } \Delta E = Q - W$$

将  $W = 500\text{J}$ 、 $Q = 1.71 \times 10^3 \text{J}$  代入 ② 式得气体内能的增量为  $\Delta E = 1.21 \times 10^3 \text{J}$

**13-12 知识点窍** 热力学第一定律:  $Q = \Delta E + A$



等压过程气体对外界所做的功:  $A = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1)$

**逻辑推理** 当是等体过程时,  $A = 0, Q = A + \Delta E$ ; 当是等压过程时,  $Q = \Delta E + A$ .

**解题过程** (1) 等体过程  $A = 0$ , 由热力学第一定律

$$Q = \Delta E + A = \frac{m}{M}C_{V,m}(T_2 - T_1) + 0 = 3.1 \times 10^3 \text{ J}$$

(2) 等压过程

$$\Delta E = \frac{m}{M}C_{V,m}(T_2 - T_1)$$

$$A = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1)$$

由热力学第一定律得  $Q = \Delta E + A = 4.0 \times 10^3 \text{ J}$ .

### 13-13 知识要点 理想气体物态方程

**解题过程** (1) 气体在该过程经历了等压膨胀.

(2) 汽缸中的气体在该过程吸收热量为  $Q = C_{p,m}v\Delta T$ .

由式  $pV = \nu RT$  得

$$\Delta T = \frac{p_2 V_2}{R} - \frac{p_1 V_1}{R} = \frac{p \cdot S \cdot \Delta l}{R}$$

$$\text{即 } Q = C_{p,m} \cdot v \cdot \frac{pS\Delta l}{R} = 5.3 \times 10^3 \text{ J}.$$

### 13-14 知识要点 热量计算公式: $Q = nC_m\Delta T$ 热力学第一定律: $Q = \Delta E + W$

**逻辑推理** 由理想气体物态方程  $pV = nRT$  及初态条件中求出物质的量  $n$ . 查表可得等压或等体摩尔热容  $C_m$ . 将  $n, C_m$  及  $\Delta T$  代入热量计算公式, 就可求出气体吸收的热量. 等体过程气体不做功, 等压过程气体做的功可由热力学第一定律求得.

**解题过程** 由理想气体方程得气体物质的量为  $n = \frac{pV}{RT}$

将初态  $p_1 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}, V_1 = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3, T_1 = 237 \text{ K}$  代入上式得  $n = 4.41 \times 10^{-2} \text{ mol}$

氧气的摩尔定压热容  $C_{p,m} = \frac{7}{2}R$ , 摩尔定容热容  $C_{v,m} = \frac{5}{2}R$ .

(1) 压强不变时:  $Q_p = nC_{p,m}(T_2 - T_1) = 128.1 \text{ J}$

体积不变时:  $Q_v = nC_{v,m}(T_2 - T_1) = 91.5 \text{ J}$

(2) 等体积过程中, 气体不做功, 即  $W_v = 0$ .

等压过程中, 气体对外做功: 由热力学第一定律得.

$$W_p = Q_p - \Delta E = Q_p - Q_v = 36.6 \text{ J} \quad W_v = Q_v - \Delta E = 0.$$

### 13-15 知识要点 热力学第一定律: $Q = \Delta E + W$

**逻辑推理** 由热力学第一定律可求出, 系统由状态 A 沿 ABC 变化到状态 C 的过程中, 系统内能的变化量  $\Delta E_{AC}$ . 而理想气体的内能仅是状态(温度)的函数, 由此可知系统由 C 到 A 的过程中, 内能的变化  $\Delta E_{CA} = -\Delta E_{AC}$ , 再由已知条件运用热力学第一定律便可求出系统“吸收”的热量. 由热量的正负可判断是吸热还是放热.

**解题过程** 系统由 A 沿 ABC 变化到 C 的过程中, 内能的增量为

$$\Delta E_{AC} = A_{ABC} - W_{ABC} = 200\text{J}$$

系统由 C 到 A, 内能的增量为

$$\Delta E_{CA} = -\Delta E_{AC} = -200\text{J}$$

所以从 C 到 A 系统吸收的热量为

$$Q_{CA} = \Delta E_{CA} + W_{CA} = -252\text{J}$$

式中负号表示系统向外放热。

### 13-16 知识点窍 理想气体状态方程: $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$

热力学第一定律:  $Q = \Delta E + W$

**逻辑推理** 由理想气体状态方程并结合图中 A、B 两点的状态参量可知 A、B 两状态温度相等, 即  $\Delta E_{AB} = 0$ , 由热力学第一定律可求出 ACB 过程气体做的功  $W_{ACB} = Q_{ACB}$ 。在 ACBDA 这个循环过程中, 内能的变化为零, 由热力学第一定律可知, 系统吸收的热量等于对外做功。而 ACB 过程的功  $W_{ACB} = Q_{ACB}$ , BD 过程是等体积过程, 气体不做功, 即  $W_{BD} = 0$ , DA 过程等压,  $W_{DA} = p\Delta V$  也可求, 以上 3 个过程气体做功的和就是循环过程的总功, 也就等于系统吸收的热量。

**解题过程** 由图中数据可知:  $p_A V_A = p_B V_B$ , 由理想气体状态方程可知  $T_A = T_B$ 。

由于内能是温度函数, 所以在 ACB 过程中,  $\Delta E_{ACB} = 0$

因此:  $W_{ACB} = Q_{ACB} = 700\text{J}$

在 BD 过程中, 体积不变:  $W_{BD} = 0$

在 DA 过程中, 压强不变:  $W_{DA} = \int_{V_D}^{V_A} p_A dV = p_A (V_A - V_D) = -1200\text{J}$

在 ACBDA 过程中  $W = W_{ACB} + W_{BD} + W_{DA} = -500\text{J}$

因循环过程  $\Delta E = 0$ , 所以  $Q = W = -500\text{J}$

负号表示该过程的总效果为放热。

### 13-17 逻辑推理 (1) 由定压摩尔热容的定义式分离变量积分可求出热量 $Q_p$ 。

(2) 将  $Q_p$  代入  $\bar{C}_{p,m} = \frac{Q_p}{\Delta T}$  可求出平均摩尔热容。

(3) 将给定温度和各常量代入  $C_{p,m}$  的表达式, 可得该温度时的定压摩尔热容; 将给定  $T_1$ 、 $T_2$  及各常量代入  $\bar{C}_{p,m}$  的表达式, 可求出在  $T_1$  和  $T_2$  之间的平均定压摩尔热容。

**解题过程** 由于已知  $C_{p,m} = a + 2bT - cT^{-2}$ , 所以

(1) 1mol 物质的温度从  $T_1$  等压升到  $T_2$  时吸收的热量为

$$\begin{aligned} Q_p &= \int_{T_1}^{T_2} C_{p,m} dT = \int_{T_1}^{T_2} (a + 2bT - cT^{-2}) dT \\ &= a(T_2 - T_1) + b(T_2^2 - T_1^2) + c(T_2^{-1} - T_1^{-1}) \end{aligned}$$

(2) 在温度  $T_1$  和  $T_2$  之间的平均摩尔热容为

$$\bar{C}_{p,m} = \frac{Q_p}{T_2 - T_1} = a + b(T_2 + T_1) - \frac{c}{T_1 T_2}$$

(3) 镁在 300K 时的热容为

$$C_{p,m} = a + 2bT - cT^{-2} \xrightarrow{\text{将 } a, b, c, T \text{ 代入}} 23.9\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

镁在 300K 和 400K 之间  $C_{p,m}$  的平均值为

$$\bar{C}_{p,m} \xrightarrow{\text{由(2)结论}} a + b(T_2 + T_1) - \frac{c}{T_1 T_2} \xrightarrow{\text{代入已知数据}} 23.5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

- 13-18 **逻辑推理** 由理想气体物态方程可得  $p = \frac{nRT}{V}$ , 代入功的计算式可求出等温过程气体做功  $W_t$  和等压过程气体做功  $W_p$ , 在整个过程中气体做功为  $W_t$  与  $W_p$  之和.

**解题过程** 等温膨胀气体做功为

$$W_t = \int p dV = \int \frac{nRT_1}{V} dV = nRT_1 \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = nRT_1 \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)$$

而等温过程遵循  $p_1 V_1 = p_2 V_2$ , 即  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$  代入上式得

$$W_t = nRT_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$$

等压压缩气体做功为

$$W_p = \int p dV = p_2 \int_{V_2}^{V_1} dV = p_2 (V_1 - V_2)$$

在整个过程中气体做功为

$$W = W_t + W_p = nRT_1 \ln \frac{p_1}{p_2} + p_2 (V_1 - V_2)$$

考虑  $p_1 V_1 = nRT_1$ ,  $p_2 V_2 = p_1 V_1$ , 则

$$W = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} + p_2 V_1 - p_2 V_2 = 55.7 \text{ J}$$

- 13-19 **知识点** 理想气体物态方程:  $pV = nRT$

气体做功公式:  $W = \int p dV$

热力学第一定律:  $Q = \Delta E + W$

**逻辑推理** 由功的公式及物态方程可分别求出两种情况下气体做的功. 而内能是状态的函数, 两种情况下的始、末状态相同, 内能的变化也相同, 考虑到所求(1)的过程等温过程, 故  $\Delta E = 0$ , 由热力学第一定律可求出两种情况下气体吸收的热量.

**解题过程** (1) 由 A 等温变到 B 的过程中, 系统做功为

$$W_{AB} = \int p dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \frac{V_B}{V_A} = p_A V_A \ln \frac{V_B}{V_A} = 2.77 \times 10^3 \text{ J}$$

而等温过程  $\Delta E = 0$ , 由热力学第一定律得

$$Q_{AB} = \Delta E_{AB} + W_{AB} = W_{AB} = 2.77 \times 10^3 \text{ J}$$

(2) 由 A 经 C 变到 B 的过程, 系统做功为

$$W_{ACB} = W_{AC} + W_{CB}$$

$$W_{AC} = 0, W_{CB} = p_B (V_B - V_C)$$

$$W_{ACB} = W_{CB} = 2.0 \times 10^3 \text{ J}$$

由于  $T_A = T_B$ , 所以  $\Delta E = 0$ , 由热力学第一定律得

$$Q_{ACB} = \Delta E + W_{ACB} = W_{ACB} = 2.0 \times 10^3 \text{ J}$$

- 13-20 **知识点** 绝热方程:  $pV^\gamma = \text{常数}$  气体做功公式:  $W = \int p dV$

**逻辑推理** 由于已知初态时的  $p_1, V_1$ , 代入绝热方程可求出任意状态下的  $p-V$  关系式:  $pV^\gamma =$

$p_1 V_1$ , 即  $p = \frac{p_1 V_1}{V^\gamma}$ , 将  $p$  代入气体做功的公式  $W = \int p dV$ , 即可求解.

**解题过程** 由绝热方程可得:  $p = \frac{p_1 V_1}{V^\gamma}$

压缩过程气体做功为

$$W = \int p dV = \int \frac{p_1 V_1}{V^\gamma} dV = \frac{p_1}{1-\gamma} [V_2 (\frac{V_1}{V_2})^\gamma - V_1] = -23.0 \text{ J}$$

负号表示外界对气体做功.

**13-21 知识点窍** 绝热过程方程:  $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$

**解题过程** 由题设  $l = 3.66 \text{ m}$ ,  $D = 0.152 \text{ m}$ ,  $m = 45.4 \text{ kg}$ ,  $l_1 = 0.98 \text{ m}$ ,  $v_1 = 311 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $p_1 = 2.43 \times 10^8 \text{ Pa}$ ,  $\gamma = 1.2$ .

(1) 炮弹出口时气体压强为

$$p_2 = p_1 (V_1/V_2)^\gamma = p_1 (l_1/l)^\gamma = 5.00 \times 10^7 \text{ Pa}$$

$$\text{气体做功 } W = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1} = \frac{p_1 l_1 - p_2 l}{\gamma - 1} \cdot \frac{\pi D^2}{4} = 5.00 \times 10^6 \text{ J}$$

(2) 由题意  $W = mv^2/2 - mv_1^2/2$ , 则

$$v = \sqrt{2W/m + v_1^2} = 563 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**13-22 解题过程** (1) 在等压膨胀时,  $p_1 = p_2$

$$W_{\text{外}} = \frac{\nu R T_1}{v_1} (v_2 - v_1) = R T_1 = 2.5 \times 10^3 \text{ J}$$

$$Q_{\text{吸}} = C_{p,m} \nu \Delta T = C_{p,m} \nu (T_2 - T_1) = 8.7 \times 10^3 \text{ J}$$

(2) 在等温膨胀时,  $T_1 = T_2$

$$W_{\text{外}} = \nu R T \ln \frac{V_2}{V_1} = R T_1 \ln 2 = 1.7 \times 10^3 \text{ J}$$

$$Q_{\text{吸}} = W_{\text{外}} = 1.7 \times 10^3 \text{ J}$$

(3) 在绝热膨胀的过程中:  $T_1 = T_2$

$$W_{\text{外}} = C_{v,m} \nu (T_1 - T_2) = \frac{5R}{2} (T_1 - T_2) = 1.5 \times 10^3 \text{ J}$$

由于是绝热的  $Q_{\text{吸}} = 0$

**13-23 知识点窍** 绝热过程方程  $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$

**解题过程** (1) 由题知:  $pV = \nu RT$

平衡后温度为  $T_1, T_2$ , 体积为  $V_1, V_2$ , 而压强  $p_1 = p_2$  相等, 则有:

$$\begin{cases} V_1 = 2V_2 \\ V_1 + V_2 = 2V_0 \end{cases} \quad \text{则有} \begin{cases} V_1 = \frac{4}{3}V_0 \\ V_2 = \frac{2}{3}V_0 \end{cases}$$

$$T_A = 2T_B = 2\left(\frac{V_0}{V_B}\right)^{\gamma-1} T_0 = 2.352T_0$$

$$\text{即 } T_B = 1.176T_0$$

$$(2) Q_{\text{吸}} = \Delta E_A + \Delta E_B = \frac{5R}{2} (T_A - T_0) + \frac{5R}{2} (T_B - T_0) = 31.7T_0$$

**13-24 知识点窍** 循环效率定义:  $\eta = \frac{W}{Q}$  理想气体物态方程:  $pV = \nu RT$

气体做功公式:  $W = \int p dV$

热力学第一定律:  $Q = \Delta E + W$  内能增量计算式:  $\Delta E = \frac{m}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1)$

**逻辑推理** 由循环效率定义式可知,求循环效率关键是求系统所做的净功和吸收的总热量.净功可分段计算,再求和.而吸热只有  $A \rightarrow B$  过程和  $D \rightarrow A$  过程,也可分别计算再求和.

**解题过程**  $W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$

其中  $W_{BC} = W_{DA} = 0$

$$W_{AB} = \int p dV = \int \frac{nRT_1}{V} dV = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

同理:  $W_{CD} = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_1}{V_2}$

一个循环系统所做的净功为

$$W = W_{AB} + W_{CD} = \frac{m}{M} R (T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1} = 5.76 \times 10^3 \text{ J}$$

吸热仅在  $A \rightarrow B$  过程和  $D \rightarrow A$  过程发生,所以吸收总热量为

$$Q = Q_{AB} + Q_{DA}$$

由于  $A \rightarrow B$  是等温过程,  $\Delta E_{AB} = 0$ , 所以

$$Q_{AB} = W_{AB} = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$D \rightarrow A$  是等体过程,  $W_{DA} = 0$ , 所以

$$Q_{DA} = \Delta E_{DA} = \frac{m}{M} C_{V,m} (T_1 - T_2)$$

$$Q = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{M} C_{V,m} (T_1 - T_2) = 3.81 \times 10^4 \text{ J}$$

$$C_{V,m} = \frac{5}{2} R \text{ 代入}$$

循环效率为  $\eta = \frac{W}{Q} = 15\%$

- 13-25 逻辑推理** 本循环由教材中介绍的理想气体的四个特殊过程组成.通过本题求解可以使我们对四个过程的特殊性有所了解.求解本题可以分四步进行:(1)先抓住各过程的特点填写一些特殊值,如等温过程  $AB$  中  $\Delta E = 0$ ,等体过程  $BC$  中  $W = 0$ ,绝热过程  $DA$  中  $Q = 0$  等.(2)填出  $AB$  中  $\Delta E = 0$  后,利用气体经历一个循环,内能变化为 0 的特点,即根据表格中每一列  $\Delta E$  之和为 0 的要求,填出  $DA$  过程内能变化值(这是本题顺利求解的关键).(3)在上两步的基础上,由热力学第一定律  $Q = \Delta E + W$  可以填写各过程中  $Q$  与  $W$  值的其他空格.(4)在明确了气体在循环中各过程的内能变化  $\Delta E$ ,做功  $W$ ,吸放热  $Q$  值后,整个系统的总吸热  $Q_1$ ,总放热  $Q_2$  以及对外做的净功  $W$  就都知道了,则效率可由公式  $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$  或  $\eta = \frac{W}{Q_1}$  求出.

**解题过程** 根据分析中方法,完成填写的表格如下:

过程	内能变化 $\Delta E/\text{J}$	做功 $W/\text{J}$	吸热 $Q/\text{J}$
$A \rightarrow B$	0	1 400	1 400
$B \rightarrow C$	-200	0	-200
$C \rightarrow D$	-200	-400	-600
$D \rightarrow A$	400	-400	0
ABCD	循环效率 $\eta = 42.9\%$		

### 13-26 知识 理想气体状态方程: $pV = nRT$

循环效率公式:  $\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$  ( $Q_2$  为总放热,  $Q_1$  为总吸热)

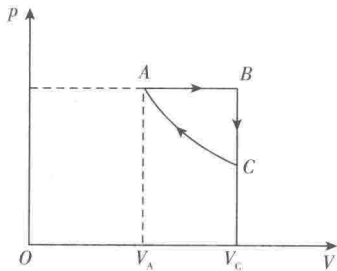
等压吸热公式:  $Q_p = nC_{p,m}(T_2 - T_1)$

等体吸热公式:  $Q_V = nC_{V,m}(T_2 - T_1)$

等温吸热公式:  $Q_1 = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$

**逻辑 推理** (1) 由  $p$ - $V$  循环图可判断循环对外做功的正负.

若循环对外做正功, 则为热机; 若循环对外做负功, 则为制冷机. 由  $V$ - $T$  图作  $p$ - $V$  图, 如图解 13-26 所示. 由于  $A \rightarrow B \rightarrow C$  过程做正功,  $C \rightarrow A$  过程做负功.  $p$ - $V$  图中曲线下面的面积代表了做功多少. 因而  $A \rightarrow B \rightarrow C$  过程做功的绝对值要比  $C \rightarrow A$  过程多, 因而循环  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  对外做正功, 因而为热机循环.



图解 13-26

(2) 计算出循环中的总吸热  $Q_1$ , 总放热  $Q_2$ , 则循

环效率为:  $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$

**解题 过程** (1) 由  $V$ - $T$  图可知:  $B \rightarrow C$  等体过程,  $C \rightarrow A$  等温过程,  $AB$  过原点, 因而  $A \rightarrow B$  为等压过程 ( $V \propto T$ ). 由此可作  $p$ - $V$  图.

由于  $A \rightarrow B \rightarrow C$  过程包围面积(对外做功)比  $C \rightarrow A$  包围面积(外界对系统做功)多, 因而可判定循环为热机.

(2) 由图可知  $A \rightarrow B$  吸热过程;  $B \rightarrow C$ ,  $C \rightarrow A$  均为放热过程.

由此可求总吸热  $Q_1$  和总放热  $Q_2$  分别为

$$Q_1 = nC_{p,m}(T_B - T_A)$$

$$Q_2 = nC_{V,m}(T_B - T_C) + nRT_A \ln \frac{V_C}{V_A}$$

因为  $C \rightarrow A$  等温过程, 故  $T_C = T_A$ , 又因为  $V_C = 2V_A$ ,  $A \rightarrow B$  等压过程, 所以  $T_A = \frac{1}{2}T_B$ .

代入  $Q_1$ ,  $Q_2$  公式, 可得循环效率  $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 12.3\%$

13-27 知识点 卡诺机效率公式:  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

逻辑推理 由效率公式可导出高温源  $T_1$  的表达式,代入已知数据便可求出两种效率时的高温热源的温度  $T_1$  和  $T'_1$ ,从而得出需要提高的温度  $\Delta T = T' - T$ .

解题过程 设高温热源温度分别为  $T'_1$  和  $T'_2$ ,由卡诺热机效率  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

当  $\eta_1 = 40\%$  时,  $T_2 = 7^\circ\text{C}$ , 即  $T_2 = 7 + 273 = 280\text{K}$

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T'_1} \quad (1)$$

$$\text{当 } \eta_2 = 50\% \text{ 时, } \eta_2 = 1 - \frac{T_2}{T'_2} \quad (2)$$

$$\text{由 } (1)、(2) \text{ 式得 } \Delta T = T'_2 - T'_1 = \left( \frac{1}{1 - \eta_2} - \frac{1}{1 - \eta_1} \right) T_2 = 93.3\text{K}$$

13-28 知识点 循环效率公式:  $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$  ( $Q_2$  为总放热,  $Q_1$  为总吸热)

等压过程吸热公式:  $Q_V = nC_{p,m}(T_2 - T_1)$

$$\text{等压过程规律: } \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

$$\text{绝热过程规律: } V_1^{-1} T_1 = V_2^{-1} T_2$$

逻辑推理 由于  $BC$  和  $DA$  是绝热过程,无热量传递.

$AB$  为等压膨胀过程,吸热,  $Q_{AB} = nC_{p,m}(T_B - T_A)$  } (不同)

$CD$  为等压压缩过程,放热,  $Q_{CD} = nC_{p,m}(T_D - T_C)$  }

对照效率公式  $Q_1 = Q_{AB}, Q_2 = |Q_{CD}|$

将  $Q_1, Q_2$  代入公式,  $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$  并利用等压规律和绝热方程进行变换,即可求出待证结论.

解题过程 由于只有  $AB$  吸热,  $CD$  放热,所以

$$(1) Q_1 = Q_{AB} = nC_{p,m}(T_B - T_A); Q_2 = |Q_{CD}| = |nC_{p,m}(T_D - T_C)|$$

$$\text{所以 } \eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_D - T_C}{T_B - T_A} = 1 - \frac{T_C}{T_B} \cdot \left[ \frac{1 - \frac{T_D}{T_C}}{1 - \frac{T_A}{T_B}} \right] \quad (1)$$

$$\text{由等压过程得: } \frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \quad (2)$$

$$\frac{V_C}{T_C} = \frac{V_D}{T_D} \quad (3)$$

$$\text{由绝热过程得: } V_B^{-1} T_B = V_C^{-1} T_C \quad (4)$$

$$V_D^{-1} T_D = V_A^{-1} T_A \quad (5)$$

由 (2) ~ (5) 式得:  $\frac{T_D}{T_C} = \frac{T_A}{T_B}$  代入 (1) 式并且  $T_C = T_2, T_B = T_1$  得:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

结论得证.

(2) 不是卡诺循环, 因为卡诺循环是由两条绝热线和两条等温线构成,  $T_1$ 、 $T_2$  的意义也不相同, 本题中  $T_1$ 、 $T_2$  只是温度变化中两特定点的温度, 不是两等温热源的恒定温度。

13-29 逻辑推理 由  $\eta = \frac{W}{Q}$  及  $P = \frac{W}{t}$  可得:  $P = \frac{Q}{t} \eta$ . 由此可得, 效率最高时功率最大。

由卡诺定理可知可逆机效率最高, 且  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ , 将  $p = \frac{Q}{t} \eta$  与  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$  联立, 即可求出最大功率  $p$ .

解题过程 由功率定义式  $p = \frac{W}{t}$  及效率定义式  $\eta = \frac{W}{Q}$ , 可得  $p = \frac{Q}{t} \eta$  ①

由 ① 式可知当效率  $\eta$  最大时,  $p$  有最大值. 由卡诺定理知工作在  $T_1$  和  $T_2$  间的可逆机效率最高且  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$  ②

联立 ①、② 式得热机的最大功率为  $p = \frac{Q}{t} (1 - \frac{T_2}{T_1}) = 2.0 \times 10^7 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$

13-30 知识要点 效率公式:  $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$

热量公式:  $Q_p = nC_{p,m}(T_2 - T_1)$

$Q_V = nC_{V,m}(T_2 - T_1)$

逻辑推理 由题图可知 AB 过程无热量传递, BC 是等压压缩过程, 放热.

CA 为等体升压过程, 吸热. 由此可知  $Q_1 = Q_{CA}$ ,  $Q_2 = |Q_{BC}|$

将  $Q_1$ 、 $Q_2$  代入公式  $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$ , 利用等压方程、热力学第一定律及  $\gamma = C_{p,m}/C_{V,m}$  进行数学变换, 即可得到待证结论.

解题过程 由于只有 CA 过程吸热, BC 过程放热, 由效率公式有

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_{BC}|}{Q_{CA}} = 1 - \frac{|nC_{p,m}(T_C - T_B)|}{nC_{V,m}(T_A - T_C)}$$

$$\text{整理得: } \eta = 1 - \gamma \frac{(T_B/T_C) - 1}{(T_A/T_C) - 1} \quad ①$$

$$\text{由 BC 是等压过程: } \frac{T_B}{V_1} = \frac{T_C}{V_2} \quad ②$$

$$\text{CA 是等体过程: } \frac{T_A}{p_1} = \frac{T_C}{p_2} \quad ③$$

$$\text{联立 ①} \sim \text{③ 式得 } \eta = 1 - \gamma \frac{(V_1/V_2) - 1}{(p_1/p_2) - 1}$$

结论得证.

13-31 知识要点 热机的效率:  $\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$

$$\text{卡诺循环效率: } \eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

逻辑推理 当采用提高高温热源温度(由  $T_1$  变为  $T_1'$ ) 改进热机效率时, 由于前后两个热机都工作在相同的绝热线间, 而低温不变( $T_2 = T_2'$ ), 则它们放热相同, 即  $Q_2 = Q_2'$ .

解题过程 (1)  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 40\%$ , 由  $\eta = \frac{W}{Q_1}$ :



$$Q_1 = \frac{W}{\eta} = 500 \text{ J}$$

$$Q_2 = Q_1 - W = 3000 \text{ J}$$

(2) 对于改进后热机: 由  $W' = 3000 \text{ J}$  和  $Q_2 = Q'_2 = 3000 \text{ J}$

可知  $Q_1' = W' + Q_2 = 6000 \text{ J}$ , 则热机效率为:

$$\eta' = \frac{W'}{Q_1'} = 50\%$$

$$\text{又 } \eta = 1 - \frac{T_2'}{T_1'} = 1 - \frac{T_2}{T_1'}$$

$$\text{得 } T_1' = 600 \text{ K.}$$

**13-32 知识要点** 效率定义:  $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$

$$\text{吸热公式: } Q_P = nC_{p,m}(T_2 - T_1)$$

$$Q_V = nC_{V,m}(T_2 - T_1)$$

$$\text{绝热方程: } \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

$$\text{等压方程: } \frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1}$$

**逻辑推理** 此循环只在 BC 过程吸热, DA 过程放热, 由此可

求出  $Q_1, Q_2$ , 再由效率公式  $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$  利用绝热

方程、等压方程等进行数学变换即可求出待证结论.

**解题过程** 由于  $Q_1 = Q_{BC}, Q_2 = |Q_{DA}|$ , 代入效率公式得

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{DA}|}{Q_{BC}} = \frac{Q = nC_m \Delta T}{\gamma = C_{p,m}/C_{v,m}} 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} \quad (1)$$

$$\text{在 AB 绝热过程中} \quad \frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \quad (2)$$

$$\text{在 BC 等压过程中} \quad \frac{T_B}{T_C} = \frac{V_2}{V_3} \quad (3)$$

$$\text{在 CD 绝热过程中} \quad T_D V_1^{\gamma-1} = T_C V_3^{\gamma-1} \quad (4)$$

$$\text{联立 (1) ~ (4) 式得} \quad \eta = 1 - \frac{(V_3/V_2)^{\gamma} - 1}{\gamma(V_1/V_2)^{\gamma-1} \cdot \left(\frac{V_3}{V_2} - 1\right)}$$

证毕.

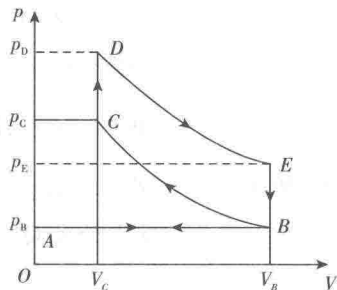
**13-33 逻辑推理** 由  $\eta_1 = \frac{W_1}{Q_1}, \eta_2 = \frac{W_2}{Q_2}$  及  $\eta = \frac{W_1 + W_2}{Q_1}$ , 可直接得到  $\eta = (1 - \eta_1)\eta_2 + \eta_1$

$$\text{将 } \eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \eta_2 = 1 - \frac{T_3}{T_2} \text{ 代入前面的结论即可得 } \eta = 1 - \frac{T_3}{T_1}.$$

**解题过程** 由效率的定义式知:  $\eta_1 = \frac{W_1}{Q_1}, \eta_2 = \frac{W_2}{Q_2}$ , 将  $\eta_1, \eta_2$  代入组合机的总效率  $\eta = (W_1 + W_2)/Q_1$  得

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 \cdot \frac{Q_2}{Q_1} = \eta_1 + \eta_2(1 - \eta_1)$$

结论(1)得证.



图解 13-32

将  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ ,  $\eta = 1 - \frac{T_3}{T_2}$  代入结论(1)得

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} + (1 - \frac{T_3}{T_2})[1 - (1 - \frac{T_2}{T_1})]$$

$$\eta = 1 - \frac{T_3}{T_1}$$

结论(2)得证.

13-34 知识点 制冷系数:  $e = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$  卡诺机制冷系数:  $e_k = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$

耗电作功公式:  $W = Q_1 - Q_2$

解题过程 因为室内温度保持不变,所以空调从房间吸收的热量应等于房间从室外吸收的热量,即  $Q_2 = 2.51 \times 10^8 \text{ J}$

由于 
$$e = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \times 60\% = 8.7$$

$$W = Q_1 - Q_2 = \frac{Q_2(T_1 - T_2)}{0.6T_2} = 2.89 \times 10^7 \text{ J} = 8.01 \text{ kw} \cdot \text{h}$$

13-35 解题过程 证明理想气体从1到2的过程中有

$$Q_1 = \nu R T_1 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

而从3到4的过程中有  $Q_2 = \nu R T_2 \ln \frac{V_1}{V_2}$

此循环的制冷系数 
$$e = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

可以证得循环的制冷系数和逆向卡诺循环制冷系数相等.

13-36 知识点 熵变的公式:  $\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$

逻辑推理 熵是状态函数,对于状态A与状态B之间的熵变  $\Delta \int_{AB}$  与路径无关,因此题中所求两个过程中气体的熵变只需要选择一个过程计算.

解题过程 由于熵是状态函数,因此  $\Delta S_{ADB} = \Delta S_{ACB}$ ,选择ADB过程进行计算.由熵变公式有

$$\Delta S_{ADB} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^D \frac{dQ}{T} + \int_D^B \frac{dQ}{T} \quad ①$$

由于AD是等温过程:

$$\int_A^D \frac{dQ}{T} = \int_A^D \frac{dW_1}{T} = nR \ln \left( \frac{V_D}{V_A} \right) \quad ②$$

DB过程是等压过程:

$$\int_D^B \frac{dQ_p}{T} = \int_D^B n C_{p,m} \frac{dT}{T} = n C_{p,m} \ln \left( \frac{T_B}{T_D} \right) \quad ③$$

将②、③式代入①式并考虑  $C_{p,m} = C_{v,m} + R$ ,  $T_D = T_A$ ,  $\frac{V_B}{T_B} = \frac{V_D}{T_D}$

则 
$$\Delta S_{ADB} = nR \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right) + \frac{3}{2} nR \ln \left( \frac{T_B}{T_A} \right).$$

注:若选择ACB过程计算,  $\Delta S_{ACB}$  应有相同的结论,请自行尝试.

13-37 知识点 绝热过程方程:  $TV^{\gamma-1} = C$ .

$$\text{效率公式: } \eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$$

**逻辑推理** 这个循环过程只有  $ab$  一个过程吸热  $Q_1$  和  $bc$  一个过程放热  $Q_2$ . 将它们代入效率公

式  $\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$ , 并利用  $ca$  绝热过程方程  $TV^{\gamma-1} = C$ , 获得  $T_c$  与  $T_a$  的关系式. 求

出效率值. 第二间中  $bc$  是等体过程. 每个微小过程的热量变化为

$$dQ = \frac{m'}{M} C_{v,m} dT, \text{ 熵变为 } dS = \frac{m'}{M} C_{v,m} \frac{dT}{T}, \text{ 则 } \Delta S = \int dS$$

**解题过程** (1) 根据上面的推导可知效率是:

$$\eta = 1 - \frac{C_{v,m}(T_a - T_c)}{RT_a \ln V_b/V_a} = 1 - \frac{\frac{5}{2}(1 - \frac{T_c}{T_a})}{\ln 3}$$

$$\text{根据 } T_a V_a^{\gamma-1} = T_c V_c^{\gamma-1}: \frac{T_c}{T_a} = \left(\frac{V_a}{V_c}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0.4}$$

代入上式解得  $\eta = 19\%$

$$\begin{aligned} (2) \Delta S &= S_c - S_b = \frac{m'}{M} C_{v,m} \int_{T_b}^{T_c} \frac{dT}{T} \\ &= \frac{m'}{M} C_{v,m} \ln \frac{T_c}{T_b} = \frac{m'}{M} C_{v,m} \ln \frac{T_c}{T_a} \\ &= -0.91 \text{ J/K} \end{aligned}$$

**13-38 知识要点** 可逆过程的熵变公式:  $\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$

热力学第一定律:  $Q = \Delta E + W$

**逻辑推理** 在绝热条件下, 气体向真空自由膨胀并不对外做功, 因而气体的内能不变, 即气体的温度不变, 这显然是不可逆过程, 而计算熵变必须设想一个可逆过程.

由于气体是从始态  $(V_1, T)$  变为末态  $(V_2, T)$  的, 我们可以设想气体从始态变到末态是在可逆的等温过程下进行的, 由于  $dE = 0$ , 所以  $dQ = dW = p dV$ . 由此通过积分可求出熵变.

**解题过程** 选择可逆的等温过程, 初态  $(V_1, T)$ , 末态  $(V_2, T)$ , 由于  $dQ = dW = p dV$ , 而  $p = \frac{m}{M}$

$$\frac{RT}{V}, \text{ 所以熵变为 } \Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} \frac{R}{V} dV = nR \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = 11.52 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

**13-39 解题** 杆上任一小段  $dx$  的熵变为

$$\begin{aligned} dS &= c_1 dx = \int_{T_1}^{\frac{1}{2}(T_1+T_2)} \frac{dT}{T} \\ &= C_1 dx \left[ \ln \frac{1}{2} (T_1 + T_2) - \ln \left( T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x \right) \right] \end{aligned}$$

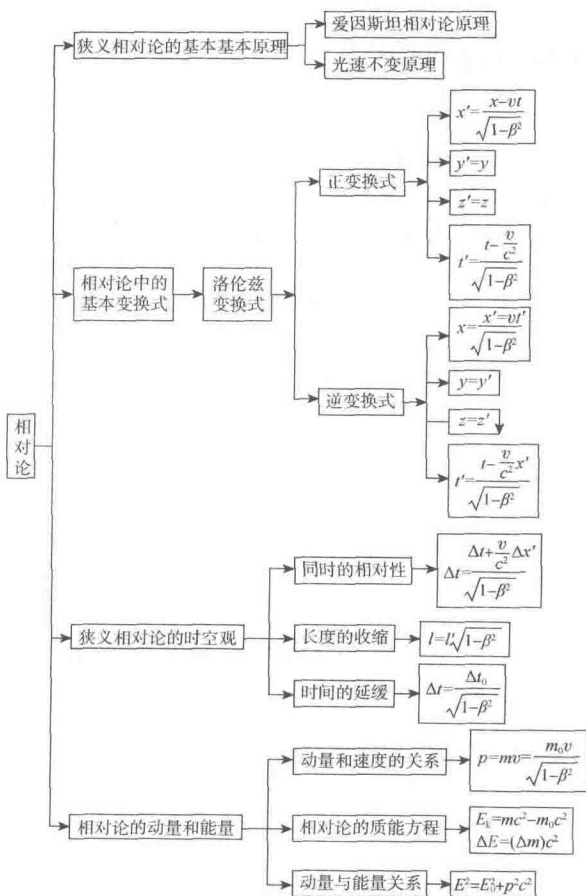
整杆熵变为:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int ds = C_1 \int_0^L \left[ \ln \frac{1}{2} (T_1 + T_2) - \ln \left( T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x \right) \right] dx \\ &= c_1 L \left( \ln \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_2 \ln T_2 - T_1 \ln T_1}{T_2 - T_1} + 1 \right) \end{aligned}$$

# 第十四章

## 相对论

### 本章知识框架图



## 考试要点

1. 爱因斯坦狭义相对论的两条基本原理以及洛伦兹变换式。
2. 狭义相对论中同时的相对性,以及长度收缩和时间延缓的概念,狭义相对论的时空观。
3. 狭义相对论中质量、动量与速度的关系,以及质量与能量间的关系和能量与动量间的关系。

## 知识点整理与解析

狭义相对论是爱因斯坦在洛伦兹和庞加莱等人工作的基础上创立的时空理论,是对牛顿时空观的拓展和修正。爱因斯坦以光速不变原理为基础建立了新的时空观。

### 一、伽利略变换和牛顿时空观

#### (1) 伽利略变换

伽利略变换讨论的是对于同一物理事件  $P$  在不同惯性系中所观察到的时空坐标之间的变换关系,如图 14-1 所示,设有两个惯性系  $S$  和  $S'$ ,  $S'$  相对于  $S$  以速度  $u$  沿  $x$  轴正向运动,并取两坐标系原点  $Q$  与  $Q'$ ,当  $Q$  与  $Q'$  重合时,作为两坐标系统计时的起点,即  $t=t'=0$ ,某物理事件  $P$  在  $S$ 、 $S'$  惯性系所观测到的时空坐标分别为  $(x, y, z, t)$  和  $(x', y', z', t')$ ,伽利略指出:

$$x' = x - ut, y' = y, z' = z, t' = t, \text{ 或者 } r' = r - ut,$$

上式称为伽利略坐标变换式,上速方程两边对时间求导,并注意到  $t' = t$ , 则有

$$v'_x = v_x - u, v'_y = v_y, v'_z = v_z, \text{ 或者 } v' = v - u,$$

上式称为伽利略速度变换式,若将上式在对时间求导,则有

$$a'_x = a_x - u, a'_y = a_y, a'_z = a_z, \text{ 或者 } a' = v - u,$$

上式称为伽利略加速度变换式,其物理意义为在任何惯性系中,质点的加速度都是相同的,或者说物体加速度对伽利略变换是不变的。

#### (2) 绝对时空观

在伽利略变换中  $t' = t$ , 则  $\Delta t' = \Delta t$ , 这说明:在两个彼此运动的惯性系中,所观测到的空间任意两点之间的距离相等,即空间与运动无关,与观察者无关,空间是绝对不变的,这就是经典力学中的绝对观。

在伽利略变换还可以得出  $\Delta r' = \Delta r$ , 这说明:在两个彼此运动的惯性系中,所观测到的空间任意两点之间的距离相等,及空间与运动无关,与观察无关,空间是绝对不变的,这就是经典力学中的绝对空间观。

#### (3) 伽利略变换下的力学相对性原理

一切惯性系都是等价的,力学规律在所有惯性系下都具有相同的数学形式,称为协变性。

原理隐含假设:物体的质量是绝对的,相互作用力也是绝对的,不同惯性系下是不变的,此原理

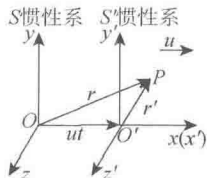


图 14-1

说明:在相对于惯性系做匀速直线运动的系统内,不能用任何力学规律确定系统本身相对于惯性系的速度。

## 二、狭义相对论基本原理

### (1) 相对性原理

所有物理学规律在所有的惯性系下都具有相同的数学形式。此原理说明任何惯性系都是等价的,任何物理现象都觉察不出惯性系相对以太的绝对速度,以太是不存在的。

### (2) 光速不变原理

在所有惯性系中,真空中的光速恒定。在伽利略变换下,除了以太系外,其他惯性系中光速是各向异性的,光速不变原理否定了伽利略变换,也就否定了绝对时空观。此外,该原理还说明真空中光速和光源与观察者之间的相对运动无关。

小结:

名称	内容	说明
相对性原理	物理定律在所有的惯性系中都具有相同的表达形式,即所有惯性参考系对运动的描述都是等效的	指出了绝对静止参考系是不存在的
光速不变原理	在所有惯性系中,真空中的光速等于常量,它与光源、观察者的运动无关	光速不依赖于惯性系的选择

## 三、洛伦兹变换

两个惯性参考系  $S$  系和  $S'$  系如图 14-2 所示,它们相应的坐标轴相互平行,且  $x$  轴和  $x'$  轴重合,  $S'$  系沿  $x$  轴方向以恒定速度  $u$  相对  $S$  系运动,并且在坐标原点  $Q$  与  $O'$  重合时刻,  $t=t'=0$ ,并记某一事件在惯性参考系  $S, S'$  中的时空坐标分别为  $(x, y, z, t)$  和  $(x', y', z', t')$ ,则其时空坐标变换关系为

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}}, y' = y, z' = z$$

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

逆变换式为

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, y = y', z = z'$$

$$t = \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

式中  $\beta = u/c$  为相对论因子。

当速度远小于光速时,  $\beta \ll 1$ , 洛伦兹变换退化为伽利略变换(满足对应性原理):

$$x' = x - ut, y' = y, z' = z, t' = t$$

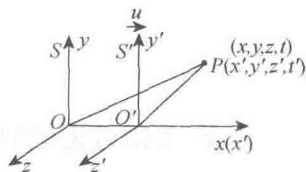


图 14-2

## 小结:洛伦兹坐标变换式

名称	内容	说明
正变换	$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$ $y' = y$ $z' = z$ $t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$	<p>(1)两个惯性系 <math>S</math> 和 <math>S'</math> 是狭义相对论的约定参考系,且 <math>S'</math> 系相对 <math>S</math> 系以速度 <math>v</math> 沿 <math>x</math> 轴正方向作匀速直线运动.</p> <p>(2)若 <math>S'</math> 系相对 <math>S</math> 系以速度 <math>v</math> 沿 <math>x</math> 轴负方向运动,公式中速度 <math>v</math> 取负.</p> <p>(3)洛伦兹变换式是同一事件在不同惯性系中的时空坐标变换关系</p>
逆变换	$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$ $y = y'$ $z = z'$ $t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$	<p>(1)将正变换式中带撇量与不带撇量互换,并将 <math>v</math> 换成 <math>-v</math>,就可将正变换变为逆变换.</p> <p>(2)当 <math>v \ll c</math> 时,洛伦兹变换式变为伽利略变换式</p>

## 小结:洛伦兹速度变换式

名称	内容	说明
正变换	$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$ $u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$ $u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$	<p>(1)<math>\beta = \frac{v}{c}</math></p> <p>(2)虽然 <math>S'</math> 系相对 <math>S</math> 系只沿 <math>x</math> 轴方向运动,但在速度变换中,速度的三个分量都要变换.</p> <p>(3)相对论速度变换遵从光速不变原理</p>

## 四、狭义相对论的时空观

## 1. 同时性的相对性

沿两个惯性系相对运动方向上发生的两个独立事件,若在一个惯性系中是同时发生的,则在另一惯性系中不一定同时发生.

任意两事件  $P_1$  和  $P_2$  在  $S$  和  $S'$  系中的时间间隔的变换关系为

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - u(x_2 - x_1)/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

相应的逆变换式读者可根据上式推出.

在  $S$  系中发生的两个事件是同时的,即  $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$ ,则在  $S'$  系中

$$\Delta t' = -\frac{u\Delta x}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}$$

若  $\Delta x = 0$ ,同时具有绝对意义;若  $\Delta x \neq 0$ ,同时是相对的.



**温馨提示** (1)在一般情况下,对于一个观测者是同时发生的两个事件,对于另一个观测者就不一定是同时发生的.只有在同时间、同地点发生的两个事件的同时性才具有绝对意义.(2)同时性的相对性否定了各个惯性系具有统一时间的可能性,否定了牛顿的绝对时间观

**例 1** 长 0.5 km(列车上观察者测量到的)的列车如果能以 100 km/h 的速度行驶,若在地面上观察测得两个闪电同时击中火车的前后端,试问:火车上的观察者测得闪电击中前后两端的时间间隔是多少?

**解** 设  $S'$  系在列车上,  $S$  系在地球上, 列车( $S'$  系)以速度  $v=100$  km/h 沿  $x$  正向相对地球( $S$  系)运动, 两个闪电(设为 1、2 两事件)在  $S'$  系和  $S$  系中的时空坐标系分别为  $(x'_1, t'_1)$  和  $(x'_2, t'_2)$  和  $(x_1, t_1)$   $(x_2, t_2)$ , 由于已知在  $S'$  系测得:  $x'_2, x'_1 = l' = 0.5$  km,  $t'_1 = t'_2$ , 因而选用洛伦兹变换式得

$$t'_2 - t'_1 = (t'_2 - t'_1) = \frac{\frac{v}{c^2} x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

略去  $\frac{v^2}{c^2}$  项, 得

$$0 = t'_2 - t'_1 + \frac{v}{c^2} (x'_2 - x'_1)$$

即

$$t'_2 - t'_1 = -\frac{v}{c^2} l_0 = \frac{-27.8 \times 5 \times 10^2}{(3 \times 10^8)^2} = -1.54 \times 10^{-13} \text{ (s)}$$

结果表明火车上的观察者测得两闪电击中火车两端的时间间隔为  $1.54 \times 10^{-13}$  s, 而不是同时发生.

## 2. 时间延缓效应

事件发生地点相对于观察者静止时, 所测得物理过程的时间间隔为  $\tau_0$ ,  $\tau_0$  称为固有时间. 当事件发生地点相对于观察者以速度  $u$  运动时, 所测得物理过程的时间间隔为

$$\Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tau_0$$

由于  $\Delta t > \tau_0$ , 故称为时间延缓效应.

**例 2** 某粒子在静止时的寿命为  $10^{-6}$  s, 当它以  $0.98c$  运动时:

(1)粒子的寿命是多少?

(2)在与运动粒子相连接的惯性系看, 粒子一生走过的距离是多少?

**解** 设与运动粒子相连接的坐标系为  $S'$  系, 与地球相连接的坐标系为  $S$  系.

(1)在  $S'$  系中, 粒子的寿命(即固有时间)  $\Delta t = 10^{-6}$  s, 在  $S$  系中粒子的寿命为

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{10^{-6}}{\sqrt{1 - 0.98^2}} = 5.03 \times 10^{-6} \text{ (s)}$$

$\Delta t' > \Delta t$ , 即相对与粒子运动的坐标系中所测得的寿命比相对于粒子静止的坐标系中的寿命要长.

(2)在  $S$  系中看, 粒子走过的距离为

$$l = v \Delta t' = 0.98 \times 3 \times 10^8 \times 5.03 \times 10^{-6} = 1.479 \text{ (m)}$$



1 479 m 是在 S 系中观察到的长度,称为固有长度,对于与粒子相连接的坐标系  $S'$ ,粒子走过的距离为

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 1\,479 \times \sqrt{1 - 0.98^2} = 294.3 (\text{m})$$

### 3. 运动长度的收缩

物体相对于观察静止时的长度为  $l_0$ ,  $l_0$  称为物体的固有长度,当物体以速度  $u$  相对于观察者运动时,观察者测得物体的长度为

$$l = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} l_0.$$

由上式易观察到  $l < l_0$ , 故称为运动尺度的收缩,长度收缩有两点含义:一是物体沿运动方向上长度收缩;二是长度收缩是以观察者为标准的,只有当物体与观察者发生相对运动,才能观测到收缩效应.当物体与观察发生相对运动时,必须同时测量物体的两端,这称为长度测量原则.

例 3 固有长度  $l_0$  2.5 m 的汽车,以 30 m/s 的速度沿直线道路行驶,试计算站立在路旁的观察者按相对论原理,将看到该车长度缩短了多少?

解 设汽车为  $S'$  系,静止于路旁的观察者为 S 系,  $S'$  系相对于 S 的速度为  $v = 30$  m/s,观察者看到汽车的长度应为

$$l' = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = l_0 (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}} = l_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_2}{c_2} - \frac{3}{8} \cdot \frac{v_4}{c_4} - \dots \right)$$

因  $v \ll c$ , 故  $v/c \ll 1$ , 高次项可略去,得

$$l' = l_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{v_2}{c_2} \right)$$

汽车缩短量为

$$l_0 - l' = \frac{1}{2} \frac{v_2}{c_2} l_0 = 1.25 \times 10^{-14} (\text{m})$$

显然,上述缩短量在实际上是观测不到的.

例 4 假设有一飞船速度可达  $v = 0.5c$ ,它沿着广州和北京的路线(约长  $l_0 = 1.89 \times 10^3$  km)飞行,问飞船中的乘客看到广州与北京间的距离为多长?

解 设飞船中乘客看到两地的直线距离为  $l$ ,按照例 3 结果可得

$$l_0 - l' = \frac{1}{2} \frac{v_2}{c_2} l_0 = 236 (\text{km})$$

缩短量为 236 km,在实际上是完全可观测到的.

可见,低速运动中无须考虑长度缩短效应,高速运动必须应用相对论处理.

小结:

名称	内容	说明	
同时的相对性	$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	S 系发生的两事件	$S'$ 系中观察的结果
		同时 同地	同时
		同时 异地	不同时
		不同时 不同地点	不一定同时

名称	内容	说明
长度收缩	$l = l_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$ $l_0$ 称为固有长度, $l$ 称为运动长度. 由 $l < l_0$ 可知, 固有长度最长	(1) 长度只沿运动方向收缩. (2) 只有在相对物体运动的惯性系中能同时测量物体的长度时, 才可以用长度收缩公式
时间延缓	$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$ $\Delta t_0$ 称为固有时, $\Delta t$ 称为运动时. 由 $\Delta t > \Delta t_0$ 可知, 固有时最短	(1) 固有时是指在某一惯性系中同一地点先后发生的两个事件之间的时间间隔, 它是由静止于此惯性系的时钟测出的. (2) 只有满足固有时条件才可用时间延缓公式

## 五、相对论力学

物体运动速度的大小为  $v, \beta = \frac{v}{c}$ .

### 1. 相对论质量

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (m_0 \text{ 为静止质量, } m \text{ 为运动质量})$$

### 2. 相对论动量

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

### 3. 相对论能量

总能量:  $E = mc^2$

静止能量:  $E_0 = m_0 c^2$

相对论动能:  $E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2$

### 4. 相对论动量和能量关系

$$E^2 = p^2 c^2 + E_0^2 = p^2 c^2 + m_0 c^2 + (m_0 c^2)^2$$

关系如图 14-3 所示.

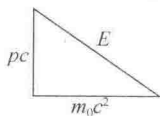


图 14-3

**温馨提示** (1) 经典区域  $v \ll c, \gamma = \sqrt{1 - \beta^2} \rightarrow 1, p = m_0 v, E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}, E = E_0 + \frac{p^2}{2m}$ ;  
 (2) 相对论极限  $v \approx c, \gamma \gg 1, E = E_k = pc = h\nu$ .

小结:

名称	内容	说明
相对论质量	$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ <p>此式也称为质速关系式, <math>m_0</math> 为静止质量, <math>m</math> 为运动质量, <math>v</math> 为粒子的运动速度</p>	<p>(1) 当 <math>v \ll c</math> 时, 相对论质量回到经典力学情形.</p> <p>(2) 相对论动量</p> $p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$
相对论力学基本方程	$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right)$	$\mathbf{F}$ 与 $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ 不成正比关系
质能关系式	<p>质能关系式</p> $E = mc^2$ <p>相对论动能</p> $E_k = mc^2 - m_0 c^2$	<p>(1) 质能关系式是相对论最伟大的创举.</p> $\Delta E = \Delta mc^2$ <p>(2) 当物体静止时, 静能量</p> $E_0 = m_0 c^2$
相对论动量和能量的关系	$E^2 = p^2 c^2 + E_0^2$	<p>光子: <math>m_0 = 0</math></p> $p = \frac{E}{c}, E = h\nu$

例5 将一静止质量为  $m_0$  的粒子, (1) 从静止加速到  $0.1c$  时; (2) 从  $0.9c$  加速到  $0.98c$  时; (3) 从静止加速到  $0.0001c$  时, 外力对粒子做功各为多少? 动能的增量各为多少?

解 在 (1)、(2) 两种情况下, 由于粒子的速度接近光速, 必须用相对论中动能计算公式.

(1) 到  $v_1 = 0, v_2 = 0.1c$  时, 有

$$A_1 = E_k = mc^2 - m_0 c^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) m_0 c^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1-0.1^2}} - 1 \right) m_0 c^2 = 0.0005 m_0 c^2$$

(2) 当  $v_1 = 0.9c, v_2 = 0.98c$  时, 有

$$A_2 = E_{k_2} - E_{k_1} = \left( \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} \right) m_0 c^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1-0.98^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-0.9^2}} \right) m_0 c^2 = 2.7 m_0 c^2$$

(3) 当  $v_1 = 0, v_2 = 0.0001c$  时, 有

$$A_3 = E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

由于  $\frac{v}{c} \ll 1$ , 按二项式展开, 忽略高次项得

$$E_k \approx m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

以  $v_2$  代入, 得  $E_k = \frac{1}{2} m_0 \times 10^{-8} c^2 = 5 \times 10^{-9} m_0 c^2$ , 可见, 低速时, 按相对论公式计算出的经典力学动能相等.

## 考研真题解析

- 1 (1)以观察者测得运动着的米尺长度为  $0.5 \text{ m}$ , 求此米尺相对于观察者以多大速率飞来?  
 (2)如一观察者测得一运动的电子质量为  $2m_0$ , 求出电子此时运动的速度 ( $m_0$  是电子在的静止质量).  
 (华中科技大学 2001 年硕士学位研究生入学考试试题)

**解题分析** 狭义相对性的长度收缩、相对论性物体的运动质量与静止质量关系是本题的考点.

**解** (1)由狭义相对论的长度收缩公式  $l = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} l_0$

代入  $l = 0.5 \text{ m}$ ,  $l_0 = 1 \text{ m}$  有

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2} c$$

即米尺相对于观察者以  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  倍的光速飞来.

(2)有相对论物体的运动质量  $m$  和静止质量  $m_0$  的关系得

$$m = 2m_0 = m_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2} c$$



**思路总结** 公式  $l = l_0 \sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}$  和  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}}$  的一般应用.

- 2 设一介子在静止下来后衰变为一个  $\mu$  子和一个中微子, 其静止质量分别为  $m_1$ 、 $m_2$  和 0. 求衰变后该  $\mu$  子和中微子的动能.  
 (华中科技大学 2003 年硕士学位研究生入学考试试题)

**解题分析** 相对论性动量及能量守恒是本题的考点.

**解** 有动量守恒,  $\mu$  介子和中微子的动量方向相反, 大小相等. 根据相对论的动量和能量守恒有

$$P_\mu = P_\nu$$

$$m_1 c^2 = \sqrt{m^2 \mu c^4 + P_\mu^2 c^2} + P_\mu c$$

中微子的动能为

$$P_\mu c = \frac{m_1^2 - m_2^2}{2m_1} c^2$$

而  $\mu$  介子的动能为

$$(m_1 - m_2) c^2 - P_\mu c = \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2 c^2}{2m_1}$$



**思路总结** 对微观衰变系统, 其动量和能量任然守恒.

- 3 某一宇宙射线中的介子的动能为  $E_k = 7m_0 c^2$ , 其中  $m_0$  为介子的静止质量, 试求实验室中观察者所测得介子的寿命是它固有寿命的多少倍?  
 (华东理工大学 2000 年硕士学位研究生入学考试试题)

**解题分析** 相对论性总能量和动能是本题的考点.

解 设宇宙射线的运动速度大小为  $u$

有相对论动能公式

得

$$\begin{aligned} E_k &= mc^2 - m_0 c^2 \\ E_k &= mc^2 - m_0 c^2 = 7m_0 c^2 \\ m &= 8m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}} \end{aligned}$$

再由  $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}}$  可得, 实验室观测到的介子的寿命时期固有寿命的 8 倍.



**思路总结** 该题一方面考查了相对论性总能量和动能知识; 另一方面, 也考查了相对论性时钟变慢效应(时间膨胀). 通过此题的结论明显可以看出, 寿命确实已经膨胀为固有寿命的 8 倍.

- 4 一艘宇宙飞船以  $0.8c$  ( $c$  为光速) 的速度飞向月球, 一人在月球上量得运动中的飞船长度为  $20 \text{ m}$ , 当飞船在月球上登陆后, 他再测量飞船的长度. 问测得的结果如何.  
(清华大学 2002 年硕士学位研究生入学考试试题)

解题分析 相对论长度伸缩是此题的考查点.

解 相对论长度收缩

$$l = l_0 \sqrt{1 - (\frac{u^2}{c^2})}$$

其中,  $l$  为运动长度,  $l_0$  为静止长度,  $u$  为物体的速度. 则

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{20}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = 33.33 \text{ m}$$



**思路总结** 公式  $l = l_0 \sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}$  的应用.

- 5 某观察者测得一静止细棒的长度为  $a$ , 质量为  $m$ , 在相对论情况下解答下列问题:  
(1) 若此棒以速度  $u$  沿棒长方向运动, 观察者测得此棒的线密度应为多少?  
(2) 若此棒以速度  $u$  沿棒长方向垂直方向运动, 观察者测得此棒的线密度应为多少?  
(华中科技大学 2002 年硕士学位研究生入学考试试题)

解题分析 在沿棒长方向运动时, 长度收缩; 而沿与棒长方向相垂直的方向运动时, 长度不变. 质量可由相对论质量公式求出, 从而解出线密度.

解 (1) 有相对论长度收缩效应, 观察者测得棒的长度为

$$a' = a \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

相对论运动质速关系有

$$m' = m \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

得观察者测量到此棒的线密度大小为

$$\frac{m'}{a'} = \frac{m}{a} \left[ 1 - \left( \frac{u}{c} \right)^2 \right]^{-1}$$

(2)若此棒以速度  $u$  沿棒长相垂直的方向运动时,观察者测量到的棒长为  $a$ ,但其质量  $m' = m$

$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ ,故由此可得观察者测得的线密度大小为

$$\frac{m'}{a} = \frac{m}{a} \left[ 1 - \left( \frac{u}{c} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$



**思路总结** 洛伦兹收缩发生在运动方向上,而在垂直于运动的方向上没有这种效应。

- 6 在惯性系  $S$  中,有两个事件同时发生在  $x$  轴上相距 1000 m 的两点,而在另一惯性系  $S'$  (沿  $x$  轴方向相对于  $S$  系运动) 中测得这两个事件发生地点相距 2000 m,求在  $S'$  系中测得这两个事件的时间间隔。

(清华大学 1998 年硕士学位研究生入学考试试题)

**解题分析** 相对论时间间隔是本题的考点。

**解**

$$\begin{cases} t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ \Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

把  $\Delta t = 0$  代入上面右边的一组式子中,又  $\Delta x = 1000$  m,  $\Delta x' = 2000$  m,则可得

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} &= \frac{1}{2}, \frac{u^2}{c^2} = \frac{3}{4}, u = \frac{\sqrt{3}}{2}c \\ \Delta t' &= \frac{\frac{\sqrt{3} \times 1000}{2c}}{\frac{1}{2}} = 5.77 \times 10^{-5} \text{ s} \end{aligned}$$



**思路总结** 同时发生在  $S$  系中的两异地时间,在  $S'$  系中测量却不是同时的,即同时的相对性。

- 7 两个静止质量都是  $m_0$  的粒子,以相同速率  $u$  对心碰撞合成一个复合粒子,试求这个复合粒子的静止质量、总能量。

(北京理工大学 2000 年硕士学位研究生入学考试试题)

**解题分析** 对微观碰撞系统,其动量和能量守恒,由此可求得碰后的质量和速度,进一步求出其静止质量、总能量。

**解** (1)  $u \ll c$  时,复合粒子为非相对论粒子。

动量守恒

$$m_0 u - m_0 u = 2m' u'$$

复合粒子

$$u' = 0, E_k = 0$$

能量守恒

$$\frac{1}{2} m_0 u^2 + m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2 + m_0 c^2 = m' c^2$$

$$\Rightarrow m'c^2 = m_0c^2 + 2m_0c^2$$

静止质量

$$m' = 2m_0 + m_0\left(\frac{u}{c}\right)^2 \approx 2m_0$$

总能量为

$$2m_0c^2$$

(2)  $u$  与  $c$  可比拟时, 复合粒子为相对论粒子

动量守恒

$$mu - mu = m'u'$$

复合粒子

$$u' = 0$$

能量守恒

$$mc^2 + mc^2 = m'c^2 = E_{\text{总}}$$

即

$$m'c^2 = 2mc^2$$

故

$$m' = 2m = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$



**思路总结** 相对论动力学综合题. 对微观碰撞系统, 其动量和能量系统仍然守恒.

- 8 (南京航空航天大学) 在某一参考系  $K$  中观察到同一地点发生了两个事件, 且第二个事件发生在第一个事件之后 2 s. 而在另一个参照系  $K'$  中却观察到第一个事件后 3 s 发生, 则按照狭义相对论的理论, 这两个参考系的相对运动速度为 \_\_\_\_\_ m/s; 在参考系  $K'$  中测量, 这两个事件有空间距离为 \_\_\_\_\_ m. (设真空中光速  $c = 3 \times 10^8$  m/s)

**解** 在参考系  $K$  中的两个事件发生在同一地点, 故可以用一只钟去测, 此时测得的时间为固有时间, 即  $\Delta t_0 = 2$  s, 所以在  $K'$  中测得  $\Delta t = 3$  s 与固有时间的满足相对论中时间的延缓公式  $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$ , 所以  $\sqrt{1 - (v/c)^2} = \frac{2}{3}$ , 所以  $v = \frac{\sqrt{5}}{3}c$ . 在参考系  $K'$  中两事件发生的空间距离满足速度与距离的乘积, 即  $L' = v\Delta t = \sqrt{5}c$  m.



**思路总结** 在相对论中要求的路程时间乘以速度, 一定注意要用同一个参考系中测得的时间与速度.

- 9 (南京航空航天大学) 北京的鸟巢与上海的东方明珠广播电视塔相距 1 500 km. 若有一只飞船沿两地连线的方向以恒定速率  $v = 0.6c$  ( $c$  为真空中的光速) 飞行, 则飞船上的宇航员测得这两建筑物相距 \_\_\_\_\_ km.

**解** 与相对论中长度的收缩相应,  $l_0 = 1\,500\,000$  m 是在地球上所测得固有长度, 根据公式得

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = 1\,500 \sqrt{1 - 0.36} \text{ km} = 1\,500 \times 0.8 \text{ km} = 1\,200 \text{ km}$$

- 10 (北京师范大学) 从狭义相对论的洛伦兹坐标变换出发, 推导一个质点相对于两个不同惯性参考系的速度之间的变换关系.

**解** 设物体在  $S$ 、 $S'$  系中的速度分别为  $(u_x, u_y, u_z)$ ,  $(u'_x, u'_y, u'_z)$ , 根据洛伦兹变换式可得

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{(dx/dt - v)dt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{(u_x - v)dt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad dt' = \frac{dt - vdx/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{dt(1 - vu_x/c^2)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$\text{因此 } \frac{dx'}{dt'} = \frac{(u_x - v)dt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{dt(1 - vu_x/c^2)}, \text{ 即 } u'_x = \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

因  $y' = y, z' = z$ , 有  $dy' = dy, dz' = dz$ , 则  $\frac{dy'}{dt'} = dy / \frac{dt(1 - vu_x/c^2)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$

$$\text{即 } u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - vu_x/c^2}$$

$$\text{同理 } u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - vu_x/c^2}$$

因此的相对论的速度变换公式:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - vu_x/c^2}, u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - vu_x/c^2}$$

$$\text{其逆变换为: } u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}, u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 + vu'_x/c^2}, u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 + vu'_x/c^2}$$

## 课后习题

### 14-1 解题过程 答案为 C.

物理相对性原理和光速不变原理是相对论的基础。按照这两个原理,任何物理规律(含题述动量恒定律)对某一惯性系成立,对另一惯性系也同样成立。而光在真空中的速度与光源频率和运动状态无关,从任何惯性系(相对光源静止还是运动)测得光速均为  $3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。迄今为止,还没有实验能推翻这一事实。由此可见,(2)(3)说法是正确的,故选 C。

### 14-2 解题过程 由相对论知,在另一惯性系中两条件时间和空间间隔都可能发生变化, S 系中的两个同时同地事件,在 S' 中一定是同时同地的,故本题选 C。

### 14-3 知识要点 相对论的长度收缩效应。

**逻辑推理** 注意收缩效应仅发生在运动方向上,故细棒在 Qx 轴方向缩短,在 oy 方向不变。所以与 ox 轴来夹角大于  $60^\circ$ 。

**解题过程** 选 C。

### 14-4 解题过程 题中 $L, v_2$ 和所求的均为同一参考系中的 3 个相关物理量,求解与时空无关,在飞船上测得子弹从射出到击中时间力 $t = \frac{h}{v_2}$ , 选 C。

### 14-5 知识要点 洛伦兹变换式: $t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

**逻辑推理** 已知一个惯性系的时空坐标,求另一个相对其运动的惯性系中的时空坐标,可直接由洛伦兹变换式计算。

**解题过程** (1)由洛伦兹变换式:  $t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1.25 \times 10^{-7} \text{ s}$



$$(2) \text{ 由洛伦兹变换式: } t'' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3.5 \times 10^{-7} \text{ s}$$

所以在  $S'$  系两个事件的时间间隔为

$$\Delta t = t'' - t' = 2.25 \times 10^{-7} \text{ s}$$

#### 14-6 知识点拨

$$\text{洛伦兹坐标逆变换式: } \begin{cases} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \quad (S' \rightarrow S)$$

**逻辑推理** 已知在  $S'$  系中某事件的时空坐标,求其在  $S$  系中的时空坐标,可直接由洛伦兹坐标逆变换式计算。

**解题过程** 已知  $t' = 8.0 \times 10^{-8} \text{ s}$ ,  $x' = 60 \text{ m}$ ,  $y' = 0$ ,  $z' = 0$ ,  $v = 0.6c$ . 由事件在  $S$  系中的时空坐标分别为

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{60 + 0.6c \times 8.0 \times 10^{-8}}{\sqrt{1 - 0.6^2/c^2}} = 93 \text{ m}$$

$$y = y' = 0$$

$$z = z' = 0$$

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2.5 \times 10^{-7} \text{ s}$$

#### 14-7 知识点拨 洛伦兹坐标逆变换式: $t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (S' \rightarrow S)$

**逻辑推理** 以地面为  $S$  系,火车为  $S'$  系.把两闪电击中火车前后端视为两个事件,地面观察者看到两事件同时发生,时间间隔为  $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$ . 火车的长度是相对火车静止的观察者测得的长度.即两事件在  $S'$  系中的空间间隔  $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = 0.30 \times 10^3 \text{ m}$ ,  $S'$  系相对  $S$  系的速度就是火车的速度.由洛伦兹逆变换列出两事件在  $S$  系中的时间间隔  $\Delta t$  与在  $S'$  系中的时间间隔  $\Delta t'$  的关系式,从而求出  $\Delta t'$ .

**解题过程** 取地面为参考系,火车为  $S'$  系.由洛伦兹坐标逆变换得两事件在  $S$  系中的时刻分别为

$$t_1 = \frac{t'_1 + vx'_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, t_2 = \frac{t'_2 + vx'_2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

因在  $S$  系中,两事件同时发生,即  $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$ ,所以有

$$t'_2 - t'_1 + \frac{v}{c^2} (x'_2 - x'_1) = 0$$

由此可得在  $S'$  系(火车上)的观察者测得两闪电击中火车前后端的时间间隔为

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = -\frac{v}{c^2} (x'_2 - x'_1) = -9.26 \times 10^{-14} \text{ s}$$

负号说明在  $S'$  系第二个事件先发生,即在火车上的观察者测得闪电先击中车头  $x'_2$  处.

14-8 知识点窍 洛伦兹变换式: 
$$\begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ t' = \frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases}$$

**逻辑推理** 在不同的惯性系中测两个事件的空间间隔和时间间隔有可能是不同的,它与两惯性系之间的相对速度有关.若惯性系  $S'$  的速度  $v$  相对  $S$  系沿  $X$  轴正向运动.由洛伦兹变换式可得两事件在  $S'$  系中的空间间隔和时间间隔的表达式.按题意,两事件在  $S'$  系中发生在同一地点,即空间间隔  $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = 0$ .由上述各式可求出  $S'$  相对  $S$  系的速度  $v$ ,进而求出两事件在  $S'$  系中的时间间隔  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ .

**解题过程** (1) 设  $S'$  的速度  $v$  相对  $S$  系沿  $X$  轴正向运动.由洛伦兹变换式事件  $A$  和事件  $B$  在  $S'$  系中的空间间隔和时间间隔分别为

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1)$$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2)$$

按题意,令  $\Delta x' = 0$  代入①式可得

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 1.50 \times 10^8 = 0.5c$$

(2) 将  $v$  值代入②式可得

$$\begin{aligned} \Delta t' = t'_2 - t'_1 &= \frac{(t_2 - t_1)(1 - \frac{v}{c^2} \cdot \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1})}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= (t_2 - t_1) \sqrt{1 - v^2/c^2} = 1.73 \times 10^{-6} \text{ s} \end{aligned}$$

14-9 知识点窍 洛伦兹速度变换式: 
$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x}$$

**逻辑推理** 在正电子的静止系里要考虑到参考系的变化,根据洛伦兹速度变换式即可求出电子相对于正电子的速度.

**解题过程** 选取对撞机为  $S$  系.沿  $X$  轴正向运动的正电子为  $S'$  系.  $S'$  系相对  $S$  系的速度  $v = 0.90c$ , 则另一电子相对  $S$  系速度  $v_x = -0.90c$ . 该电子相对  $S'$  的速度  $v'_x$  即为所求的相对速度,由洛伦兹速度变换式可得

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} = 0.994c$$

负号表示电子沿  $X'$  轴负向飞行,正号表示与正电子相向飞行.

#### 14-10 解法一

**知识点窍** 洛伦兹速度逆变换式: 
$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} v'_x}$$

**逻辑推理** 本题所给电子的速率是电子相对衰变粒子的速率,若取实验室为  $S$  系.运动粒子为

$S'$ 系, 则  $S'$ 系相对  $S$ 系的速度  $v=0.050c$ ,  $v'_x=0.80c$ . 由洛伦兹速度逆变换式可求出电子相对  $S$ 系的速度.

**解题过程** 设实验室为  $S$ 系, 运动粒子为  $S'$ 系. 由洛伦兹速度逆变换式可得电子相对  $S$ 系的速度为

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} v'_x} = 0.817c$$

**解法二**

**解题过程** 以粒子为  $S$ 系, 实验室为  $S'$ 系, 则实验室相对于粒子的速度  $v=0.05c$ , 由题意知电子相对  $S$ 系的速度  $v_x=0.8c$

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} = \frac{0.8c - (-0.050c)}{1 + \frac{0.05c}{c^2} \times 0.8c} = 0.817c$$

**14-11 知识要点** 洛伦兹速度逆变换式: 
$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} v'_x}$$

**逻辑推理** 若以宇宙飞船为  $S$ 系, 航天器为  $S'$ 系, 则该火箭相对  $S'$ 系的速度为  $v'_x=1.0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 火箭相对于  $S$ 系的速度为  $v_x$ . 可由洛伦兹速度逆变换求得. 如果以激光束代替空间火箭, 则  $v'_x=c$ . 同样可由洛伦兹速度逆变换求得  $v_x$ , 按光速不变原理, 此时的  $v_x$  应为光速  $c$ .

**解题过程** (1) 取宇宙飞船为  $S$ 系, 航天器为  $S'$ 系, 则空间火箭相对  $S$ 系的速度为:

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} v'_x} = 1.94 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 激光束相对  $S$ 系的速度为

$$v_x = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c^2} c} = c$$

这与光速不变原理相一致, 用伽利略变换, 则有  $v_x=c+v>c$ . 这说明对伽利略变换而言, 运动物体没有极限速度, 但对相对论的洛伦兹变换来说, 光速是物体的极限速度.

**14-12 知识要点** 洛伦兹速度逆变换式

$$\begin{cases} v_x = \frac{v'_x - v}{1 + \frac{v}{c^2} v'_x} \\ v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2} v'_x)} \\ v_z = \frac{v'_z}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2} v'_x)} \end{cases}$$

**逻辑推理** 以运动粒子为  $S$ 系, 地面为  $S'$ 系, 由洛伦兹速度变换公式求解.

**解题过程** 根据题意, 设此运动粒子为  $S$ 系, 地面为  $S'$ 系, 则

由洛伦兹逆变公式有:

$$v_x = \frac{v'_x - v}{1 + \frac{v}{c^2} v'_x}$$

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} v'_x\right)}$$

$$v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} v'_x\right)}$$

即在地面上观察到的光子的速度为:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = c$$

夹角为

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{v}$$

- 14-13 解题** 火箭上记录的 10 s 时间在地面上看为  $10\gamma = 12.5$  s, 火箭飞行的高度为  $0.6c \times 12.5$  s, 再以  $0.3c$  的速度落向地面(忽略重力), 需要的时间为  $\frac{0.6c \times 12.5}{0.3c} = 25$  s, 所以总时间为 37.5 s.

- 14-14 知识** 洛伦兹速度变换式:  $v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x}$  洛伦兹时空变换式:  $t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

**逻辑** 若取地球为 S 系, 飞船为 S' 系, 向东为 X 轴正向. 由洛伦兹速度变换式即可求出彗星与飞船的相对速度.

若取  $x_0 = x'_0 = 0$  时,  $t_0 = t'_0 = 0$ . 飞船与彗星相碰这一事件在 S 系中的时空坐标为  $t = 5.0$  s,  $x = vt$ . 利用洛伦兹时空变换式可求出  $t'$ , 则  $\Delta t' = t' - t'_0$  表示飞船与彗星相碰所经历的时间.

**解题** (1) 设地球为 S 系, 飞船为 S' 系, 由洛伦兹速度变换得彗星相对 S' 系的速度为

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} = -0.946c$$

即彗星以  $0.946c$  的速度向飞船靠近.

(2) 飞船与彗星相碰这一事件在 S' 系中的时刻为

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 4.0 \text{ s}$$

即在飞船上看, 飞船与彗星相碰发生在时刻  $t' = 4.0$  s, 根据延缓效应  $\Delta t =$

$$\frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 5.0 \text{ 解得 } \Delta t' = 4.0 \text{ s, 即从飞船上的钟来看, 尚有 } 4.0 \text{ 秒允许它离开}$$

航线.

- 14-15 知识** 在任意两事件的时空间隔  $(\Delta x)^2 = (c\Delta t)^2$  为定值.

**逻辑推理** 由任意两事件的时空间隔公式可得:  $S$  系中间隔为  $S = (\Delta x_1)^2 - (c\Delta t_1)^2$ ,  $S'$  系中间隔为  $S' = (\Delta x_2)^2 - (c\Delta t_2)^2$ , 由  $S = S'$  可求得两事件的时间间隔.

**解题过程**  $S$  系中的时空间隔为  $S = (\Delta x_1)^2 - (c\Delta t_1)^2$   
 $S'$  系中的时空间隔为  $S' = (\Delta x_2)^2 - (c\Delta t_2)^2$   
 所以  $(\Delta x_1)^2 - (c\Delta t_1)^2 = (\Delta x_2)^2 - (c\Delta t_2)^2$   
 所以  $(\Delta x_2)^2 = (c\Delta t_2)^2 - (c\Delta t_1)^2 = 1.34 \times 10^9 \text{ m}$

**14-16 知识点窍** 任意两事件的时空间隔  $(\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2$  为定值.

**逻辑推理** 由任意两事件的时空间隔公式可得:  $S$  系中间隔为  $S = (\Delta x_1)^2 - (c\Delta t_1)^2$ ,  $S'$  系中间隔为  $S' = (\Delta x_2)^2 - (c\Delta t_2)^2$ . 由  $S = S'$  可求得两事件的时间间隔.

**解题过程**  $S$  系中的时空间隔为  $S = (\Delta x_1)^2 - (c\Delta t_1)^2$   
 $S'$  系中的时空间隔为  $S' = (\Delta x_2)^2 - (c\Delta t_2)^2$   
 所以  $(\Delta x_1)^2 - (c\Delta t_1)^2 = (\Delta x_2)^2 - (c\Delta t_2)^2$   
 所以  $\Delta t_2^2 = \frac{(\Delta x_2)^2 - (\Delta x_1)^2 + (c\Delta t_1)^2}{c^2}$   
 所以  $\Delta t_2 = \sqrt{(\Delta x_2)^2 - (\Delta x_1)^2} / c = 5.77 \times 10^{-6} \text{ s}$

**14-17 知识点窍** 洛伦兹速度变换式

**逻辑推理** 由洛伦兹速度变换式求  $u'$ , 代入长度收缩公式求  $l$ .

**解题过程** 推理, 有 
$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad (1)$$

$$l = l_0 = \sqrt{1 - u'^2/c^2} \quad (2)$$

解上述两式, 可得 
$$l = \frac{l_0}{c^2 - uv} [(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)]^{1/2}$$

**14-18 知识点窍** 洛伦兹长度收缩式:  $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$

**逻辑推理** 设宇宙飞船固有长度为  $l$ , 它相对于惯性系的速度为  $v$ . 而以此惯性系测得宇宙飞船的长度为  $l_0/2$ . 根据洛伦兹长度收缩公式, 即可求出  $v$ .

**解题过程** 按题意  $l = \frac{1}{2} l_0$ , 由洛伦兹长度收缩式可得

$$\frac{1}{2} l_0 = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \cdot l_0$$

所以飞船相对于惯性系的速度为

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 0.866c$$

**14-19 知识点窍** 洛伦兹长度收缩式:  $l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$

**逻辑推理** 将  $l_0$  和  $v$  代入到公式  $l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$  中, 即可求出物体在该惯性系中测量长度.

**解题过程** 由长度收缩式可知物体在该惯性系中测量长度为

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = 3.2 \text{ m}$$

14-20 知识点窍 光的多普勒效应:  $v = v_0 \left( \frac{c-v}{c+v} \right)^{\frac{1}{2}}$ 

**逻辑推理** 由光的多普勒效应可知,当飞船远离地球而去时,宇航员肉眼观察到的信号频率  $v < v_0$ , 即  $\lambda > \lambda_0$ . 由于已知红光的波长范围为  $620\text{nm} \sim 760\text{nm}$ . 显然当  $\lambda_0 = 620\text{nm}$  的红光由多普勒效应变为  $\lambda = 760\text{nm}$  时,霓虹灯发出的红色信号,其波长刚好全部进入不可见光区域,因此将上述波长的临界值代入多普勒效应频移公式,即可求出宇航员观察不到红色信号时飞船的最小速率  $v$ ,再由  $t = \frac{u}{a}$  求出所需时间.

**解题过程** 由多普勒效应频移公式  $v = v_0 \left( \frac{c-v}{c+v} \right)^{\frac{1}{2}}$  得波长公式为  $\lambda = \lambda_0 \left( \frac{c+v}{c-v} \right)^{\frac{1}{2}}$

设  $\lambda_0 = 620\text{nm}$ ,  $\lambda = 760\text{nm}$ , 宇航员用肉眼观察不到.

地球上红色信号时的飞船的最小速度为

$$v = \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda^2 + \lambda_0^2} \cdot c = 0.60 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

飞船达此速度所需的时间为

$$t = \frac{v}{a} = 6.1 \times 10^6 \text{ s} \approx 0.20 \text{ a}$$

14-21 知识点窍 多普勒频移公式:  $V_A = \left( \frac{1-B}{1+B} \right)^{1/2} v_B$  (红移现象)

**逻辑推理** 当飞船远离地球而去时,由光的多普勒效应可知,宇航员肉眼观察到的信号频率  $v < v_0$ , 即  $\lambda > \lambda_0$ . 将波长的临界值代入多普勒频移公式,即可求得飞船的最小速率  $V$ . 进而求得飞船达到此速率所需的时间  $t$ .

**解题过程**  $V = v_0 \left( \frac{c-v}{c+v} \right)^{1/2}$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda_0 \left( \frac{c+v}{c-v} \right)^{1/2}$$

令  $\lambda_0 = 620\text{nm}$ ,  $\lambda = 760 \text{ nm}$  得:

$$V = \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda^2 + \lambda_0^2} c = 0.6 \times 10^8 \text{ m/s}$$

所以飞船达到此速度所需时间  $t = \frac{v}{a} = 6.1 \times 10^6 \text{ s}$

14-22 知识点窍 相对论的静能:  $E_0 = m_0 c^2$  相对论的动能:  $E_k = mc^2 - m_0 c^2$ 

相对论的动量:  $p = \frac{1}{c} (E^2 - E_0^2)^{\frac{1}{2}}$  相对论的总能量:  $E = \frac{E_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

**逻辑推理** 粒子静能  $E_0$  是指处在相对静止的参考系中粒子的能量  $E_0 = m_0 c^2$ , 本题所给的粒子的能量  $E > E_0$ , 因此该粒子相对观察者所在的参考系还应具有动能、动量和速率, 以上各量可由相对论中的公式及质能关系求得.

**解题过程** 电子的静能为:

$$E_0 = m_0 c^2 = 0.512 \text{ MeV}$$

电子的动能为

$$E_k = E - E_0 = 4.488 \text{ MeV}$$

电子的动量为

$$P = \frac{1}{c} (E^2 - E_0^2)^{1/2} = 2.66 \times 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

由相对论总能量公式  $E = \frac{E_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$  得电子的速率为

$$v = c \left( \frac{E^2 - E_0^2}{E^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.995c$$

**14-23 知识要点** 相对论的静能:  $E_0 = m_0 c^2$  相对论的总能量:  $E = mc^2$

相对论质量:  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

**逻辑推理** (1) 由于电子的静止质量  $m_0 = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , 故由  $E_0 = m_0 c^2$  可求其静能.

再用比值法:  $\frac{E}{E_0} = \frac{mc^2}{m_0 c^2}$  求出  $\frac{m}{m_0} = \frac{E}{E_0}$

(2) 由相对论性质公式可求出速率  $v = \left[ 1 - \frac{m_0^2}{m^2} \right]^{\frac{1}{2}} c$ .

**解题过程** (1)  $\frac{m}{m_0} = \frac{mc^2}{m_0 c^2} = \frac{E}{m_0 c^2} = 5.86 \times 10^3$

(2) 由相对论性质公式  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$  得电子的速率为

$$v = \left[ 1 - \left( \frac{m_0}{m} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} c = 0.999999985c$$

**12-24 知识要点** 相对论动能表达式:  $E_k = mc^2 - m_0 c^2$

**逻辑推理** 当粒子动能  $E_k$  或总能  $mc^2$  远大于粒子静能, 可将  $m_0 c^2$  略去作近似计算.

**解题过程** 由于  $E_k \gg m_0 c^2$ , 故

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2 \approx mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

即  $1 - \frac{v^2}{c^2} = \left( \frac{m_0 c^2}{E_k} \right)^2$

则  $v = c \sqrt{1 - \left( \frac{m_0 c^2}{E_k} \right)^2} = 0.9999996c$

**14-25 知识要点** 能量守恒定律:  $\sum E = \text{常量}$  相对论静能:  $E_0 = m_0 c^2$

**逻辑推理** 在相对论中, 粒子在相互作用过程中满足能量守恒定律. 由于正负电子在湮灭前均静止, 故其总能量在其湮灭前后均等于其相对论静能量之和.

**解题过程** 由能量守恒定律可知其辐射的总能量为

$$E = E_{+e} + E_{-e} = 2m_0 c^2 = 1.64 \times 10^{-13} \text{ J} = 1.02 \text{ MeV}$$

**14-26 知识要点** 洛伦兹力公式:  $F = Bqv$  向心力公式:  $F = m \frac{v^2}{R}$

相对论性动量与能量的关系:  $E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$  相对论质能关系:  $E_0 = m_0 c^2$ ,  $E = mc^2$

**逻辑推理** 电子在磁场中作匀速圆周运动的向心力由洛伦兹力提供, 由此可得  $Bqv = m \frac{v^2}{R}$ . 考虑  $p = mv$ , 由相对论性动量与能量的关系可求出磁感强度  $B$ . 电子动质量与静质量的比可由质能关系求得.

**解题过程** (1) 按题意电子作圆周运动的向心力由洛伦兹力提供, 因此有

$$Bqv = m \frac{v^2}{r} \quad ①$$

电子的总能量为其静能与外界给予的动力能之和, 即

$$E = E_0 + E_k \quad ②$$

由相对论性动量与能量的关系有

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2 \quad ③$$

$$p = mv \quad ④$$

联立①~④式可得  $B = \frac{\sqrt{E_k^2 + 2E_0 E_k}}{eRc} = 0.146 T$

(2) 由相对论质能关系可得电子动质量与静质量的比为

$$\frac{m}{m_0} = \frac{mc^2}{md^2} = \frac{E}{E_0} = \frac{E_0 + E_k}{E_0} = 1 + \frac{E_k}{E_0} = 1.98$$

**14-27 知识点窍** 动能定理:  $W = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}$  相对论性能量关系式:  $E_k = E - E_0$

质能方程:  $E = mc^2$  质速关系:  $m = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}$

**逻辑推理** 在相对论力学中, 动能定理仍可表示为  $W = E_{k2} - E_{k1}$  但  $E_k = E - E_0 = mc^2 - mc_0^2$ ,

考虑  $m = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}$  即可求出对应的功。

**解题过程** 由动能定理及相对论性能量关系有

$$W = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = (E_2 - E_0) - (E_1 - E_0) = E_2 - E_1$$

考虑  $E_2 = m_2 c^2$ ,  $E_1 = m_1 c^2$  及  $m = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}$  可得外力所做的功

$$W = (m_2 - m_1) c^2 = m_0 c^2 \left[ \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

当  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = 0.1c$  时, 外力做的功为

$$W_1 = 2.58 \times 10^3 \text{ eV}$$

当  $v_1 = 0.8c$ ,  $v_2 = 0.9c$  时, 外力做的功为

$$W_2 = 3.21 \times 10^5 \text{ eV}$$

**14-28 解题过程** 假设粒子 A、B、合成粒子的运动速度分别为  $v_A$ 、 $v_B$ 、 $v$ 。

由动量守恒:  $\frac{m_0 v_A}{(1 - v_A^2/c^2)^{1/2}} - \frac{m_0 v_B}{(1 - v_B^2/c^2)^{1/2}} = \frac{m_0' v}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$

由于  $v_A = v_B = v$ , 故  $v = 0$

即合成粒子是静止的, 根据能量守恒:

$$\frac{m_0 c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} + \frac{m_0 c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = m_0' c^2$$

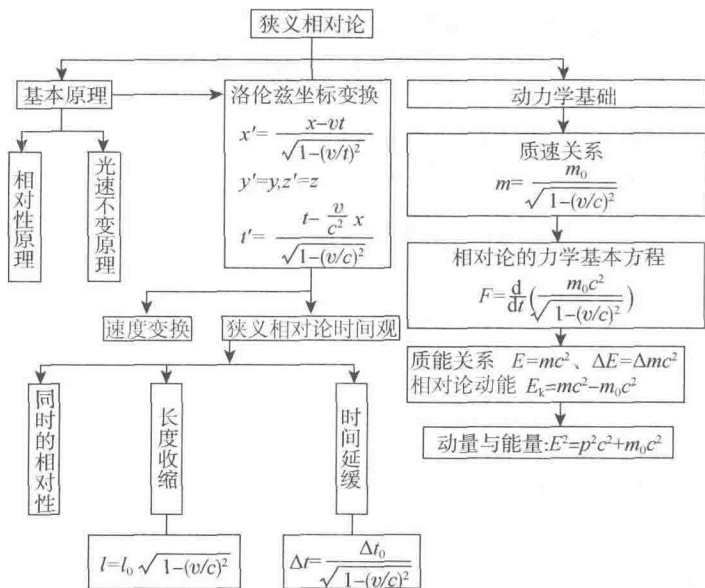
解得  $m_0' = \frac{2m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$



# 第十五章

## 量子物理

### 本章知识框架图



### 考试要点

1. 热辐射的两条实验定律: 斯特藩—玻耳兹曼定律和维恩位移定律。
2. 爱因斯坦方程。
3. 康普顿效应以及爱因斯坦的光子理论对这个效应的解释, 光的波粒二象性。

4. 氢原子玻尔理论.
5. 德布罗意假设及电子衍射实验, 实物粒子的波粒二象性, 描述物质波动性的物理量(波长、频率)和描述粒子的物理量(动量、能量)之间的关系.
6. 一维坐标动量不确定关系.
7. 波函数及其统计解释, 一维定态的薛定谔方程, 以及量子力学中用薛定谔方程处理一维无限深势阱等微观问题的方法.
8. 能量量子化、角动量量子化及空间量子化, 描述原子中电子运动状态的三个量子数.

## 知识点整理与解析

量子物理理论中涉及的物理量主要有波长  $\lambda$ 、频率  $\nu$ 、能量  $\epsilon$ 、动量  $p$  和角动量  $L$  等. 在实际应用中, 最主要的两个物理量是波长  $\lambda$  和频率  $\nu$ .

### 一、黑体辐射 普朗克能量量子假设

#### 1. 热辐射

##### (1) 热辐射

一切物体在任何温度下都以电磁波的形式向外辐射能量, 这种与温度有关的辐射称为热辐射或温度辐射.

##### (2) 绝对黑体

定义: 如果一物体在任何温度下对任何波长的入射辐射能全部吸收而不反射, 则这一物体称为绝对黑体, 简称黑体.

黑体模型: 设有一空容器, 器壁由不透明材料制成, 器壁上开有一小孔  $O$ , 如图 15-1 所示.

#### 2. 黑体辐射实验定律

##### (1) 斯特藩—玻耳兹曼定律

黑体的辐出度  $M(T)$  与黑体的热力学温度的四次方成正比, 即

$$M(T) = \int_0^{\infty} M_{\lambda}(T) d\lambda = \sigma T^4$$

$\sigma$  称为斯特藩—玻耳兹曼常数.

##### (2) 维恩位移定律

当黑体的热力学温度升高时, 在  $M(T) - \lambda$  的曲线上, 与单色辐出度  $M_{\lambda}(T)$  的峰值相对应的波长  $\lambda_m$  向短波方向移动, 称为维恩位移定律, 表达式为

$$\lambda_m T = b$$

#### 3. 瑞利—金斯公式

$$M_{\nu}(T) d\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT d\nu$$

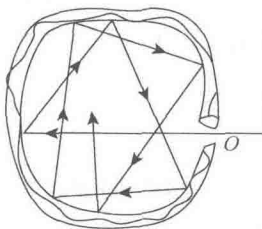


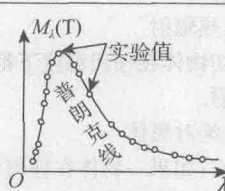
图 15-1

#### 4. 普朗克假设 普朗克黑体辐射公式

辐射黑体是由无数带电谐振子组成,这些谐振子的能量是最小能量  $\epsilon$  的整数倍,  $\epsilon = h\nu$ ,  $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ , 叫普朗克常数,谐振子辐射或吸收能量时也一定是  $h\nu$  的整数倍,由此假设导出绝对黑体单色辐射度  $e_0$  与波长、温度的关系,即普朗克公式为

$$e_0(\lambda, T) = 2\pi hc^2 \lambda^{-5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

小结:

名称	内容	说明
黑体辐射的实验定律	<p>(1) 斯特藩—玻耳兹曼定律</p> $M(T) = \sigma T^4$ <p>斯特藩—玻耳兹曼常数</p> $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ <p>(2) 维恩位移定律</p> $T\lambda_m = b$ <p>位移常数 <math>b = 2.897 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}</math></p> <p>峰值波长 <math>\lambda_m</math> 随着温度的升高向短波方向移动</p>	<p>(1) 黑体是一种理想模型,是指能吸收一切外来电磁辐射的理想化物体.</p> <p>(2) 辐出度 单位时间内从物体表面上所发出的各种波长的总辐射能.</p> $M(T) = \int_0^\infty M_\lambda(T) d\lambda$
普朗克公式	<p>绝对黑体单色辐射度表达式</p> $M_\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$	
普朗克能量量子假设	<p>每个谐振子只能吸收或辐射不连续的一份一份的能量,这个能量正比于频率 <math>\nu</math>,并且只能是最小能量单元 <math>\epsilon = h\nu</math> (能量子) 的整数倍,即</p> $E = nh\nu$ <p><math>n = 1, 2, 3, \dots</math> 称为量子数</p>	<p>(1) 普朗克常数</p> $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ <p>(2) 普朗克能量量子化假设具有深刻和普遍的物理意义,开创了物理学的新领域——量子理论</p>

#### ※ 光电效应和光的波粒二象性

##### 1. 光电效应

当入射光子的能量较低,处于可见光和紫外光频率范围内时,光子主要与束缚态的电子发生完全非弹性的碰撞,能量全部被电子吸收,吸收光能的电子从金属中发射出来的现象,称为光电效应.

##### 2. 爱因斯坦方程

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + W$$

这个方程叫做光电效应的爱因斯坦方程.

##### 3. 光子和光的波粒二象性

光的波动性:干涉、衍射、偏振.

光的粒子性:光是一粒一粒以光速  $c$  运动的光子流

光子动量为

$$p = h\nu, p = \frac{h}{\lambda}$$

光子的动量与能量的关系为

$$E = pc$$

## ※ 康普顿效应

康普顿效应发生在光子具有较高能量( $x$ 光)的情况下,光子与自由电子发生弹性碰撞,发生波长变长的散射效应,即康普顿效应。

波长改变量与散射角  $\theta$  的关系为

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta) = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

电子康普顿波长

$$\lambda_e = \frac{h}{m_0 c} = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$$

小结:

名称	内容	说明
光子爱因斯坦方程	(1) 光是由一些以光速 $c$ 运动的光子组成的, 频率为 $\nu$ 的光, 其光子的能量为 $\epsilon = h\nu$ (2) 爱因斯坦光电效应方程 $h\nu = \frac{1}{2} m v^2 + W \quad (W \text{ 为逸出功})$	红限频率 $\nu_0 = \frac{W}{h}$ 若入射光频率 $\nu < \nu_0$ , 则 $h\nu < W$ , 不论入射光如何强烈, 都不会产生光电效应
光的波粒二象性	(1) 光子的能量 $\epsilon = h\nu$ (2) 光子的动量 $p = \frac{h}{\lambda}$	光子的动量和能量是描述粒子性的, 而频率和波长是描述波动性的, 光的双重性质通过 $h$ 联系在一起的

小结:

名称	内容	说明
康普顿效应	康普顿效应发生在光子具有较高能量(如 $x$ 光)的情况下, 光子与自由电子发生弹性碰撞, 发生波长变长的散射效应。 波长改变量与散射角 $\theta$ 的关系 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta) = 2\lambda_e \sin^2 \frac{\theta}{2}$ 称为康普顿公式	(1) 电子的康普顿波长 $\lambda_e = \frac{h}{m_0 c} = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$ (2) 康普顿效应表明能量守恒定律和动量守恒定律在微观领域同样适用

## 二、氢原子的玻尔理论

## 1. 氢原子光谱的实验规律

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = R \left[ \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right] \quad n_f = 1, 2, 3, \dots, n_i = n_f + 1, n_f + 2, n_f + 3, \dots$$

式中  $n_f = 1, 2, 3, 4, 5$  依次代表莱曼系、巴耳末系、帕邢系、布拉开系和普丰德系。



**温馨提示** 不同原子有不同形式的光谱项。

## 2. 氢原子的玻尔理论

### (1) 原子的核式结构

原子中心有一带电的原子核,它几乎集中了原子的全部质量,电子围绕这个核转动,核的大小与整个原子相比很小.

原子核式模型的实验基础: $\alpha$  粒子散射实验.

### (2) 玻尔理论的两个基本假设

#### ① 定态假设

电子可以在原子中一些特定的圆轨道上运动而不辐射光,这时原子处于稳定状态,并具有一定的能量.

#### ② 量子化假设

电子绕核运动时,只有电子的角动量  $L$  等于  $\frac{h}{2\pi}$  整数倍的那些轨道才是稳定的,即

$$L = m v r = n \frac{h}{2\pi}, n = 1, 2, 3 \cdots$$

$n$  叫主量子数,上式叫量子化条件.

#### ③ 辐射假设.

当电子从高能量  $E_i$  的轨道跃迁到低能量  $E_f$  的轨道上时,要发射能量为  $h\nu$  的光子,即

$$h\nu = E_i - E_f$$

上式叫频率条件.

**温馨提示** (1) 假设 1 是经验性的,它解决了原子的稳定性问题;假设 2 表述的角动量量子化原先是人为加进去的,后来知道它可以从德布罗意假设得出;假设 3 是从普朗克量子假设引伸来的,因此是合理的,它能解释线光谱的起源.(2) 此假设提出了与经典理论不相容的概念:① 定态概念:虽然电子做加速运动,但不辐射能量;② 量子化概念:角动量及能量不连续,是量子化的;③ 频率条件:频率是由始末二态原子的能级差决定的,这与经典理论中原子发射的频率等于电子绕核运动的频率不同.

小结:

名称	内容	说明
玻尔理论的三条假设	(1) 定态假设 电子可以在原子中一些特定的圆轨道上运动而不辐射电磁波,这时原子处于稳定状态,并具有一定的能量.	(1) 轨道量子化 氢原子中电子的轨道半径 $r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2$
	(2) 角动量量子化假设 电子绕核运动时,只有电子的角动量 $L$ 等于 $\frac{h}{2\pi}$ 整数倍的那些轨道才是稳定的. 即 $L = n \frac{h}{2\pi} \quad n = 1, 2, 3, \cdots$ 式中 $n$ 叫主量子数.	(2) 能量量子化 $E_n = -\frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$ $n = 1$ 时,原子处于基态 $E_1 = -13.6 \text{ eV}$ $n > 1$ 时,原子处于激发态
	(3) 跃迁频率假设 当电子从高能量 $E_i$ 的轨道跃迁到低能量 $E_f$ 的轨道上时,要发射能量为 $h\nu$ 的光子. 即 $h\nu = E_i - E_f$	$E_n = \frac{E_1}{n^2}$

## 3. 用玻尔理论计算氢原子轨道半径及能量

## (1) 氢原子轨道半径

电子轨道半径为

$$r_n = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

当  $n = 1$  时,  $r_1 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2} = 0.53 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.53 \text{ \AA}$ ,  $r_1$  称为玻尔半径.

结论: 电子运动轨迹半径是量子化的, 即电子运动轨道量子化.

## (2) 氢原子能量

氢原子能量等于电子动能与势能之和, 即

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

当  $n = 1$  时,  $E_1 = -13.6 \text{ eV}$ ,  $E_1$  称为基态能量.  $n > 1$  时称激发态. 电子在第  $n$  个轨道上时, 氢原子能量为

$$E_n = \frac{m e^4}{n^2 8 \epsilon_0^2 h^2} = \frac{1}{n^2} E_1$$



**温馨提示** 氢原子的能量只能取分立能量值, 这些不连续能量称为能级 ( $n \rightarrow \infty$  时, 能量  $\rightarrow$  连续).

例 1 求氢原子中基态和第一激发态电离能.

解 (1) 氢原子能级为

$$E_n = -\frac{1}{n^2} E_1 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

基态电离能等于电子从  $n = 1$  激发到  $n = \infty$  时所需能量, 则

$$W_1 = E_\infty - E_1 = \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{1^2} \right) E_1 = -E_1 = 13.6 \text{ eV}$$

(2) 第一激发态电离能等于电子从  $n = 2$  激发到  $n = \infty$  所需能量

$$W_1 = E_\infty - E_2 = \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{2^2} \right) E_1 = -E_2 = 3.4 \text{ eV}$$

### 三、德布罗意波 实物粒子的二象性

假设描述粒子性质的能量  $E$  和动量  $p$  与描述的性质的频率, 和波上长  $\lambda$  之间的关系与光子一样, 即有

$$\lambda \frac{h}{p} \cdot E = h\nu$$

其中  $\lambda$  为动量  $p$  的粒子对应的德布罗意波长,  $E$  为该粒子组讨论能量.

小结:

名称	内容	说明
德布罗意波	<p>一个质量为 <math>m</math> 以速度 <math>v</math> 匀速运动的实物粒子,既具有以量 <math>E</math> 和动量 <math>p</math> 所描述的粒子性,也具有频率 <math>\nu</math> 和波长 <math>\lambda</math> 所描述的波动性,即</p> $E = mc^2 = h\nu$ $p = mv = \frac{h}{\lambda}$ <p>以动量 <math>p</math> 运动的实物粒子的波的滤长为</p> $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$ <p>这种波称为德布罗意波或物质波</p>	<p>实物粒子的波粒二象性表现在:实物粒子作为一个整体只能在某处出现,这是粒子性的表现;它在某处出现的概率遵从由波的强度决定的规律,这是波动性的表现.因此,实物粒子的波增加能性既非机械波,也非电磁波,而是一种概率波</p>

例2 在一电子束中,电子的动能为 200 eV,求电子的德布罗意波的波长.

解 由电子的动能  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  可得电子运动的速度为

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$$

因为电子质量  $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ . 代入数据得

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 200 \times 1.6 \times 10^{-19}}{9.1 \times 10^{-31}}} = 8.4 \times 10^6 \text{ (m/s)}$$

因为  $v \ll c$ , 有  $m = m_0$ . 由教材式(12-15)可求得电子的德布罗意波的波长为

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{9.1 \times 10^{-31} \times 8.4 \times 10^6} = 0.867 \times 10^{-10} \text{ (m)}$$

## 四、不确定关系

由于微观粒子具有明显的波粒二象性,如果仍然沿用经典的概念来描述微观粒子的运动状态,就必然会带来某种限制,这种限制就是测不准关系,坐标和动量的测不准关系为

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar, \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

式中,  $\Delta x$  为光子或电子的  $x$  坐标的不准确量;  $\Delta p_x$  为光子或电子动量的  $x$  分量的不准确量.

上式表明,对微观粒子的坐标和动量不可能同时进行准确测量,这正是微观粒子具有波粒二象性的必然反映,粒子在某方向上的坐标测得愈准确(即  $\Delta x$  减小),则这一方向上的动量就愈不准确(即  $\Delta p_x$  增大),衍射图样愈宽,对于时间和能量也有类似的测不准关系;  $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ ,  $\Delta E$  为能量不确定量;  $\Delta t$  为时间不确定量.

小结:

名称	内容	说明
不 确 实 关系	<p>由于微观粒子具有统计意义上的波动性,因而不能同时准确地确定其位置和动量.</p> <p>对于一维运动的粒子,位置的不确定范围 <math>\Delta x</math> 和动量的不确定范围 <math>\Delta p_x</math> 之间有以下关系</p> $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$	不确定关系是微观粒子具有波粒二象性的必然结果

例3 一颗质量为 10 g 的子弹,具有 200 m/s 的速率,动量的不准确量为 0.01%,确定该子弹的位置时,有多大的不准确量?

解 子弹的动量为

$$p = mv = 0.01 \times 200 = 2 (\text{kg} \cdot \text{m/s})$$

动量的不准确为

$$\Delta p = 0.01\% \cdot p = 1.0 \times 10^{-4} \times 2 = 2 \times 10^{-4} (\text{kg} \cdot \text{m/s})$$

由教材测不准关系式(12-17),得子弹位置的不准确量为

$$\Delta x = \frac{h}{\Delta p} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2 \times 10^{-4}} = 3.3 \times 10^{-30} (\text{m})$$

这个不准确量是测量仪器所无法测出的.可见,测不准关系对宏观物体来说,实际上是不起作用的.

例4 一电子具有 200 m/s 的速率,动量的不准确量为 0.01%,确定该电子的位置时,有多大的不准确量?

解 电子的动量为

$$p = mv = 9.1 \times 10^{-31} \times 200 = 1.8 \times 10^{-28} (\text{kg} \cdot \text{m/s})$$

动量的不准确量为

$$\Delta p = 0.01\% p = 1.0 \times 10^{-4} \times 1.8 \times 10^{-28} = 1.8 \times 10^{-32} (\text{kg} \cdot \text{m/s})$$

由测不准关系式(12-17),得电子位置的不准确量为

$$\Delta x = \frac{h}{\Delta p} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{1.8 \times 10^{-32}} = 3.7 \times 10^{-2} (\text{m})$$

我们知道原子大小的数量级为  $10^{-10}$  m,电子则更小,在这种情况下,电子位置的不准确量比电子本身的大小大几亿倍以上,所以不能把电子看成经典力学中的粒子.

## 五、量子力学简介

### 1. 波函数

波函数是描述微观粒子波动性的函数式,波函数一般重复  $(x, y, z, t)$  表示,其表达式为  $\psi(x, t) = \psi e^{-i\omega t}$ .

概率密度:

$$|\Psi|^2 dV = \Psi^* \Psi dV$$

波函数满足标准化条件:单值、有限、连续和归一化条件  $\int_x |\Psi|^2 dV = 1$ .



## 2. 薛定谔方程

一阶定态薛定谔方程为  $\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}[E - E_0]\Psi(x) = 0$

式中  $E, E_\varphi(x)$  分别是粒子的总能量和势能, 如粒子在三维空间运动, 定态薛定谔方

$$\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2}[E - E_\varphi]\Psi(x) = 0$$

其中  $\nabla^2$  为拉普拉斯算符,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

## 3. 一维势阱问题

(1) 粒子在一维无限深势阱中的定态薛定谔方程

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2mE}{h^2}\Psi = 0$$

(2) 势阱中粒子可能的能量值为  $E = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}$

(3) 一维方势垒  $E_p(x) = \begin{cases} 0, & (x < 0 \text{ 和 } x > a) \\ E_x & (0 < x < a) \end{cases}$



**温馨提示** (1) 波函数  $\Psi(r, t)$  本身没有直接的物理意义. (2) 波函数满足归一化条件

$\int_a |\Psi(r, t)|^2 dV = 1$ . (3) 波函数的标准条件: 单值、有限、连续. 不符合标准条件的波函数没有物理意义.

小结:

名称	内容	说明
波函数	波函数是描述微观粒子波动性的函数式, 一般用复函数 $\psi(x, t)$ 表示. 例如, 具有动量 $p$ 和能量 $E$ 并沿 $x$ 轴运动的自由粒子, 其波函数为 $\psi(x, t) = \psi_0 e^{-i\frac{2\pi}{h}(E_t - px)}$	(1) $ \psi ^2$ 表示 $t$ 时刻粒子出现在某点附近单位体积中的概率, 称为概率密度. (2) 波函数的归一化条件 $\int  \psi ^2 dV = 1$ 波函数的标准条件: 单值、有限、连续
定态薛定谔方程	一维定态(与时间无关的状态)薛定谔方程为 $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}[E - E_p]\psi = 0$ 式中 $E, E_0$ 分别是粒子的总能量和势能. 如粒子在三维空间运动, 定态薛定谔方程为 $\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2}(E - E_p)\psi = 0$ 其中 $\nabla^2$ 为拉普拉斯算符.	(1) 波函数满足的方程叫薛定谔方程. (2) 应用薛定谔方程简要讨论了一维无限深方势阱: $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2mE}{h^2}\psi = 0$

## 六、氢原子的量子理论简介

### 1. 氢原子的定态薛定谔方程

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = m_l^2$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{8\pi^2 m r^2}{h^2} \left( E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = l(l+1)$$

$$\frac{m_l^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = l(l+1)$$

## 2. 三个量子数

(1) 能量量子化和主量子数

$$E_n = -\frac{1}{n^1} \left( \frac{m r^1}{8 c^1 h^1} \right) \cdot n = 1, 2, 3 (\text{主量子数})$$

(2) 角动量量子化和角量子数

$$L = \sqrt{l(l+1)} \frac{h}{2\pi} \cdot 0 \leq l \leq (n-1) (\text{角量子数})$$

(3) 空间量子化和磁量子数

$$L_z = m_l \frac{h}{2\pi} \cdot 0 \leq |m_l| \leq l$$

$m_l$  为磁量子数

## 3. 氢原子在基态时的径向波函数和电子的分布概率

(1) 氢原子处于基态时, 径向波函数方程为

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{8\pi^2 m r^2}{h^2} \left[ E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] = 0$$

(2) 氢原子基态径向波函数为

$$R(r) = \left( \frac{4}{a_0^3} \right)^{1/2} e^{-r/a_0}$$

小结:

名称	内容	说明
氢原子的薛定谔方程	定态薛定谔方程为: $\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left( E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0$	在氢原子中, 电子的势函数 $U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$
三个量子数	(1) 电子的能量量子化和主量子数 $E_n = -\frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$ $n = 1, 2, 3, \dots (n \text{ 为主量子数})$ (2) 轨道角动量量子化和角量子数 $L = \sqrt{l(l+1)} \frac{h}{2\pi}$ $l = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (l \text{ 为角量子数})$ (3) 轨道角动量空间量子化和磁量子数 $L_z = m_l \frac{h}{2\pi}$ $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l (m_l \text{ 为磁量子数})$	除了 $n, l, m_l$ 这三个量子数外, 还有自旋量子数 $m_s$ . 这四个量子数可标识原子的状态

## ■ 七、多电子原子中的电子分布

### 1. 电子自旋 自旋磁量子数

自旋是电子的一种基本属性, 自旋角动量为

$$S = \sqrt{s(s+1)} \frac{h}{2\pi}$$

其中  $s$  为自旋角动量量子数,  $s = \frac{1}{2}$ .

### 2. 泡利不相容原理

1924 年, 泡利用指出一切多电子原子都必须遵守的规则, 这一规则现在被称为泡利不相容原理. 该原理指出: 同一原子中不可能有两个或两个以上的电子处于相同的量子态, 即同一原子中的任何两个电子不能有完全相同的一组量子数  $(n, l, m_l, m_s)$

能级  $n$  的量子态数为

$$z_n = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2$$

### 3. 能量最低原理

原子处于非常状态时, 原子中的每个电子都要占据最低能级. 若将电子按原子轨道的能级顺序由低到高排布, 通常可使原子体系的能量最低.

#### ※ 半导体

##### 1. 能带

我们把相邻能带之间不存在能级的区域叫做禁带, 如某一能带中, 各能级均被电子所填满, 这种能带叫做满带, 如能带中各能级没有电子填入, 这种能带叫做空带, 价电子的能级所分裂而成的能带叫做价带, 价带可以是满带, 也可以不是满带, 空带和未被电子填满的价带统称为导带.

##### 2. 本征半导体和杂质半导体

(1) 本征半导体.

纯净、不含杂质和缺陷的理想半导体称为本征半导体.

本征半导体中存在着电子电和空穴导电两种机制.

(2) 杂质半导体

在纯净的半导体中掺入一定量的其他元素就形成了杂质半导体, 其导电性能会显著改变.

##### 3. 小型半导体和 P 型半导体

(1) N 型半导体: N 型半导体是掺有施主杂质的半导体, 主要靠电子导电, 也称为电子型半导体.

(2) P 型半导体: P 型半导体是掺有受主杂质的半导体, 主要靠空穴导电, 也称空穴型半导体.

#### ※ 超导电性

把金属电阻突然降为零的状态称为超导态, 或称超导电性, 把电阻发生突变的温度称为超导转变温度, 或称临界温度, 用  $T_c$  表示.

(1) 零电阻率.

(2) 临界磁场: 能破坏超导态的外磁场的临界值(磁场强度的最低值)称为临界磁场, 用  $H_c$  表示. 实验指出  $H_c$  是温度的函数, 可用下式表示

$$H_c = H_0 \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right]$$

式中  $H_0$  为  $T = 0K$  时的临界磁场强度, 即临界磁场的最大值, 当  $T = T_c$  时,  $H_c = 0$ .

# 考研真题解析

1 用波长为  $\lambda = 200 \text{ nm}$  的光照射到铝表面上, 已知铝的逸出功  $A = 4.2 \text{ eV}$ . 求:

(1) 光电子的最大初动能;

(2) 遏止电压;

(3) 铝的红限波长.

(西安交通大学 2007 年硕士学位研究生入学考试题)

**思路分析** 光电子最大初动能等于光子能量减去逸出功; 而电子的电量和遏止电压的乘积为最大初动能; 红限频率则为光子能量等于逸出功 (光子电子初动能为零) 时光子所对应的频率.

**解** (1) 由光电效应方程

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + A$$

则最大初动能

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= h\nu - A = \frac{hc}{\lambda} - A \\ &= 6.63 \times 10^{-34} \times \frac{3 \times 10^8}{2 \times 10^{-7}} - 4.2 \times 1.6 \times 10^{-19} \\ &= 3.28 \times 10^{-19} \text{ J} = \frac{2.0 \text{ eV}}{e} = 2.0 \text{ eV} \end{aligned}$$

(2) 由  $eU_a = E_k$ , 所以遏止电压为  $U_a = \frac{E_k}{e} = \frac{2.0 \text{ eV}}{e} = 2.0 \text{ V}$

(3) 由于

$$h\nu_0 = A, \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$$

所以

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{4.2 \times 1.6 \times 10^{-19}} = 2.96 \times 10^{-7} \text{ m}$$



## 思路总结

能熟练应用解光电效应方程、遏止电压及红限频率的概念有效期是求解此题的关键.

2 波长为  $350 \text{ nm}$  的光波入射到某光电材料表面, 能量最高的光子在  $1.50 \times 10^{-5} \text{ T}$  的磁场中沿半径为  $18.0 \text{ cm}$  的圆轨道运动. 试求该光电材料的逸出功.

(南京大学 2004 年硕士学位研究生入学考试试题)

**思路分析** 该题为光电效应和圆周运动以及洛伦兹力知识的综合运用.

**解** 光子能量为

$$\epsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

光子在磁场中作圆周运动, 则

$$evB = \frac{mv^2}{R}$$

由上式可得


$$v = \frac{ReB}{m}$$

光电效应方程

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + A$$

由以上几式可得逸出功

$$A = \frac{hc}{\lambda} - \frac{(RBe)^2}{2m} = 6.80 \times 10^{-19} \text{ J}$$

 **思路总结** 光电子在磁场中能够作圆周运动的条件是洛伦兹力和向心力大小相等。

**3** 设电子被限定在  $0.1 \text{ nm}$  的尺度范围里,那么测定它的速度时,其不确定量为多大?

(西安交通大学 2008 年硕士学位研究生入学考试试题)

**思路分析** 利用不确定关系,可以认为电子位置的不确定量  $\Delta x$  就是电子被限定的尺度范围,从而求出电子动量的不确定量,进而由  $\Delta p = m\Delta v$  即可求出速度的不确定量。

**解** 由量子力学的不确定关系

$$\Delta x \Delta p \geq h/2$$

又

$$\Delta x = 0.1 \times 10^{-9} \text{ m}$$

故


$$\Delta p \geq \frac{h}{2\Delta x} = \frac{1.05 \times 10^{-34}}{2 \times 10^{-10}} = 0.525 \times 10^{-23}$$

又因为

$$\Delta p = m\Delta v = 0.525 \times 10^{-23}$$

所以

$$\Delta v = \frac{h}{2m\Delta x} = \frac{0.525 \times 10^{-23}}{9.11 \times 10^{-31}} = 5.76 \times 10^6 \text{ m/s}$$

 **思路总结** 正确理解和使用不确定用关系以及动量与速度的关系是求解此题的关键。

**4** 粒子在一维无限深势阱中运动(势阱宽度  $a$ ),其波函数为  $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{3\pi x}{a}$  且  $0 < x < a$ ,

求粒子出现的概率最大的各个位置。

(西安交通大学 2007 年硕士研究生入学考试试题)

**思路分析** 波函数模量的平方为概率密度,然后对概率密度取极值即可求出概率最大的各个位置。

**解** 粒子概率

$$P = \psi^2(x) = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{3\pi x}{a}$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{2}{a} \times 2 \sin \frac{3\pi x}{a} \cdot \cos \frac{3\pi x}{a} \cdot \frac{3\pi}{a} = \frac{6\pi}{a^2} \sin \frac{6\pi x}{a} = 0$$


$$x_1 = 0, x_2 = \frac{a}{6}, x_3 = \frac{a}{3}, x_4 = \frac{a}{2}, x_5 = \frac{2a}{3}, x_6 = \frac{5a}{6}, x_7 = a$$

极小点

$$x_1 = 0, x_3 = \frac{a}{3}, x_5 = \frac{2a}{3}, x_7 = a$$

故极大点

$$x_2 = \frac{a}{6}, x_4 = \frac{a}{2}, x_6 = \frac{5a}{6}$$

 **思路总结** 波函数模值的平方为在单位体积中找到粒子的概率,即概率密度。对概率密度

求导,在一阶导数等于零处,二阶导数小于零,即可得到极大值。

**5** 一个粒子限制在宽度为  $0 < x < a$  的一维无限深势阱中,若粒子的静态波函数为  $\psi(x) = A x \sqrt{a-x}$ ,其中  $A$  为常数,则发现粒子的概率最大的位置在何处?

(浙江大学 2005 年硕士学位研究生入学考试试题)

**思路分析** 此题中求发现粒子概率密度最大的位置,故应先求出概率密度  $|\psi(x)|^2$ ,再对其求导,求取最大值.

**解** 由题意得

$$\psi(x) = \begin{cases} -Ax\sqrt{a-x} & 0 < x < a \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

由波函数的归一化条件有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_0^a |-Ax\sqrt{a-x}|^2 dx = \frac{1}{12}A^2a^4 = 1$$

则

$$A = \frac{2\sqrt{3}}{a^2}$$

即归一化波函数为

$$\psi(x) = \begin{cases} -\frac{a^2}{2\sqrt{3}}x\sqrt{a-x} & 0 < x < a \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

则概率密度为

$$|\psi(x)|^2 = \begin{cases} \frac{a^4}{12}x^2(a-x) & 0 < x < a \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

令

$$\frac{d}{dx} |\psi(x)|^2 = \frac{1}{6}a^5x - \frac{1}{4}a^4x^2 = 0$$

解上式得

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}a$$

经验证可知  $|\psi(x)|^2$  在  $x_2 = \frac{2}{3}a$  处到最大值

$$|\psi(x)|^2_{\max} = \frac{a^7}{81}$$



### 思路总结

概率密度中的波函数为归一化的波函数,故在求解有关概率密度的问题时,应先对波函数进行归一化处理.

**6** (1) 如果一个电子处于原子某能态的时间为  $10^{-8}\text{s}$ ,该原子在此能态的能量的最小不确定量是多少?

(2) 设电子从上述能态(对应的能量为  $3.39\text{ eV}$ )跃迁到基态,试确定辐射光的波长的最小不确定量.

(中国科技大学 2004 年硕士学位研究生入学考试试题)

**思路分析** 此题为对能量和时间的不确定关系知识的综合考查.

**解** (1) 由时间和能量的不确定关系公式

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h/4\pi$$

能量的最小不确定量

$$\Delta E = h/4\pi \cdot \Delta t^{-1}$$

代入数值得

$$\Delta E = 5.28 \times 10^{-33}\text{ J}$$

(2) 由频率条件得

$$\frac{hc}{\lambda} = E_2 - E_1$$

$$\text{故} \quad \lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{(13.9 - 3.39) \times 1.6 \times 10^{-16}} \text{ m} = 121.8 \text{ nm}$$

$$\text{由} \quad E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\text{得} \quad \Delta E = \frac{hc}{\lambda^2} \Delta \lambda$$

故,光子的波长的最上不确定量

$$\Delta \lambda = \frac{\Delta E \lambda^2}{hc} = \frac{5.28 \times 10^{-33} \times 121.8}{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} = 3.23 \times 10^{-8} \text{ nm}$$



**思路总结** 要求波长的不确定量,需要通过光子能量公式求得波长不确定量与能量不确定量的关系。

7 已知作一维运动的微观粒子处于某一定态,其波函数为

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, x \geq 2a \\ \sqrt{\frac{1}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) & 0 < x < 2a \end{cases}$$

问:在何处发现粒子的概率最大?

(中国科技大学 2003 年硕士学位研究生入学考试题)

**思路分析** 要求发现粒子概率密度最大的位置,应先求出概率密度  $|\psi(x)|^2$  函数,再对其求导,求取最大值。

**解** 由题意得

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, x \geq 2a \\ \sqrt{\frac{1}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) & 0 < x < 2a \end{cases}$$

由波函数的归一化条件有  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$

$$\text{即} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_0^{2a} \left| \sqrt{\frac{1}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right|^2 dx = 1$$

即原函数为归一化波函数,则概率密度为

$$|\psi(x)|^2 = \begin{cases} 0 & x \leq 0, x \geq 2a \\ \frac{1}{a} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) & 0 < x < 2a \end{cases}$$

$$\text{令} \quad \frac{d}{dx} |\psi(x)|^2 = \frac{\pi}{a^2} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) = 0$$

且有  $0 < x < 2a$

解之得

$$x_1 = \frac{1}{2}a, x_2 = a, x_3 = \frac{3}{2}a$$

经验证可知  $|\psi(x)|^2$  在  $x_1 = \frac{1}{2}a$  和  $x_3 = \frac{3}{2}a$  处得到最大值

$$|\psi(x)|^2_{\max} \big|_{x_1 = \frac{1}{2}a} = |\psi(x)|^2_{\max} \big|_{x_3 = \frac{3}{2}a} = \frac{1}{a}$$



**思路总结** 概率密度中的波函数为归一化的波函数,故在求解有关概率密度的问题时,应先判断波函数是否为归一化的波函数. 对于一个波函数,概率最大的值往往不止一个,而是多个.

- 8 (中国科技大学 & 中国科学院) 用一束复色光照射基态的氢原子,入射光子的能量分别为  $\frac{1}{2}Rch$ 、 $\frac{8}{9}Rch$ 、 $2Rch$ ,问哪些光子能被氢原子吸收?

**解** 根据氢原子玻尔理论,氢原子的能量是量子化的,只有当光子的能量为两能级的能量差时,才能被氢原子吸收,氢原子的能量

$$E_n = -\frac{Rhc}{n^2}$$

$$E_2 - E_1 = \frac{3}{4}Rch$$

$$E_3 - E_1 = \frac{8}{9}Rch$$

$$E_\infty - E_1 = 0 - \left(-\frac{Rch}{1^2}\right) = Rch \text{ (电离能)}$$

故处于基态的氢原子能吸收能量为  $\frac{3}{4}Rch$  的光子跃迁至第一激发态( $n=2$ );吸收能量为  $\frac{8}{9}Rch$  的光子跃迁至第二激发态( $n=3$ );吸收能量为  $Rch$  的光子使氢原子电离,吸收  $2Rch$  能量的光子产生光电效应,光电子的动能为  $Rch$ ;能量为  $\frac{1}{2}Rch$  的光子不能被吸收.



**思路总结** 此题重点考查氢原子能级跃迁与光谱系,需熟练掌握谱线的波长公式和玻尔理论.

- 9 (南京理工大学) 试计算:(1) 经 200 V 的电势差加速后的电子的德布罗意波长;(2) 动能 1.38 MeV 的电子德布罗意波长.

**解** (1) 根据动量定理可知

$$\frac{1}{2}m_0v^2 = eU$$

求得  $v = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}}$

则有  $v \leq c$ , 所以粒子处于低速状态,德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{m_0v} = \frac{h}{\sqrt{2em_0U}} = 8.7 \times 10^{-11} \text{ m}$$

(2) 根据动能定理可判断速度和光速的比较,所以粒子处于高速状态,电子动能为


$$E_k = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - m_0c^2$$

德布罗波长为  $\lambda = \frac{h}{\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}v}$

则上两式联立可求



$$\lambda = c \sqrt{\left(\frac{E_k + m_0 c^2}{c^2}\right)^2 - m_0^2} = \sqrt{E_k \left(\frac{E_k}{c^2} + 2m_0\right)} = 9.7 \times 10^{-22} \text{ m}$$

 **思路总结** 此题重点考查德布罗意波长的计算,需要电场、运动学和量子物理理论的密切结合.

## 课后习题

- 15-1 解题过程** 一个物体的辐射能力正比于其吸收能力,作为一种极端情况,绝对黑体(一种理想模型)能将外来辐射(可见光或不可见光)全部吸收,就不会反射任何光线,同时其对外辐射能力最强,综上所述应选 D.
- 15-2 解题过程** 两系中过程的区别在于,光电效应是由电子吸收光子而产生的,但仅就电子和光子而言,两者之间并不是弹性碰撞过程,也不能符合能量守恒,所以本题选 B.
- 15-3 解题过程** 光不但具有波动性还具有粒子性,一个光子在真空中速度为  $c$ (与惯性系选择无关),在介质中速度为  $\frac{c}{n}$ ,它有质量、能量和动量,一个光子的静止质量  $m_0 = 0$ ,运动质量  $m = \frac{h\nu}{c^2}$ ,能量  $E = h\nu$ ,动量  $P = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}$ ,由于光子的静止质量为零,故它的静能  $E_0$  为零,所以其总能量表现为动能,故选 B.
- 15-4 解题过程** 由于波粒二象性使得粒子的动量和坐标不可能同时确定,这种关系适用各种微粒,本题选 C.
- 15-5 解题过程** 一线粒子在  $0 \leq x \leq a$  区间的概率密度函数应为  $|\Psi(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{3\pi}{a}x$ . 将  $x = a/6$  代入,即可得粒子在此处出现的概率为  $2/a$ . 故选 C.
- 15-6 解题过程** 半导体的导电性能取决于其能带结构和载流子的浓度,对掺杂半导体而言,掺杂使载流子的浓度大为增加, N 型半导体的多数载流子为电子, 5 价杂质原子形成的局部能级(施主能级)靠近导带底部,热激发很容易使主能级中的多余电子激发跃迁到导带(基本上为空带)中去,从而提高导电性能. P 型半导体多数载流子为空穴, 3 价杂质原子形成的局部能级(受主能级)靠近价带顶部,热激发同样容易使价带(基本上为满带)中的电子跃迁到受主能级上,从而使价带成为非满带,增加了 P 型半导体的导电性,可见说法 C 表述是完全正确的.
- 15-7 解题过程** 激光器中利用光学谐振腔可以提高激光成方向性,同时在振荡的过程中,又激发新的激光,于是知振荡过程中提高激光能量的同时还可提高其单色性,本题选 C.
- 15-8 知识点窍** 维恩位移定律:  $\lambda_m T = b$ .
- 逻辑推理** 由维恩位移定律可直接求出其辐射峰值波长  $\lambda_m$ .
- 解题过程** 由维恩定律  $\lambda_m = \frac{b}{T} = 2.57 \times 10^{-7} \text{ m} = 257 \text{ nm}$
- 15-9 知识点窍** 斯特藩—玻耳兹曼定律:  $M(T) = 6T^4$

其中  $6 = 5.670 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

**逻辑推理** 炼钢炉口可视为绝对黑体, 直接利用斯特藩—玻耳兹曼定律即可.

**解题过程**  $M(T) = 22.8 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2} = 22.8 \times 10^4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

代入公式:  $M(T) = 6T^4$  得:

$$T = 1.42 \times 10^3 \text{ K}.$$

**15-10 逻辑推理** 由太阳辐射的球对称性可知, 在以太阳为中心, 地球所在位置的球面上, 太阳辐射的总能量将均匀地通过该球面, 因而可根据地球表面单位面积在单位时间内接收的太阳能, 计算出太阳单位时间单位面积辐射的总能量  $M(T)$ , 再由公式  $M(T) = \sigma T^4$  求出太阳辐射能  $E$  的温度  $T$ .

**解题过程** 以太阳为球心, 以太阳到地球的距离  $d$  为半径的球面面积为  $S = 4\pi d^2$ ;

单位时间通过该球面的太阳辐射能为

$$E_{\text{总}} = E_{\text{地}} \cdot S = 4\pi d^2 E_{\text{地}} \quad (E_{\text{地}} = 1.4 \times 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2})$$

$$\text{太阳的辐出度} \quad M(T) = \frac{E_{\text{总}}}{S_{\text{太}}} = \frac{4\pi d^2 E_{\text{地}}}{4\pi R^2}$$

$$\text{由公式 } M(T) = \sigma T^4 \text{ 有 } \sigma T^4 = \frac{d^2 E_{\text{地}}}{R^2}$$

$$\text{所以太阳的温度为} \quad T = \left( \frac{d^2 E_{\text{地}}}{\sigma R^2} \right)^{\frac{1}{4}} = 5800 \text{ K}$$

**15-11 知识点窍** 爱因斯坦光电效应方程:  $h\gamma = \frac{1}{2}mv^2 + W$

**解题过程** 当光电子的初动能  $\frac{1}{2}mv^2 = 0$  时, 由  $h\gamma_0 = W$  所确定的频率  $\gamma_0$  即为材料的截止频率.

$$\text{钨的截止频率为: } \gamma_1 = \frac{W_{\text{钨}}}{h} = 1.09 \times 10^{15} \text{ Hz}; \text{ 钡的截止频率为: } \gamma_2 = \frac{W_{\text{钡}}}{h} = 0.603$$

$\times 10^{15} \text{ Hz}$ ; 钡的截止频率  $\gamma_2$  正好处于可见光的范围, 因而钡可以用于可见光范围内的光电管材料.

**15-12 知识点窍** 爱因斯坦光电效应方程:  $h\gamma = \frac{1}{2}mv^2 + W$

**逻辑推理** 由已知的截止频率  $\gamma_0$  可求出  $W = h\gamma_0$ ,  $\gamma = \frac{c}{\lambda}$ , 将以上各式代入爱因斯坦光电效应方程即可求出光电子的初速度  $\gamma$ .

**解题过程** 将  $W = h\gamma_0$ ,  $\gamma = \frac{c}{\lambda}$  代入爱因斯坦方程得

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{1}{2}mv^2 + h\gamma_0$$

由上式可得电子的初速度为

$$v = \left[ \frac{2h}{m} \left( \frac{c}{\lambda} - \gamma_0 \right) \right]^{1/2} = 5.74 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**15-13 知识点窍** 康普顿效应中的能量守恒式:  $h \frac{c}{\lambda_0} + m_0 c^2 = h \frac{c}{\lambda} + mc^2$

$$\text{相对论性质速关系式: } m = m_0 \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{康普顿散射公式: } \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta)$$

**逻辑推理** 由康普顿效应的能量守恒式和相对论性质速度关系可求出散射光子的波长 $\lambda$ ,再由康普顿散射公式求出散射角 $\theta$ .

$$\text{解题过程 康普顿效应的能量守恒式: } h \frac{c}{\lambda_0} + m_0 c^2 = h \frac{c}{\lambda} + m c^2 \quad (1)$$

$$\text{相对论性质速关系公式 } m = m_0 (1 - \frac{u^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} \quad (2)$$

联立①、②式可得散射光子的波长为

$$\lambda = \frac{4h\lambda_0}{4h - \lambda_0 m_0 c} = 4.35 \times 10^{-3} \text{ nm}$$

由康普顿散射公式:  $\lambda - \lambda_0 = \lambda_c (1 - \cos\theta)$  得散射角为

$$\theta = \arccos[1 - \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_c}] \quad (\text{式中 } \lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m, 称为康普顿波长})$$

将已知数据代入得散射角为  $\theta = \arccos 0.444 = 63^\circ 36'$

#### 15-14 知识点窍 光子的能量与频率的关系式: $E = h\gamma$

相对论能量和动量的关系式:  $E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$

相对论动能公式:  $E_k = E - E_0$

康普顿散射公式:  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_c (1 - \cos\theta)$

**逻辑推理** (1) 由康普顿散射公式和光子能量公式,可求出光子的波长、频率和能量的改变量.

(2) 光子与电子碰撞过程遵循能量守恒和动量守恒定律,以及相对论效应.由能量守恒可得电子获得的动能:  $E_{ke} = h\gamma_0 - h\gamma$ .由相对论中能量与动量的关系式  $E_c^2 = E_{0c}^2 + p_c^2 c^2$  和  $E_c = E_{0c} + E_{ke}$ ,可求出电子的动量 $p$ .由动量守恒可求出反冲电子的运动方向.

$$\text{解题过程 (1) 入射光的频率为 } \gamma_0 = \frac{E}{h} = 2.41 \times 10^{18} \text{ Hz}$$

$$\text{入射光的波长为 } \lambda_0 = \frac{c}{\gamma_0} = 0.124 \text{ nm}$$

散射后光子波长的改变量为

$$\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta) = 1.22 \times 10^{-3} \text{ nm}$$

散热后频率的改变量为

$$\Delta\gamma = \frac{c}{\lambda'} - \frac{c}{\lambda} = c(\frac{1}{\lambda + \Delta\lambda} - \frac{1}{\lambda}) = -2.30 \times 10^{16} \text{ Hz}$$

能量的改变量为  $\Delta E = h\gamma - h\gamma_0 = h\Delta\gamma = -1.525 \times 10^{-17} \text{ J} = -95.3 \text{ eV}$   
(式中负号表示散射光的频率和能量都减小)

(2) 由能量守恒定律可知散射后电子获得的能量等于光子损失的能量.

即电子的动能  $E_{ke} = |\Delta E| = 95.3 \text{ eV}$

由  $E_c^2 = E_{0c}^2 + p^2 c^2$  和  $E_c = E_{0c} + E_{ke}$  可得电子的动量为

$$p_c = \frac{\sqrt{E_{ke}^2 + 2E_{ke}E_{0c}}}{c} = 5.27 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

考虑 $y$ 轴方向动量守恒,即  $\frac{h\gamma}{c} \sin\theta = p_c \sin\phi$

电子运动方向为  $\varphi = \arcsin\left[\frac{h\gamma}{P_e c} \sin\theta\right] = \arcsin\left[\frac{h(\gamma_0 + \Delta\gamma)}{P_e c} \sin\theta\right] = 59^\circ 32'$

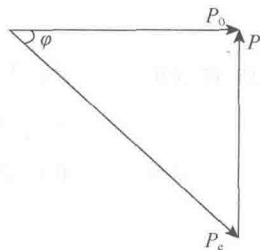
也可以考虑  $x$  轴方向的动量守恒, 但稍显复杂化.

**15-15 知识点窍** 康普顿散射公式:  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta)$

**逻辑推理** (1) 由于已知散射角  $\theta = 90^\circ$  及入射光波长  $\lambda_0 = 0.1\text{nm}$ .

因此可由康普顿散射公式求出散射辐射的波长  $\lambda$ .

(2) 康普顿散射遵循能量守恒和动量守恒定律. 因此反冲电子的动能可由散射光的能量减小量求得. 其运动方向可根据动量守恒定律求得(如题 15-15 图所示).



题 15-15 图

**解题过程** (1) 由康普顿散射公式  $\lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta)$  得散射辐射的波长为:

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_c(1 - \cos\theta) = 0.1024\text{nm}$$

(2) 由能量守恒定律可知反冲电子的动能等于光子损失的能量, 即

$$E_k = h\gamma_0 - h\gamma = hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right) = 4.66 \times 10^{-17}\text{J}$$

根据动量守恒定律, 得动量矢量图.

由图可知反冲电子的方向

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\frac{h}{\lambda}}{\frac{h}{\lambda_0}}\right) = \arctan\frac{\lambda_0}{\lambda} = 44^\circ 18'$$

**15-16 逻辑推理** 由  $\gamma = \frac{c}{\lambda}$  及  $E = h\gamma$  可得光子能量为  $E = \frac{hc}{\lambda}$ . 光子的动量可直接由公式  $p = \frac{h}{\lambda}$  计算. 光子的质量可根据质能方程  $E = mc^2$  求出.

**解题过程** 由  $E = h\gamma$  及  $\gamma = \frac{c}{\lambda}$  得  $E = \frac{hc}{\lambda}$ ;  $p = \frac{h}{\lambda}$ ;  $m = \frac{E}{c^2}$

$$(1) \lambda_1 = 1500\text{nm 时} \quad E_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = 1.33 \times 10^{-19}\text{J}$$

$$p_1 = \frac{h}{\lambda_1} = 4.42 \times 10^{-28}\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$m_1 = \frac{E_1}{c^2} = 1.47 \times 10^{-36}\text{kg}$$

光子的质量可根据质能方程  $E = mc^2$  求出.

(2)  $\lambda_2 = 500\text{nm}$  时, 利用上述公式可得

$$E_2 = 3.99 \times 10^{-19}\text{J},$$

$$p_2 = 1.33 \times 10^{-27}\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$m_2 = 4.41 \times 10^{-36}\text{kg}$$

(3)  $\lambda_3 = 20\text{nm}$  时

$$E_3 = 9.97 \times 10^{-18}\text{J},$$

$$p_3 = 3.31 \times 10^{-26}\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$m_3 = 1.10 \times 10^{-34}\text{kg}$$

(4)  $\lambda_4 = 0.15\text{nm}$  时

$$E_4 = 1.33 \times 10^{-15}\text{J},$$

$$p_4 = 4.42 \times 10^{-24}\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$m_4 = 1.47 \times 10^{-32} \text{ kg}$$

$$(5) \lambda_2 = 1 \times 10^{-3} \text{ nm 时}$$

$$E_5 = 1.99 \times 10^{-13} \text{ J},$$

$$p_5 = 6.63 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$m_5 = 2.21 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

- 15-17 **逻辑推理** 对莱曼系而言  $\frac{1}{\lambda} = R(1 - \frac{1}{n_i^2})$ . 显然, 当  $n_i = 2$  时, 所对应的波长是最长波长. 当  $n_i \rightarrow \infty$  时, 对应的波长为最短波长.

**解题过程** 莱曼系的谱线和规律:  $\frac{1}{\lambda} = R(1 - \frac{1}{n_i^2}), n_i = 2, 3, 4, \dots$

可知, 当  $n_i = 2$  时, 得该谱系的最长波长, 即

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = R(1 - \frac{1}{2^2})$$

解得

$$\lambda_{\max} = 121.5 \text{ nm}$$

当  $n_i \rightarrow \infty$  时, 得该谱系的最短波长, 即

$$\frac{1}{\lambda} = R$$

所以

$$\lambda_{\min} = 91.2 \text{ nm}$$

对照可见光波长范围  $400 \sim 760 \text{ nm}$ , 可知莱曼系中的所有谱线均不是可见光.

- 15-18 **知识点拨** 氢原子基态能量:  $E_1 = -13.6 \text{ eV}$

$$\text{氢原子的激发态能量: } E_n = \frac{1}{n^2} E_1 \quad (n = 2, 3, 4)$$

$$\text{氢原子光谱规律: } \frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2})$$

**逻辑推理** 按玻尔理论, 当氢原子中的电子在高能量  $E_i$  轨道与低能量  $E_f$  轨道之间跃迁时, 原子对外辐射或吸收能量  $\Delta E = |E_i - E_f|$ , 对氢原子而言,  $E_1 = -13.6 \text{ eV}$ ,  $E_n = \frac{1}{n^2} E_1$ . 游离态是指  $n \rightarrow \infty$  时的情况. 由公式  $E = h\nu$  可得辐射或吸收光的频率.

$$\text{辐射光子的波长也可由 } \frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}) \text{ 计算.}$$

**解题过程** 电子由  $n_i = 5$  跃迁到  $n_f = 2$  轨道时, 对轴射光子的波长  $\lambda$  满足

$$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2})$$

解得

$$\lambda = 4.34 \times 10^{-7} \text{ m} = 43.4 \mu\text{m}$$

电子从  $n_f = 2$  跃迁到游离态  $n_i \rightarrow \infty$  所需的能量为

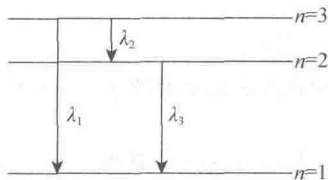
$$\Delta E = E_2 - E_{\infty} = \frac{E_1}{2^2} - 0 = -3.4 \text{ eV}$$

负号表示电子的吸收能量.

- 15-19 **知识点拨** 氢原子的基态能量:  $E_1 = -13.6 \text{ eV}$

$$\text{氢原子的激发态能量: } E_n = \frac{1}{n^2} E_1 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

$$\text{氢原子光谱规律: } \frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2})$$



题 15-19 图

**逻辑推理** 氢原子可以从轰击它的高能粒子上吸收能量,而使自己从较低能级(一般指基态)激发到较高能级.吸收的能量必须等于两能级间的能量差.据此可算出被激发氢原子可跃迁到的最高能级为  $n_i = 3$ . 由于激发态是不稳定的,它会自动跃迁回基态.辐射出对应的能级差的光子.其辐射可能有 3 种情况(如题 15-19 图所示):  $3 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 1$ ,  $3 \rightarrow 1$ ,再由氢原子光谱规律求出对应的谱线波长.

**解题过程** 由氢原子能级公式  $E_n = \frac{E_1}{n^2} = -\frac{13.6\text{eV}}{n^2}$

$$\text{当 } n = 2 \text{ 时 } E_2 = -\frac{13.6}{4} = -3.39\text{eV} \quad \Delta E = E_2 - E_1 < 12\text{eV}$$

$$\text{当 } n = 3 \text{ 时 } E_3 = -\frac{13.6}{9} = -1.51\text{eV} \quad E_3 - E_1 < 12.6\text{eV}$$

$$\text{当 } n = 4 \text{ 时 } E_4 = -\frac{13.6}{16} = -0.85\text{eV} \quad E_4 - E_1 > 12.6\text{eV}$$

所以得电子跃迁的最高级为  $n_2 = 3$ ,据此画出电子轨道跃迁图.由图中可知电子从最高能级  $n_i = 3$  回到基态的过程有 3 种可能情况,即  $3 \rightarrow 1$ ,  $3 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 1$ .由氢原子

光谱规律  $\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2})$  可得对应的波长为

$$\lambda_1 = 102.6\text{nm} \quad \lambda_2 = 657.9\text{nm} \quad \lambda_3 = 121.6\text{nm}$$

**15-20 知识点拨** 氢原子第一玻尔半径:  $r_1 = 5.29 \times 10^{-11}\text{m}$

$$\text{基态电子绕核运动的速度: } v_1 = \frac{h}{2\pi m r_1}$$

$$\text{圆电流在其中心产生的磁场: } B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

**逻辑推理** 基态氢原子中的电子在第一轨道作半径为  $r_1$ 、速度为  $v_1$  的匀速圆周运动,其频率为

$$f = \frac{v_1}{2\pi r_1}, \text{等效电流为 } I = ef. \text{该电流在圆心处激发的磁感强度 } B \text{ 可由公式 } B =$$

$$\frac{\mu_0 I}{2R} \text{ 求得.}$$

**解题过程** 电子圆周运动的等效电流为

$$I = ef = e \frac{v_1}{2\pi r_1} = e \frac{h}{2\pi r_1 \cdot 2\pi r_1 \cdot m} = \frac{eh}{4\pi^2 r_1^2 m} = 1.05 \times 10^{-3}\text{A}$$

$$\text{该圆电流在本核处磁感强度为 } B = \frac{\mu_0 I}{2r_1} = 12.5\text{T}$$

注:因  $v \ll c$ ,故  $m$  取电子  $m$  静止质量.

15-21 **知识点窍** 德布罗意公式:  $\lambda = \frac{h}{p}$

**逻辑推理** 因  $v \ll c$ , 可由相对论方法处理, 即将  $p = m_0 v$  代入德布罗意公式, 即可求出德布罗意波长.

**解题过程** 因  $\alpha$  粒子的运动速率  $v \ll c$ , 故可以认为  $m = m_0$ , 由德布罗意公式得  $\alpha$  粒子的德布罗意的波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v} = 1.99 \times 10^{-5} \text{ nm}$$

15-22 **知识点窍** 德布罗意公式:  $\lambda = \frac{h}{p}$

**逻辑推理** 当实物粒子的动能远小于静能时 ( $E_k \ll E_0$ ), 可用非相对论方法处理. 本题  $E_k = 1.0 \text{ eV}$ ,  $E_0 = m_0 c^2 = 0.512 \text{ MeV}$ , 显然  $E_k \ll E_0$ , 故可认为  $p = m_0 v = (2m_0 E_k)^{\frac{1}{2}}$ , 代入公式  $\lambda = \frac{h}{p}$  即可.

**解题过程** 由于  $E_0 = m_0 c^2 = 0.512 \text{ MeV} \gg E_k$ , 所以可用非相对论方法求解, 即  $P = m_0 v = (2m_0 E_k)^{\frac{1}{2}}$ , 代入德布罗意公式, 得德布罗意波长为  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_k}} = 1.23 \text{ nm}$

15-23 **逻辑推理** 由于  $p = m_0 \sqrt{v^2}$ ,  $m_0 = \frac{M}{N_A}$  ( $N_A$  为阿伏伽德罗常数), 所以由理想气体方均根速率

$$\text{公式及德布罗意公式可得德布罗意波长为 } \lambda = p \frac{h}{\frac{M}{N_A} \sqrt{\frac{3RT}{M}}} = \frac{h N_A}{\sqrt{3RT}}$$

**解题过程** 将方均根速率  $\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$  及  $m_0 = \frac{M}{N_A}$  代入德布罗意公式, 得氧气分子的德布

$$\text{罗意波长为 } \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 \sqrt{v^2}} = \frac{h}{\frac{M}{N_A} \sqrt{\frac{3RT}{M}}} = \frac{h N_A}{\sqrt{3RTM}}$$

15-24 **知识点窍** 德布罗意公式:  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$

**逻辑推理** 先依据相对论动能公式求得质点速度  $v$  和质量  $m$ , 再代入德布罗意公式求波长  $\lambda$ .

$$\text{解题过程 } E_K = mc^2 - moc^2 = \frac{moc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - moc^2$$

$$\text{得: } m = (E_K + moc^2)/c^2$$

$$v = c \sqrt{E_K^2 + 2E_K moc^2} / (E_K + moc^2)$$

将  $m, v$  代入德布罗意公式:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = hc / \sqrt{E_K^2 + 2E_K moc^2}$$

15-25 **逻辑推理** 由于光子的静能  $E_0 = 0$ , 因此可求出, 动能  $E_k = E - E_0 = E = h\nu$ , 光子的动量可由公式  $p = \frac{h}{\lambda}$  求得, 电子的动能可由公式  $E_k = \frac{p^2}{2m_0}$  求得, 动量由公式  $p = \frac{h}{\lambda}$  求得.

**解题过程** 由光子的动量方程:  $p = \frac{h}{\lambda}$

再由光电方程:  $E_k = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 6.22\text{keV}$

电子的动能为  $E'_k = \frac{p^2}{2m} = 37.8\text{eV}$

15-26 **知识点窍** 两端固定弦驻波的条件:  $a = n \frac{\lambda}{2} (n = 1, 2, 3, \dots)$

德布罗意公式:  $\lambda = \frac{h}{p}$  动量与动能的关系式:  $E_k = \frac{p^2}{2m}$  (非相对论)

**逻辑推理** 根据德布罗意假设, 自由粒子在势阱中运动时, 会形成两列相向而行的物质波, 若势阱宽度  $a = m \frac{\lambda}{2} (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 则这两列波会形成驻波, 由德布罗意公式  $\lambda = \frac{h}{p}$  及  $E_k = \frac{p^2}{2m}$  可求出粒子的动量和能量.

**解题过程** 设势阱度为  $a$ , 由驻波条件  $a = n \frac{\lambda}{2}$  得  $\lambda = \frac{2a}{n} (n = 1, 2, 3, \dots)$

由德布罗意公式  $\lambda = \frac{h}{p}$ , 可得自由粒子动量的表达式  $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{nh}{2a} (n = 1, 2, 3, \dots)$ .

由非相对论的动量与能量的关系式  $E_k = \frac{p^2}{2m}$  可得自由粒子的能量表达式为

$$E = \frac{n^2 h^2}{8ma^2} (n = 1, 2, 3, \dots).$$

15-27 **知识点窍** 不确定关系:  $\Delta x \Delta p_x \geq h$

**逻辑推理** 由于  $\Delta p_x = m \Delta v_x$ , 故不确定关系可写成  $\Delta x (m \Delta v_x) = h$

由此可求出速率的不确定量  $\Delta v_x = \frac{h}{m \Delta x}$ .

**解题过程** 将  $\Delta p_x = m \Delta v_x$  代入不确定关系  $\Delta x \Delta p_x \geq h$  中, 得  $\Delta v_x \geq \frac{h}{m \Delta x}$

将  $\Delta x = 5 \times 10^{-2} \text{nm}$  代入上式, 得电子速率的不确定量为  $\Delta v_x = 1.46 \times 10^7 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

15-28 **知识点窍** 不确定关系:  $\Delta x \Delta p_x \geq h$

**逻辑推理** 粒子的线度一般指直径, 由于质子在铀核内, 因此可取铀核的半径为质子的不确定位置. 再由不确定关系求出质子动量和速度不确定量.

**解题过程** 取铀核半径为质子的位置不确定量, 即

$$\Delta r = \frac{7.2 \times 10^{-15}}{2} \text{m} = 3.6 \times 10^{-15} \text{m}$$

由不确定关系  $\Delta r \Delta p \geq h$  可得质子动量的不确定量为

$$\Delta p = \frac{h}{\Delta r} = 1.84 \times 10^{-19} \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

再由  $\Delta p = m \Delta v$  得质子速度的不确定量为

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m} = 1.10 \times 10^8 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

15-29 **逻辑推理** (1) 考虑  $p = mv$  物质波的德布罗意波长为:  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$



(2) 将  $\Delta p_x = m\Delta v$  代入不确定关系式得  $\Delta x(m\Delta v) \geq h$ , 由于  $\Delta x$  已知, 故可求出速率的不确定量  $\Delta v = \frac{h}{m\Delta x}$ .

**解题过程** (1) 将  $p = mv$  代入德布罗意公式  $\lambda = \frac{h}{p}$  中, 得子弹的德布罗意波长为:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = 1.66 \times 10^{-35} \text{ m}$$

(2) 将  $\Delta p_x = m\Delta v$  代入不确定关系式  $\Delta x \Delta p_x \geq h$ , 可得子弹速率的不确定量为:

$$\Delta v = \frac{h}{m\Delta x} = 1.66 \times 10^{-28} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

注意: 由于  $h$  极小, 其数量级为  $10^{-34}$ , 故不确定关系仅对微观粒子有意义, 对宏观物体无实际意义.

**15-30 知识要点** 不确定关系式:  $\Delta y \Delta P_y \geq h$

**逻辑推理** 直接代入不确定关系式即可.

**解题过程** 缝宽  $b = \Delta y = 1 \times 10^{-10} \text{ m}$

代入不确定关系式

$$\Delta P_y \geq \frac{h}{\Delta y} = 6.63 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**15-31 逻辑推理** 将  $\Delta x = \lambda$  代入不确定关系可得  $\Delta p_x \geq \frac{h}{\lambda}$ , 而  $\Delta p_x = m\Delta v$

联立以上二式并考虑  $\frac{h}{\lambda} = p$  及  $\frac{p}{m} = v$ , 即可得到待证结论.

**解题过程** 将  $\Delta x = \lambda$  代入不确定关系得  $\Delta p \geq \frac{h}{\Delta x} = \frac{h}{\lambda}$

考虑  $\Delta p = m\Delta v$  及  $\frac{h}{\lambda} = p$  和  $\frac{p}{m} = v$  可得速度的不确定量为

$$\Delta v \geq \frac{h}{m\lambda} = \frac{p}{m} = v, \text{ 即 } \Delta v \geq v$$

结论得证.

**15-32 知识要点** 光子亦具有波粒二象性.

**解题过程** 由光子的波粒二象性则:

光子动量为:  $p_x = \frac{h}{\lambda}$

对方程两边取微分有  $(\Delta p_x) = \frac{h}{\lambda^2} \Delta \lambda$ .

即有  $\Delta x = \frac{h}{\Delta p_x} = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} = 4 \times 10^5 \text{ m}$

即其  $x$  坐标的不确定量有  $4 \times 10^5 \text{ m}$

**15-33 知识要点** 波函数的归一化条件:  $\int_V |\Psi|^2 dv = 1$

概率分布函数(概率密度):  $|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*$

概率极大值条件:  $\frac{d[|\Psi|^2]}{dx} = 0$  且  $\frac{d^2[|\Psi|^2]}{dx^2} < 0$

**逻辑推理** 由归一化条件  $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$  可求出波函数中的待定常数  $A$  和被归一化后的波函数. 概率分布函数可由  $|\Psi(x)|^2$  直接给出. 对  $|\Psi(x)|^2$  求极大值的位置坐标  $x$ , 可用系数极大值条件, 即一阶导数等于零, 二阶导数小于零, 由此确定的  $x$  坐标即是粒子出现的概率最大位置.

**解题过程** (1) 由归一化条件  $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$  得

$$\int_{-\infty}^0 0^2 dx + \int_0^{+\infty} A^2 x^2 e^{-2\lambda x} dx = \frac{A^2}{4\lambda^3} = 1 \quad (\text{本处利用 } \int_0^{\infty} y^2 e^{-by} dy = \frac{2}{b^3})$$

所以

$$A = 2\lambda\sqrt{\lambda}$$

归一化波函数为

$$|\Psi(x)|^2 = \begin{cases} 4\lambda^3 x^2 e^{-2\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

(3) 令  $\frac{d[|\Psi(x)|^2]}{dx} = 0$ , 得  $4\lambda^3 (2xe^{-2\lambda x} - 2\lambda x^2 e^{-2\lambda x}) = 0$ , 解得极值点为

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{\lambda}, x_3 \rightarrow \infty$$

由极大值条件  $\frac{d[|\Psi(x)|^2]}{dx^2} < 0$  可知, 在  $x = \frac{1}{\lambda}$  处,  $|\Psi(x)|^2$  有最大值, 即粒子在  $x = \frac{1}{\lambda}$  处出现的概率最大.

**15-34 知识点窍** 一维无限深势阱中粒子可能的能量:  $E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

粒子在一维无限条势阱中的波长函数:  $\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

概率分布函数(概率密度):  $|\Psi(x)|^2 = \Psi(x)\Psi^*(x)$

概率最小值条件:  $\frac{d[|\Psi|^2]}{dx} = 0$  且  $\frac{d^2[|\Psi|^2]}{dx^2} > 0$

**逻辑推理** (1) 粒子在最低能级的能量对应公式:  $E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}$  中  $n = 1$  时的基态能量.

(2) 粒子在势阱中的波函数为  $\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$  ( $0 \leq x \leq a$ ), 粒子处于第一激

发态( $n = 2$ )时,  $\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}$  ( $0 \leq x \leq a$ )

相应的概率密度为:  $|\Psi(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{2\pi x}{a}$  ( $0 \leq x \leq a$ )

利用一阶导数为零二阶导数大于零的数学方法, 可求出概率最小值及其对应的位置坐标.

**解题过程** (1) 电子在基态的能量为:  $E_1 = 1^2 \times \frac{h^2}{8ma^2} = 1.51 \times 10^{-18} \text{ J} = 9.43 \text{ eV}$

(2) 粒子在第一激发态( $n = 2$ )时,  $\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}$  ( $0 \leq x \leq a$ )

对应的概率密度函数为:  $|\Psi(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{2\pi x}{a}$  ( $0 \leq x \leq a$ )

$$\text{令 } \frac{d|\Psi|^2}{dx} = 0 \text{ 得 } \frac{8\pi}{a^2} \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi x}{a} = 0 \quad (0 \leq x \leq a)$$

在其定义域内解得:  $x = 0, \frac{a}{4}, \frac{a}{2}, \frac{3}{4}a, a$ .

由  $\frac{d^2|\varphi|^2}{dx^2} > 0$  可知, 函数在  $x_1 = 0, x_2 = \frac{a}{2}, x_3 = a$  (即  $x_1 = 0, x_2 = 0.1\text{nm}, x_3 = 0.2\text{nm}$ ) 处概率最小, 其值均为零.

**15-35 知识点** 一维无限深势阱中粒子可能的能量值:  $E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}$

**逻辑推理** 粒子被限制在细胞内运动, 用一维无限深势阱粒子模型来处理势阱宽度  $a = 1.0 \times 10^{-5}\text{m}$ , 其能量可由公式  $E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}$  计算.

**解题过程** 一维无限势阱粒子的能量为  $E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{当 } n = 100 \text{ 时, } E_{100} = 100^2 \times \frac{h^2}{8ma^2} = 5.49 \times 10^{-37} \text{ J}$$

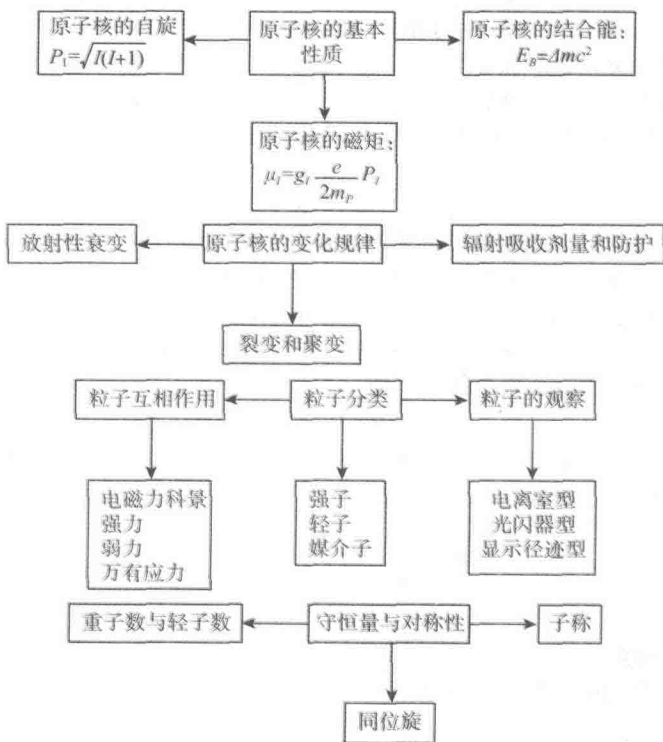
$$\text{当 } n = 101 \text{ 时, } E_{101} = 101^2 \times \frac{h^2}{8ma^2} = 5.60 \times 10^{-37} \text{ J}$$

$$\text{它们的能级差为: } \Delta E = E_{101} - E_{100} = 1.1 \times 10^{-38}$$

# 第十六章

## 原子核与粒子物理简介

### 本章知识框架图



## 考试要点

1. 利用质能公式求原子核的结合能以及比结合能的问题.
2. 运用核衰变规律求一定时间内核素的衰变问题.
3. 运用核衰变规律及其相应的变形式计算物质的存在时间问题.
4. 根据核聚变或者核裂变的方程式利用质能公式计算该过程中吸收或者放出的能量问题.

## 知识点整理与解析

### 一、原子核的基本性质

#### 1. 原子核的组成、大小和核力的存在

各种元素的原子核都由质子和中子组成,质子和中子统称为核子.质子即氢核,用  $p$  或表示,其电荷为  $+e$ ,质量为  $m_p = 1.6756 \text{ kg}$ ;中子的符号为  $n$ ,它不带电,其质量为  $m_n = 1.6749 \text{ kg}$ .原子核的质量常用原子质量单位  $u$  表示,  $1u \approx 1.6605 \text{ kg}$ .于是  $m_n = 1.0073u$ ,  $m_p = 1.0087u$ .中子的质量略大于质子的质量,但都非常接近于整数 1,故各种原子核的质量也非常接近于整数  $A$ ,  $A$  称为核的质量数,也叫核子数.核子数是原子核内质子数与中子数的总和.原子核带的电荷量就是质子带电量的总和:

$$q = Ze$$

式中的  $Z$  为核电荷数,也就是质子数,亦称为原子序数.如某核  $X$  的质量数为  $A$ ,电荷数为  $Z$ ,该核可记为  ${}_Z^AX$ .所以质量数  $A$  和电荷数  $Z$  是标志原子核特征的物理量.  $Z$  相同、 $A$  不相同的原子核为同位素,例如氢的同位素有:  ${}_1^1\text{H}$ 、 ${}_1^2\text{H}$  和  ${}_1^3\text{H}$ ,它们分别叫做氕核、氘核和氚核.

根据实验测定,原子核内的核子呈现对称分布,近似为半径  $R$  的球体.而且根据试验资料,核半径  $R$  与原子核质量数  $A$  的  $1/3$  次方成正比,即

$$R = r_0 A^{1/3}$$

式中  $r_0$  为常量,用不同实验测得的  $r_0$  稍有差异,但其数量级都是  $10^{-15} \text{ m}$ ,现代的实验给出  $r_0$  约在  $(1.1 \sim 1.3) \times 10^{-15} \text{ m}$  范围内.

原子核的密度为:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = \frac{3}{4\pi r_0^3} \frac{m}{A}$$

#### 2. 原子核的自旋、磁矩

原子核的自旋角动量用表示,其值为:

$$p_1 = \sqrt{I(I+1)} \frac{h}{2\pi}$$

$I$  称为自旋量子数,它只能取整数或半整数.

一般来说,磁矩与角动量有线性对应关系,圆电流的磁矩为  $\mu = SI$ ,有

$$u = \frac{q}{7} s = \frac{q\pi R^2}{2\pi R/V} = \frac{qVR}{2} = \frac{q}{2m} P_1$$

对原子核来说有类似关系

$$U_1 = g_1 = \frac{e}{2mp} P_1$$

只是公式中多了一个“ $g$  因子”，它是反映原子核结构的因子。式中为质子的质量。

### 3. 原子核的结合能

实验发现,任何一个原子核的质量,总要小于组成它的所有核子的质量之和。以 4 核为例,核的质量  $m_4^4\text{He} = 4.001506u$ ,它是由两个质子与两个中子组成,其中质子质量  $1.007276u$ ,中子质量  $1.008665u$ 。于是,两个质子与两个中子的质量和为

$$2 \times 1.008665u + 2 \times 1.007276u = 4.031882u$$

与核的质量之差为

$$\Delta m = 4.031882u - 4.001506u = 0.030376u$$

$\Delta m$  是核子结合为核时质量的减少值,称为质量亏损。这说明当两个质子与两个中子结合成核时,质量是减少了,根据质能公式,有  $\Delta E = \Delta mc^2 = 28.35\text{MeV}$  的能量被放出。这种在核子结合成原子核时放出的能量,称为结合能。一般来说,结合能用  $E_B$  表示,故结合能可写成

$$E_B = \Delta mc^2$$

另外定义比结合能

$$\epsilon = \frac{E_B}{A} = \frac{\Delta mc^2}{A}$$

它反映了核子结合的紧密程度,也是核稳定程度的标志。平均结合能越大,则核越稳定。

## 二、原子核的变化及其规律

### 1. 放射性衰变

核衰变规律包含两个方面。第一,是核衰变时的守恒规律。核在衰变过程中满足质量数守恒、电荷数守恒。第二,是核衰变规律。如在  $t=0$  时刻的核数为  $N_0$ ,而在  $t=t$  时刻核数衰变为  $N$ ,实验发现它们之间的关系遵从指数规律,即

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

$\lambda$  称为衰变常数。

可以得到

$$\lambda = -\frac{dN/dt}{N}$$

半衰期  $T$  是原子核数由  $N_0$  衰变到  $N = \frac{1}{2} N_0$  所需的时间,有

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$$

我们将每个原子核衰变前存在时间的平均值称为平均寿命  $\tau$ ,有

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

## 2. 裂变与聚变

原子核的另一种变化是人工核转变. 如对某些重核注入中子、质子、粒子或光子等粒子,使其分裂为两个中等质量的核,这称为核裂变. 此外,若对某些轻核施以高温、高压,使其聚合在一起形成质量稍大的核,这称为核聚变. 轻核聚变和重核裂变生成的核的平均结合能都要大于变化前的核,因此在这两个反应中都会伴随着能量的放出.

## 3. 辐射吸收剂量和防护

放射性射线被广泛用于社会实践的各领域. 但是射线过度照射对生物体也是有害的,这是由于射线会使细胞发生物理或化学变化,剂量过大就会使细胞分裂、死亡或病变. 这些都与辐射吸收剂量(简称吸收剂量)有关.

吸收剂量与辐射强度不同. 辐射强度是单位时间的核衰变数,而吸收剂量  $D$  则是物体吸收辐射的程度. 如  $E$  是被照射体吸收辐射的能量,  $m$  是被照射体的质量,那么吸收剂量  $D$  就是

吸收剂量的单位是戈瑞,符号为  $Gy$ ,  $1Gy = 1J/kg$ . 由于放射性射线种类不同,生物体即使吸收到相同的辐射剂量,在生物体内引起的影响也会不同,为表示吸收的有效作用,将吸收剂量与射线种类的品质因素  $Q$  的乘积定义为剂量当量  $H$ ,也称为有效剂量:

$$H = DQ$$

有效剂量的单位是希沃特,符号为  $Sv$ . 品质因数  $Q$  又称为相对生物有效性,它是由不同射线产生相同生物效应的吸收剂量的比来决定的.

# 三、粒子的相互作用及粒子分类

## 1. 相互作用

物理学中的四种相互作用,即万有引力、电磁力、弱力和强力.

## 2. 粒子分类

将粒子按参与相互作用的类型分为三大类:

(1) 强子(强子又分为重子和介子两类)

(2) 轻子

(3) 媒介子

## 3. 粒子的观察

(1) 电离室型

(2) 光闪器型

(3) 显示径迹型

# 四、守恒定律、对称性和标准模型

## 1. 守恒量与对称性

(1) 重子数与轻子数

(2) 同位旋

(3) 宇称

## 2. 标准模型

粒子物理学家提出了粒子物理学的标准模型,其要点有三个:

- (1) 物质的基本组成单元是三代轻子与六种夸克。
- (2) 粒子间的相互作用通过规范玻色子传递相互作用,即引力、电磁、强、弱相互作用,这四种相互作用在更高的对称性下可能统一,比如弱电统一。

(3) 在对称性的基础上讨论破缺带来的物理实质。

标准模型就建立在具有对称性破缺的规范理论的基础上。

## 课后习题

16-1 知识链接 结合能:  $\Delta E = \Delta mc^2 = E_B$

$$\text{平均结合能: } \epsilon = \frac{E_B}{A} = \frac{\Delta mc^2}{A}$$

逻辑推理  $^{238}\text{U}$  的电荷数为 92, 即一个  $^{238}\text{U}$  包含 92 个质子和 146 个中子, 而  $1u \approx 1.6605 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $m_p = 1.0073 u$ ,  $m_n = 1.0087 u$ . 根据公式不难计算。

解题过程 (1) 核子结合为  $^{238}\text{U}$  时的质量亏损为:

$$\Delta m = (92 \times 1.0073 + 146 \times 1.0087) - 238 = 1.9418 u$$

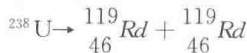
$$\therefore \text{结合能为: } E_B = \Delta mc^2$$

$$= \frac{(1.9418 \times 1.6605 \times 10^{-27}) \times (3 \times 10^8)^2}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ eV}$$

$$= 1801.91 \text{ MeV}$$

$$\text{平均结合能为: } \epsilon = \frac{E_B}{A} = \frac{1801.91}{238} \text{ MeV} = 7.57 \text{ MeV}$$

(2) 一个  $^{238}\text{U}$  分裂为两个相同中等原子核反应为:



结合能之差即为分裂时放出的能量:

$$\begin{aligned} \Delta E &= 2(E_B)_{\text{Rd}} - (E_B)_{\text{U}} \\ &= (2 \times 119 \times 8.5 - 238 \times 7.57) \text{ MeV} \\ &= 221 \text{ MeV} \end{aligned}$$

16-2 知识链接 衰变规律:  $N = N_0 e^{-\lambda t}$ , 平均寿命  $\tau = \frac{1}{\lambda}$

逻辑推理 根据衰变规律不难得到下述两个公式:

$$\text{七时刻剩余的核子数所占百分比为: } \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

解题过程 (1)  $\therefore \lambda = \frac{1}{\tau}$

$\therefore$  第 5 天已衰变数目所占百分比为:

$$\frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - e^{-\frac{5}{7}} = 0.393 = 39.3\%$$



(2) 第 4 天剩余数目所占百分比为:

$$\frac{N'}{N_0} = e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-0.4} = 0.67$$

由(1)的结论:第 5 天内衰变数目所占百分比为:

$$\frac{N' - N}{N_0} = e^{-0.4} - e^{-0.5} = 0.063 = 6.3\%$$

16-3 知识点 放射性活度:  $\left| \frac{dN}{dt} \right|$ , 单位为  $B_q$

逻辑推理  $\alpha$  粒子为氦核,  $1B_q = 1S^{-1}$

$$3.7 \times 10^{10} B_q = 1 \text{ Ci (居里)} \Rightarrow 1 B_q = \frac{1}{3.7} \times 10^{-10} \text{ Ci}$$

解题过程 利用放射性活度的物量意义:

$$\begin{aligned} -\frac{dN}{dt} &= \frac{740}{60} \times 1 \times 10^3 B_q = 1.233 \times 10^4 B_q \\ &= \frac{1.233 \times 10^4}{3.7} \times 10^{-10} \text{ Ci} = 0.33 \mu\text{Ci} \end{aligned}$$

16-4 知识点 衰变规律:  $N = N_0 e^{-\lambda t}$

由衰变规律进行推导:  $\frac{dN}{dt} = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} = -\lambda N$

$$\text{则有 } N = \frac{1}{\lambda} \left( -\frac{dN}{dt} \right)$$

$$\text{半衰期 } \tau = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$$

逻辑推理  $^{14}\text{C}$  含量不断减少, 而  $^{12}\text{C}$  十分稳定, 记  $N_{014}$  和  $N_{012}$  分别为  $^{14}\text{C}$  和  $^{12}\text{C}$  初始时的核数目.

由题意有:  $N_{14} = N_{014} e^{-\lambda t}$ ,  $N_{12} \approx N_{012}$

由  $\beta$  衰变率可求  $N_{14}$ , 再结合相关规律即可求解.

解题过程  $^{14}\text{C}$  的核数目为:

$$N_{14} = \frac{1}{\lambda} \left( -\frac{dN}{dt} \right) = \frac{T_{14}}{\ln 2} \left( -\frac{dN}{dt} \right) = 3.910 \times 10^{12}$$

$$^{12}\text{C} \text{ 的核数目为: } N_{12} \approx \frac{m}{M_{12}} \times N_A = 5.02 \times 10^{24}$$

$$\text{又初始时: } \frac{N_{014}}{N_{012}} = 1.3 \times 10^{-12}$$

$$\text{并且 } N_{012} = N_{12}$$

$$\therefore N_{014} = N_{12} \times 1.3 \times 10^{-12} = 6.25 \times 10^{12}$$

将  $N_{014}$ ,  $N_{14}$  代入衰变规律:

$$N_{14} = N_{014} e^{-\lambda t} = N_{014} e^{-\frac{\ln 2}{T_{14}} t}$$

$$\Rightarrow t = -\frac{T_{14}}{\ln 2} \ln \frac{N_{14}}{N_{014}} = 4233 \text{ a}$$

16-5 知识点 衰变规律:  $N = N_0 e^{-\lambda t}$

逻辑推理  $^{226}\text{Ra}$  与  $^{238}\text{U}$  核素的数目比在衰变过程中为常数, 即  $N_1 = N_{01} e^{-\lambda_1 t}$ ,

$$N_2 = N_{02} e^{-\lambda_2 t}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{N_{01}}{N_{02}} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = \text{常数} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

$$\text{又 } \lambda = \frac{1}{N} \left( -\frac{dN}{dt} \right) \Rightarrow \left( -\frac{dN}{dt} \right)_{\text{Ra}} = \left( -\frac{dN}{dt} \right)_U$$

$$\text{即 } \lambda_{\text{Ra}} N_{\text{Ra}} = \lambda_U N_U$$

**解题过程** 由逻辑推理:

$$\lambda_{\text{Ra}} N_{\text{Ra}} = \lambda_U N_U$$

$$\text{即 } \frac{\ln^2}{T_{\text{Ra}}} N_{\text{Ra}} = \frac{\ln^2}{T_U} N_U \Rightarrow T_U = \frac{N_U}{N_{\text{Ra}}} T_{\text{Ra}} = 4.6 \times 10^9 \text{ a}$$

**16-6 知识要点** 衰变规律:  $N = N_0 e^{-\lambda t}$

**解题过程** (1) 由题意:

$$-\frac{dN}{dt} = \frac{25}{3600} = \lambda N = \frac{\ln 2}{T} N = \frac{\ln 2}{T} \cdot \frac{m}{m_U}$$

$$\Rightarrow T = 2.530 \times 10^{23} \text{ s} = 8.02 \times 10^{15} \text{ a}$$

(2) 对  $x$  衰变, 1 个小时内

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N = \frac{\ln^2}{T} N = 4.46 \times 10^7 / \text{h}$$

可见铀的  $x$  衰变的次数远大于自发衰变的次数.

**16-7 知识要点** 结合能:  $E_B = \Delta m c^2$

$$\text{比结合能: } \epsilon = \frac{E_B}{A} = \frac{\Delta m c^2}{A}$$

**逻辑推理** 先求质量亏损  $\Delta m$ , 再求能量.

**解题过程** (1)  $\Delta m = 8 \times (1.0073 + 1.0087) - 16 = 0.128 \text{ u}$

$$E_B = \Delta m c^2 = \frac{(0.128 \times 1.6605 \times 10^{-27})}{1.6 \times 10^{-19}} = 119.556 \text{ MeV}$$

$$\epsilon = \frac{E_B}{A} = 7.47 \text{ MeV}$$

$$(2) {}_8^{16}\text{O} \rightarrow {}_7^{15}\text{N} + {}_1^1\text{H}$$

$$\Delta E = \Delta m c^2$$

$$= \frac{(15.9949 - 15.0001 - 1.007825) \times 1.6605 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ eV}$$

$$= -12.169 \text{ MeV}$$

即要吸收 12.169 MeV 的能量.

$$(3) {}_8^{16}\text{O} \rightarrow {}_8^{15}\text{O} + {}_1^1\text{n}$$

$$\Delta E = \Delta m c^2 = -15.659 \text{ MeV}$$

即要吸收 15.659 MeV 的能量.

**16-8 解题过程** (1)  $\lambda = \frac{\ln^2}{T} = 4.88 \times 10^{-18} / \text{s}$

$$(2) \text{由 } \left( -\frac{dN}{dt} \right) = \lambda N = \lambda \frac{m}{m_U} = 1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} / \text{s};$$

$$m = \frac{\left(-\frac{dN}{dt}\right) \times m_U}{\lambda} = 2.99 \times 10^6 \text{ g}$$

$$(3) \text{ 由 } \left(-\frac{dN}{dt}\right) = \lambda N = \lambda \frac{m}{m_U} = 1.24 \times 10^4 / \text{s}$$

即  $1\text{g}^{238}\text{U}$  每秒可放出  $1.24 \times 10^4$  个  $\alpha$  粒子.

**16-9 知识点拨** 衰变规律:  $N = N_0 e^{-\lambda t}$

**逻辑推理** 参见 16-4 逻辑推理.

**解题过程** 在古尸遗骸中:  $p = \frac{N_{14}}{N_{12}} = \frac{N_{014} e^{-\lambda t}}{N_{012}}$  (1)

在空气中  $\rho_0 = \frac{N_{14}'}{N_{12}'}$  (2)

$N_{12} = N_{012}$  (3)

$\frac{N_{14}'}{N_{12}'} = \frac{N_{014}}{N_{012}}$  (4)

联立 (1) ~ (4):  $\frac{\rho_0}{\rho} = e^{\lambda t}$

$\Rightarrow \ln \frac{\rho_0}{\rho} = \lambda t = \frac{\ln^2}{T} t$

$\therefore t = T \frac{\ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)}{\ln^2}$

**16-10 解题** 裂变次数为  $n = \frac{P_t}{\Delta E} = 3.13 \times 10^3$

**16-11 知识** 质能方程:  $\Delta E = \Delta mc^2$

**逻辑** 注意第二问只有  $\frac{1}{2} N_0$  次核反应!

**解题** (1)  $\Delta E = \Delta mc^2$   

$$= \frac{(2 \times 2.013553 - 4.001506) \times 1.6605 \times 10^{-27} \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ eV}$$

$= 23.9 \text{ n MeV}$

(2)  $1 \text{ mol } {}^2_1\text{H}$  的核聚变次数为  $n - \frac{1}{2} N_0 = 3.011 \times 10^{23}$

$\Delta E' = n \cdot \Delta E = 3.011 \times 10^{23} \times 23.911 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$   
 $= 1.152 \times 10^{12} \text{ J}$

## 高校经典教材同步辅导丛书

物理类 电子类 数学类 经济类

- 《物理学（第五版）同步辅导及习题全解》配套高教版马文蔚主编
- 《物理学（第六版·上册）同步辅导及习题全解》配套高教版马文蔚主编
- 《物理学（第六版·下册）同步辅导及习题全解》配套高教版马文蔚主编
- 《大学基础物理学（第二版）同步辅导及习题全解》配套清华版张三慧主编
- 《物理化学（第五版）同步辅导及习题全解》配套天津大学物理教研组编
- 《物理化学（第五版）同步辅导及习题全解》配套傅献彩等主编
- 《普通物理学（第六版·上册）同步辅导及习题全解》配套高教版程守洙、江之永主编
- 《普通物理学（第六版·下册）同步辅导及习题全解》配套高教版程守洙、江之永主编

ISBN 978-7-5170-3600-5



9 787517 036005 >

销售分类：高等数理化/物理学

定价：20.80元